

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se calculará sobre las respuestas dadas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un árbol de Navidad tiene bolas de Navidad, campanitas y muñecos de Papá Noel, en total 46 adornos. Entre campanitas y muñecos hay uno más que la mitad de bolas. El precio de una bola es 0.50 euros, el de una campanita es 1 euro, y el de un muñeco es 3.50 euros. Si hemos gastado en total 46 euros, ¿cuántas bolas de Navidad, campanitas y muñecos de Papá Noel hay en el árbol?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{1+|x|}$

- (0.75 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio.
- (0.5 puntos) Determinar la paridad de la función.
- (0.75 puntos) ¿Cuáles son los mínimos y máximos relativos de la función?
- (0.5 puntos) Estudiar si $f(x)$ tiene asíntotas y calcularlas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideramos un paralelepípedo tales que las tres aristas desde el vértice $O(0, 0, 0)$ tienen longitud 1 y los ángulos entre cada dos de ellas son 60° . Sabemos que una cara está apoyada sobre el plano OXY , que el paralelepípedo se encuentra en el primer octante y que tiene un segundo vértice en $A(1, 0, 0)$.

- (1.5 puntos) Hallar los otros dos vértices B, C adyacentes a O .
- (1 punto) Hallar el volumen del paralelepípedo.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean A, B, C tres sucesos de un espacio muestral, tales que B y C son independientes. Sabemos que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(A \cap C) = 0.1$, $P(A \cap (B \cup C)) = 0.36$ y la probabilidad condicionada $P(A/B \cup C) = 1/2$.

- (0.75 puntos) Hallar $P(C/A)$.
- (0.5 puntos) ¿Son A, B sucesos independientes?
- (1.25 puntos) Hallar $P(C)$.

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

OPCIÓN B**B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Sea b un número real y consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1.25 puntos) Decidir si la matriz $C = AA^t$ tiene inversa según los valores de b .

b) (1.25 puntos) Discutir el sistema $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, según los valores de b

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las funciones $f(x) = x^2 - \pi x$, $g(x) = \sin(x)$.

a) (0.75 puntos) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $F(x) = g(x) - f(x)$ en $[0, \pi]$.

b) (0.75 puntos) Demostrar que existen sólo dos soluciones a la ecuación $f(x) = g(x)$.

c) (1 punto) Hallar el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 8 - \mu \\ z = -11 + 2\mu \end{cases}$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas.

b) (1.5 puntos) Hallar la recta perpendicular y que corta a r y s .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Cierta enfermedad vírica altamente contagiosa ha producido 17688 muertes en hombres y 14964 muertes en mujeres. Los porcentajes de decesos son para hombres, el 3.4% en la franja de edad 0-60, el 23.8% en la franja de edad 60-80 y el 72.8% en la franja de edad 80-adelante. Los porcentajes de decesos son para mujeres, el 5.8% en la franja de edad 0-60, el 39.8% en la franja de edad 60-80 y el 54.4% en la franja de edad 80-adelante.

a) (1.25 puntos) Suponiendo que un deceso es de alguien de más de 80 años, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

b) (1.25 puntos) Usando la aproximación a la normal, si hay 100 decesos de personas de más de 80 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya más decesos de hombres?

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7267	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

SOLUCIONES**OPCIÓN A****A.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un árbol de Navidad tiene bolas de Navidad, campanitas y muñecos de Papá Noel, en total 46 adornos. Entre campanitas y muñecos hay uno más que la mitad de bolas. El precio de una bola es 0.50 euros, el de una campanita es 1 euro, y el de un muñeco es 3.50 euros. Si hemos gastado en total 46 euros, ¿cuántas bolas de Navidad, campanitas y muñecos de Papá Noel hay en el árbol?

Llamamos “x” al número de bolas, “y” al número de campanitas y “z” al número de muñecos que tiene el árbol de Navidad.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el problema.

