

	UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
--	--	--

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Hay que contestar a una de las dos opciones que se ofrecen (A o B) y solo a una. Las respuestas han de ser concisas y se deben justificar los argumentos empleados.

CALIFICACIÓN: La puntuación de cada ejercicio, así como la de cada apartado, se indican en el encabezamiento de los mismos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

- a) **1.25 ptos.** Estudiar la compatibilidad y solubilidad del siguiente sistema según los valores de K :

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 7 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + Kz = 4 \end{cases}$$

- b) **1.25 ptos.** Calcular la solución en el caso de $K = 2$.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

- a) **1.25 ptos.** Obtener el plano π que contiene a las dos rectas paralelas siguientes:

$$r: x + 2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

- b) **1.25 ptos.** Hallar la recta perpendicular a dicho plano que pasa por el punto $P = (1, 2, -1)$.

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

- a) **1.25 ptos.** Obtener el dominio y calcular las asíntotas horizontales y verticales de la función:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

- b) **1.25 ptos.** Hallar la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

- a) **1.25 ptos.** Encontrar los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función:

$$g(x) = xe^{2x}$$

- b) **1.25 ptos.** Calcular la integral

$$\int_0^{\pi} (3x+1) \operatorname{sen}(x) dx$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1. (2.5 ptos.)**

- a) 1.25 ptos. Calcular el producto $A^T BC$, donde A^T es la traspuesta de A , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- b) 1.25 ptos. Estudiar para qué valores de la constante K la matriz B tiene inversa.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

- a) 1.25 ptos. Construir el plano π_1 perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P = (3, -1, 0)$, donde:

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1}, \quad z = 3$$

- b) 1.25 ptos. Obtener el plano paralelo al anterior que pase por el punto $Q = (5, 1, -1)$ y hallar la distancia entre los dos planos.

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

- a) 1.25 ptos. Hallar la relación entre las constantes A y B para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} Ax - x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{B}{x}, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- b) 1.25 ptos. Calcular los valores de A y B para los que $f(x)$ es también derivable en toda la recta.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

- a) 1.25 ptos. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y encontrar los máximos y mínimos de la función:

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$$

- b) 1.25 ptos. Calcular la primitiva:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx$$

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (2.5 pts.)

a) **1.25 pts.** Estudiar la compatibilidad y solubilidad del siguiente sistema según los valores de K:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 7 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + Kz = 4 \end{cases}$$

b) **1.25 pts.** Calcular la solución en el caso de $K = 2$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & K & 4 \end{pmatrix}.$$

Buscamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & K \end{vmatrix} = -K - 4 + 0 - 3 - 0 - 2 = -K - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -K - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{K = -9}$$

Se nos plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $K \neq -9$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $K = -9$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada usando el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -9 \quad 4 \\ -1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -6 \quad 11 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad -6 \quad 11 \\ 0 \quad -3 \quad 6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 11 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \text{A/B} & & & \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ \hline & \text{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución)

Conclusión: Si $K \neq -9$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $K = -9$ el sistema es incompatible.

b) Para $K = 2$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 2y + 3z = 7 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 7 \\ y = 2z \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4z + 3z = 7 \\ x + 2z + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 7z = 7 \\ x + 4z = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -x + 7z = 7 \\ x = 4 - 4z \end{cases} \Rightarrow -4 + 4z + 7z = 7 \Rightarrow 11z = 11 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2 \cdot 1 = 2} \\ \boxed{x = 4 - 4 \cdot 1 = 0} \end{cases} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)a) **1.25 ptos.** Obtener el plano π que contiene a las dos rectas paralelas siguientes:

$$r: x+2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

b) **1.25 ptos.** Hallar la recta perpendicular a dicho plano que pasa por el punto $P=(1,2,-1)$.