- En total 46 adornos $\rightarrow x + y + z = 46$.
- Entre campanitas y muñecos hay uno más que la mitad de bolas $\rightarrow y + z = \frac{x}{2} + 1$.
- El precio de una bola es 0.50 euros, el de una campanita es 1 euro, y el de un muñeco es 3.50 euros. Si hemos gastado en total 46 euros $\rightarrow 0.5x + y + 3.5z = 46$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 46 \\ y + z = \frac{x}{2} + 1 \\ 0.5x + y + 3.5z = 46 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 46 \\ 2y + 2z = x + 2 \\ x + 2y + 7z = 92 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 46 - y - z \\ 2y + 2z = x + 2 \\ x + 2y + 7z = 92 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 46 - y - z + 2 \\ 46 - y - z + 2y + 7z = 92 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z = 48 \\ y + 6z = 46 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 16 \\ y + 6z = 46 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 16 - z \\ y + 6z = 46 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 - z + 6z = 46 \Rightarrow 5z = 30 \Rightarrow \boxed{z = 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 16 - 6 = 10} \Rightarrow \boxed{x = 46 - 10 - 6 = 30}$$

En el árbol de navidad hay 30 bolas, 10 campanitas y 6 muñecos.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{1+|x|}$

- a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio.
 b) (0.5 puntos) Determinar la paridad de la función.
 c) (0.75 puntos) ¿Cuáles son los mínimos y máximos relativos de la función?
 d) (0.5 puntos) Estudiar si $f(x)$ tiene asíntotas y calcularlas.

a) Obtenemos la expresión de $f(x)$ como función a trozos.

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{e^x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función en el intervalo $(-\infty, 0)$ está definida como $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, su denominador se anula para $x = 1 \notin (-\infty, 0)$, por tanto es continua en $(-\infty, 0)$.

La función en el intervalo $(0, +\infty)$ está definida como $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$, su denominador se anula para $x = -1 \notin (0, +\infty)$, por tanto es continua en $(0, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{e^{-|0|}}{1+|0|} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1-x} = \frac{e^0}{1-0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{e^{-0}}{1+0} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 0$ y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, siendo su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(1-x) - (-1)e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{-e^{-x}(1+x) - 1 \cdot e^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{-e^{-x}(2+x)}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} = \frac{e^0(2-0)}{(1-0)^2} = 2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x}(2+x)}{(1+x)^2} = \frac{-e^{-0}(2+0)}{(1+0)^2} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = 2 \neq -2 = f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$. La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Estudiamos la paridad de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{e^{-|-1|}}{1+|-1|} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} \\ f(1) &= \frac{e^{-|1|}}{1+|1|} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) = f(1)$$

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \frac{e^{-|-2|}}{1+|-2|} = \frac{e^{-2}}{3} = \frac{1}{3e^2} \\ f(2) &= \frac{e^{-|2|}}{1+|2|} = \frac{e^{-2}}{3} = \frac{1}{3e^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

Como $f(-x) = f(x)$ la función es par.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} = 0 \rightarrow e^x(2-x) = 0 \rightarrow 2-x = 0 \rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 0) \\ \frac{-e^{-x}(2+x)}{(1+x)^2} = 0 \rightarrow e^{-x}(2+x) = 0 \rightarrow 2+x = 0 \rightarrow x = -2 \notin (0, +\infty) \end{cases}$$

La función no tiene puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{e^{-1}(2+1)}{(1+1)^2} = \frac{3}{4e} > 0$.

La función crece en $(-\infty, 0)$.

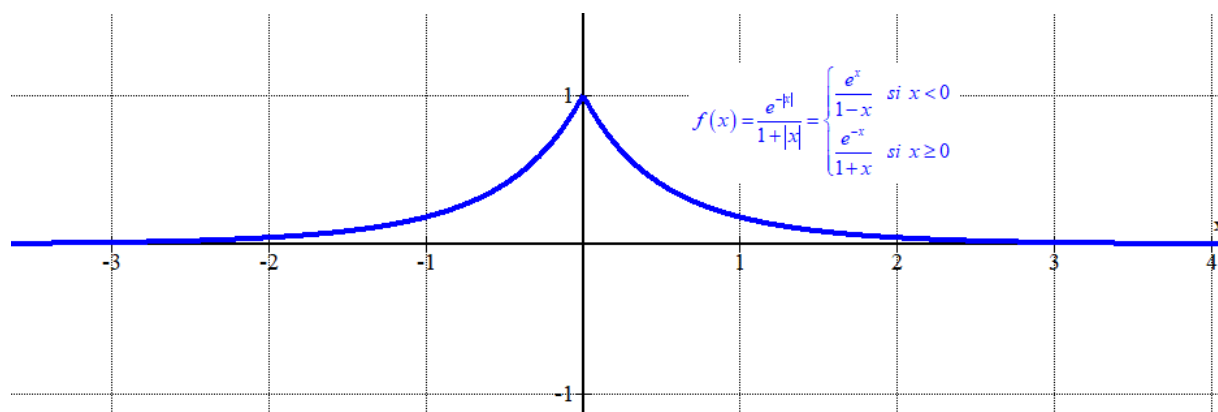
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-e^{-1}(2+1)}{(1+1)^2} = \frac{-3}{4e} < 0$.

La función decrece en $(0, +\infty)$.

Como la función es continua y crece antes de $x = 0$ y decrece después, tiene un valor máximo

en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{e^{-|0|}}{1+|0|} = 1$ el máximo absoluto tiene coordenadas $(0, 1)$.

La función no tiene ningún mínimo relativo.



c) **Asíntota vertical.** $x = a$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(1+x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}(1-x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

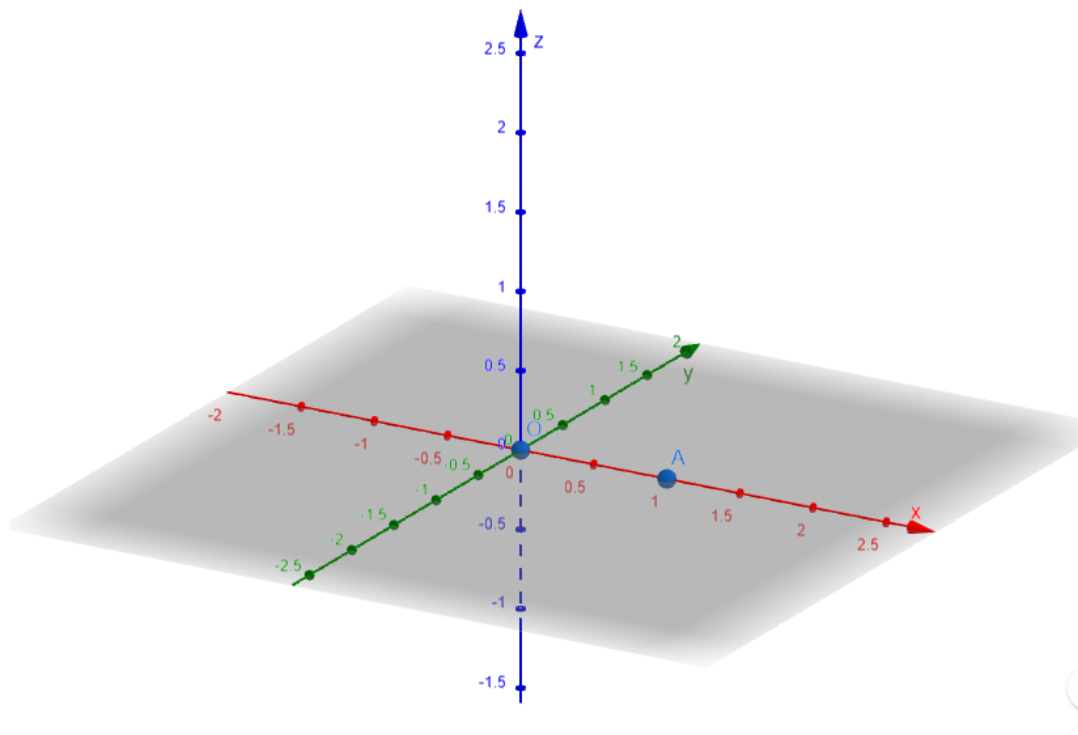
Como tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideramos un paralelepípedo tales que las tres aristas desde el vértice $O(0, 0, 0)$ tienen longitud 1 y los ángulos entre cada dos de ellas son 60° . Sabemos que una cara está apoyada sobre el plano OXY , que el paralelepípedo se encuentra en el primer octante y que tiene un segundo vértice en $A(1, 0, 0)$.