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-2,-1,0) \\ \vec{v}_r = (1,-1,2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1,2,-1) \\ \vec{u}_s = (1,-1,2) \end{cases}$$

El plano buscado contiene el punto $P_r(-2,-1,0)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$

$$\left. \begin{aligned} P_r(-2,-1,0) &\in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r &= (1,-1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_rQ_s} &= (1,2,-1) - (-2,-1,0) = (3,3,-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+6(y+1)+3z+3z+y+1-6(x+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+6y+6+3z+3z+y+1-6x-12=0 \Rightarrow \boxed{\pi: -5x+7y+6z-3=0}$$

El plano π que contiene a las dos rectas paralelas r y s tiene ecuación $\pi: -5x+7y+6z-3=0$.b) La recta perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: -5x+7y+6z-3=0 \Rightarrow \vec{n} = (-5,7,6)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= (1,2,-1) \in r \\ \vec{v}_r &= \vec{n} = (-5,7,6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2+7\lambda \\ z=-1+6\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta perpendicular al plano π que pasa por el punto $P=(1,2,-1)$ es $r: \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2+7\lambda \\ z=-1+6\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)a) **1.25 ptos.** Obtener el dominio y calcular las asíntotas horizontales y verticales de la función:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

b) **1.25 ptos.** Hallar la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

a) El dominio de esta función racional son todos los reales menos los valores que anulan su denominador.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.**Asíntotas verticales.** $x = a$ ¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2+1}{1^2-4+3} = \frac{3}{0} = \infty$$

 $x=1$ es asíntota vertical.¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3^2 - 4 \cdot 3 + 3} = \frac{7}{0} = \infty$$

 $x=3$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.b) La recta tangente a la función en el punto de abscisa $x_0 = 2$ tiene ecuación $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Determinamos la expresión de esta recta tangente.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2-4x+3) - (2x+1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - \cancel{8x} + 6 - 4x^2 + \cancel{8x} - 2x + 4}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 10}{(x^2-4x+3)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 10}{(2^2 - 4 \cdot 2 + 3)^2} = -2$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 - 4 \cdot 2 + 3} = -5 \\ f'(2) &= -2 \\ y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + 5 = -2(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -2x + 4 \Rightarrow \boxed{y = -2x - 1}$$

La recta tangente a la función en el punto de abscisa $x_0 = 2$ es $y = -2x - 1$.

Ejercicio 4. (2.5 pts.)a) **1.25 pts.** Encontrar los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función:

$$g(x) = xe^{2x}$$

b) **1.25 pts.** Calcular la integral

$$\int_0^{\pi} (3x+1) \operatorname{sen}(x) dx$$

a) Hallamos los valores que anulan la derivada de la función.

$$g(x) = xe^{2x} \Rightarrow g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x}(1+2x) = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

Hemos obtenido un punto crítico de la función en $x = -\frac{1}{2}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$g'(x) = e^{2x}(1+2x) \Rightarrow g''(x) = 2e^{2x}(1+2x) + e^{2x}2 = e^{2x}(2+4x+2) = 4e^{2x}(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4e^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e} > 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{2}$. Como $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}e^{-1} = \frac{-1}{2e}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1}{2e}\right)$.