a) (1.5 puntos) Hallar los otros dos vértices B, C adyacentes a O .

b) (1 punto) Hallar el volumen del paralelepípedo.



a) Un vértice B adyacente a O está situado en el plano OXY , por lo que sus coordenadas son $B(a, b, 0)$. La arista OB forma 60° con la arista OA y además la arista OB tiene longitud 1.

$$B(a, b, 0) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (a, b, 0) - (0, 0, 0) = (a, b, 0)$$

$$A(1, 0, 0) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 60^\circ \Rightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow (a, b, 0)(1, 0, 0) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow \left\{ a = \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{b = \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)}$$

El vértice B del paralelepípedo situado en el plano OXY tiene coordenadas $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Un tercer vértice $C(x,y,z)$ del paralelepípedo adyacente a O tiene coordenadas positivas (primer octante). La arista OC forma 60° con las aristas OB y OA y tiene longitud 1.

$$C(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z)$$

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = 60^\circ \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow (x, y, z)(1, 0, 0) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, y, z\right) \\ \overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, y, z\right) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 2\sqrt{3}y = 2 \Rightarrow 2\sqrt{3}y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{OC}| = 1 \\ \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, z\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + z^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{36} + z^2 = 1 \Rightarrow$$

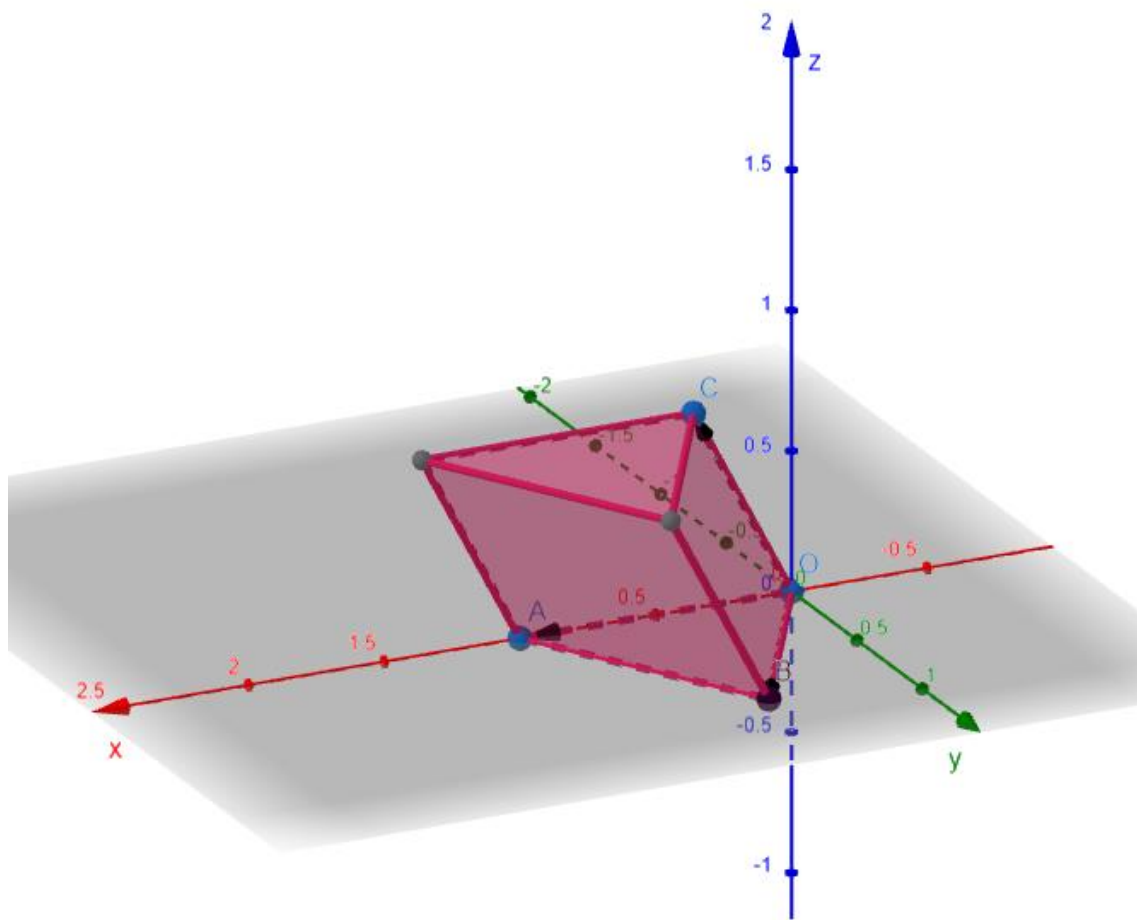
$$\Rightarrow z^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{z = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$$