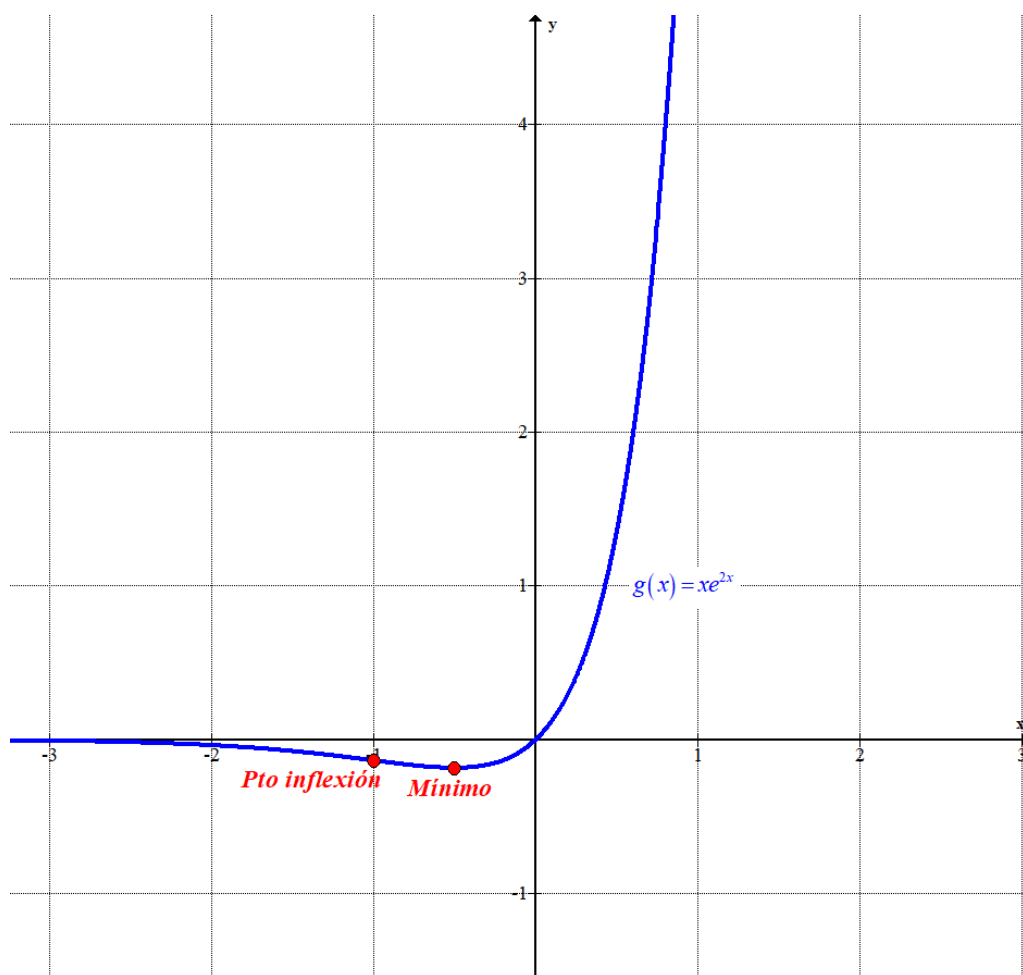
Para hallar los puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} g''(x) = 4e^{2x}(1+x) \\ g''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4e^{2x}(1+x) = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow 1+x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Comprobamos que la derivada tercera es no nula para $x = -1$.

$$g''(x) = 4e^{2x}(1+x) \Rightarrow g'''(x) = 8e^{2x}(1+x) + 4e^{2x} \Rightarrow g'''(-1) = 8e^{-2}(1-1) + 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \neq 0$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = -1$. Como $g(-1) = -e^{-2} = \frac{-1}{e^2}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(-1, \frac{-1}{e^2}\right)$.



- b) Para calcular el valor de la integral definida pedida hallamos primero la integral indefinida usando el método de integración por partes.

$$\int_0^{\pi} (3x+1) \operatorname{sen}(x) dx = \dots$$

$$\int (3x+1) \operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3x+1 \rightarrow du = 3dx \\ dv = \operatorname{sen}(x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -\cos x (3x+1) - \int -\cos x \cdot 3dx = -\cos x (3x+1) + 3 \int \cos x dx = -(3x+1) \cos x + 3 \operatorname{sen} x + K$$

$$\dots = \left[-(3x+1) \cos x + 3 \operatorname{sen} x \right]_0^{\pi} = \left[-(3\pi+1) \cos \pi + 3 \operatorname{sen} \pi \right] - \left[-(0+1) \cos 0 + 3 \operatorname{sen} 0 \right] =$$

$$= 3\pi + 1 + 0 - [-1 + 0] = \boxed{3\pi + 2}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (2.5 pts.)

a) **1.25 pts.** Calcular el producto $A^T BC$, donde A^T es la traspuesta de A, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) **1.25 pts.** Estudiar para qué valores de la constante K la matriz B tiene inversa.

a) Realizamos el producto $A^T BC$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0+3 & 2K+0-1 & 0+0+2 \\ 1-1+0 & K+0+0 & 0-2+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2K-1 & 2 \\ 0 & K & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+2K-1+0 & 10-2K+1+8 \\ 0+K+0 & 0-K-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+2K & 19-2K \\ K & -K-8 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

b) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 6K + 0 - 0 + 2K - 2 = -4K - 2$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -4K - 2 = 0 \Rightarrow -4K = 2 \Rightarrow \boxed{K = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}}$$

La matriz B tiene inversa para cualquier valor de K distinto de $\frac{-1}{2}$.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

- a) **1.25 ptos.** Construir el plano π_1 perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P = (3, -1, 0)$, donde:

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1}, z=3$$

- b) **1.25 ptos.** Obtener el plano paralelo al anterior que pase por el punto $Q = (5, 1, -1)$ y hallar la distancia entre los dos planos.

- a) El plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1}, z=3 \Rightarrow \vec{v}_r = (2, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = (3, -1, 0) \in \pi_1 \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P = (3, -1, 0) \in \pi_1 \\ \pi_1: 2x - y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -7 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 2x - y - 7 = 0}$$

El plano π_1 perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P = (3, -1, 0)$ tiene ecuación implícita $\pi_1: 2x - y - 7 = 0$.

- b) El plano π_2 paralelo a $\pi_1: 2x - y - 7 = 0$ tiene ecuación $\pi_2: 2x - y + K = 0$. Determinamos el valor de K sabiendo que debe pasar por el punto $Q = (5, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} Q = (5, 1, -1) \in \pi_2 \\ \pi_2: 2x - y + K = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 5 - 1 + K = 0 \Rightarrow K = -9 \Rightarrow \boxed{\pi_2: 2x - y - 9 = 0}$$

La distancia entre los dos planos paralelos es la distancia del plano π_1 al punto Q perteneciente al plano π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x - y - 7 = 0 \\ Q = (5, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1, Q) = \frac{|2 \cdot 5 - 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89 \text{ u}^2}$$

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) **1.25 ptos.** Hallar la relación entre las constantes A y B para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} Ax - x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{B}{x}, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

b) **1.25 ptos.** Calcular los valores de A y B para los que $f(x)$ es también derivable en toda la recta.

a) Para que sea continua la función debe serlo en $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= A - 1^2 = A - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} Ax - x^2 = A - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{B}{x} = \frac{B}{1} = B \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{B = A - 1}$$

La relación entre las constantes A y B que hace que la función sea continua es $B = A - 1$.

b) Para ser derivable la función debe ser continua y debe cumplirse que $B = A - 1$. La función

$$\text{queda } f(x) = \begin{cases} Ax - x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{A-1}{x}, & \text{si } 1 < x \end{cases}.$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} A - 2x, & \text{si } x < 1 \\ -\frac{(A-1)}{x^2} = \frac{1-A}{x^2}, & \text{si } 1 < x \end{cases}.$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$ debe serlo en $x=1$ y para ello deben coincidir las derivadas laterales: $f'(1^-) = f'(1^+)$.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} A - 2x = A - 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-A}{x^2} = 1 - A \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - 2 = 1 - A \Rightarrow 2A = 3 \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}}$$

Los valores que hacen que la función sea derivable son $A = \frac{3}{2}$ y $B = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 4. (2.5 pts.)

- a) **1.25 pts.** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y encontrar los máximos y mínimos de la función:

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$$

- b) **1.25 pts.** Calcular la primitiva:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx$$

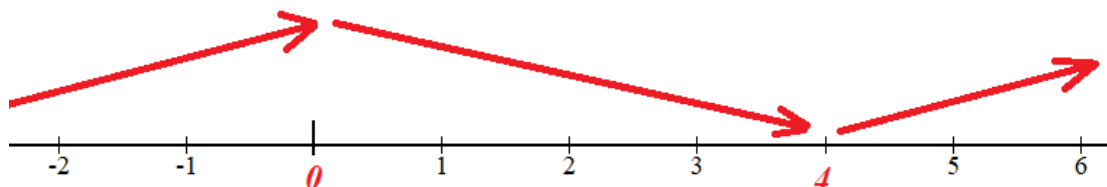
- a) Hallamos los valores que anulan la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = x^2 - 4x \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $g'(-1) = (-1)^2 - 4(-1) = 5 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 4)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 4)$.
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $g'(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5 > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

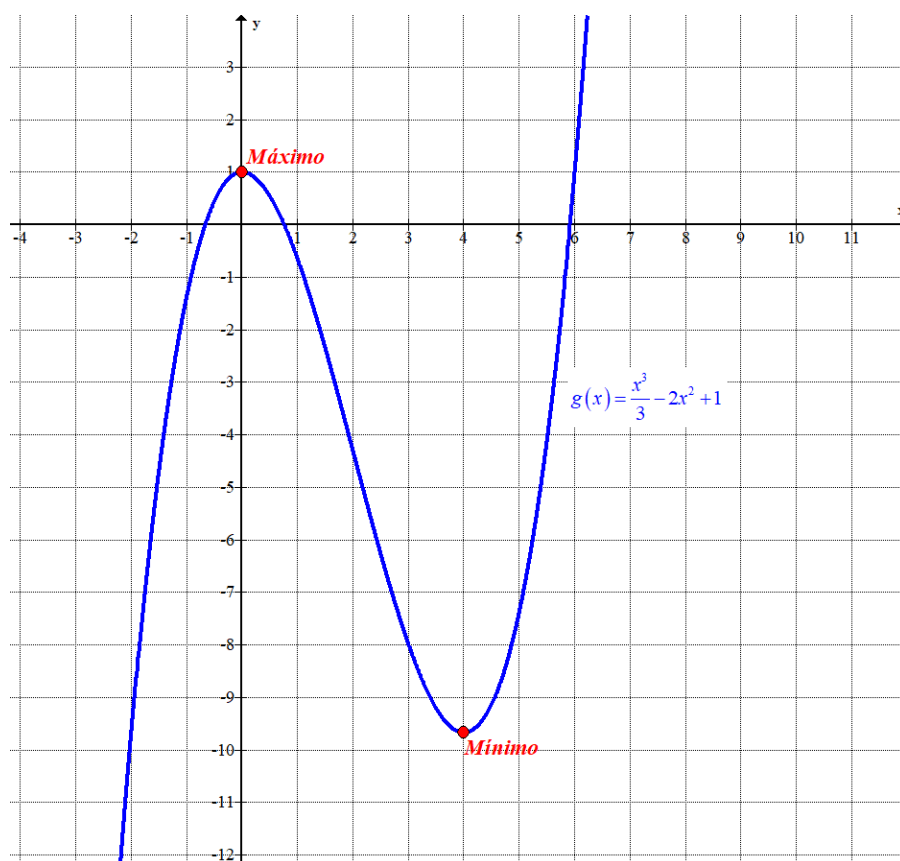


La función crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 4)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 4$. Como

$$g(0) = \frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1 \text{ y } g(4) = \frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 1 = \frac{-29}{3} \text{ el máximo relativo tiene coordenadas}$$

$$(0, 1) \text{ y el mínimo relativo es } \left(4, \frac{-29}{3}\right).$$



b) Resolvemos la integral.

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \boxed{\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 3 \arctg(x) + K}$$