El tercer vértice del paralelepípedo es el punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

- b) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los vectores que definen las aristas OA , OB y OC .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \text{ u}^3}$$

El área del paralelepípedo tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ unidades cúbicas.



A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean A, B, C tres sucesos de un espacio muestral, tales que B y C son independientes. Sabemos que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(A \cap C) = 0.1$, $P(A \cap (B \cup C)) = 0.36$ y la probabilidad condicionada $P(A / B \cup C) = 1/2$.

- a) (0.75 puntos) Hallar $P(C / A)$.
 b) (0.5 puntos) ¿Son A, B sucesos independientes?
 c) (1.25 puntos) Hallar $P(C)$.

a) Calculamos $P(C / A)$ usando el teorema de Bayes.

$$P(C / A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.5} = \boxed{0.2}$$

b) Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \neq 0.15 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A / B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{0.36}{P(B \cup C)} \Rightarrow \boxed{P(B \cup C) = 0.72}$$

Como B y C son independientes entonces $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.3P(C)$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos B y C.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \Rightarrow 0.72 = 0.3 + P(C) - 0.3P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.42 = 0.7P(C) \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{0.42}{0.7} = 0.6}$$

OPCIÓN B**B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Sea b un número real y consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1.25 puntos) Decidir si la matriz $C = AA^t$ tiene inversa según los valores de b .

b) (1.25 puntos) Discutir el sistema $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, según los valores de b

a) Obtenemos la expresión de la matriz C .

$$C = AA^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0-b & 1-2 \\ 0-b & 0+b^2 & 0+2b \\ 1-2 & 0+2b & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -b & -1 \\ -b & b^2 & 2b \\ -1 & 2b & 5 \end{pmatrix}$$

$3 \times \begin{bmatrix} 2 & \cdot & 2 \end{bmatrix} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$

Para que la matriz C tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -b & -1 \\ -b & b^2 & 2b \\ -1 & 2b & 5 \end{vmatrix} = 10b^2 + 2b^2 + 2b^2 - b^2 - 5b^2 - 8b^2 = 0$$

El determinante de C es nulo. La matriz C no tiene inversa para ningún valor de b .

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $C = \begin{pmatrix} 2 & -b & -1 \\ -b & b^2 & 2b \\ -1 & 2b & 5 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$C/B = \begin{pmatrix} 2 & -b & -1 & 0 \\ -b & b^2 & 2b & 0 \\ -1 & 2b & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz C tiene determinante nulo su rango es menor de 3.

Analizamos el rango de la matriz ampliada.

Consideramos el menor que resulta de quitar la columna 2ª $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -b & 2b & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4b + 0 + 0 - 0 - b - 0 = 3b. \text{ El determinante de este menor de orden 3 se anula}$$

para $b = 0$. Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $b \neq 0$

En este caso el determinante de orden 3 de la matriz ampliada es no nulo y el rango de C/B es 3. El rango de C (2) es distinto del rango de C/B (3) y el sistema es incompatible.

CASO 2. $b = 0$

En este caso el determinante del menor de orden 3 es nulo y el rango de la matriz ampliada es menor de 3.

Las matrices quedan $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $C/B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 2 de la matriz C que resulta de quitar la fila y columna 2ª (nulas) $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 \neq 0$. El rango de C es 2.

El rango de C/B es 2 pues tiene el mismo menor con determinante no nulo.

Los rangos de C y de C/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las funciones $f(x) = x^2 - \pi x$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

- a) (0.75 puntos) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $F(x) = g(x) - f(x)$ en $[0, \pi]$.
 b) (0.75 puntos) Demostrar que existen sólo dos soluciones a la ecuación $f(x) = g(x)$.
 c) (1 punto) Hallar el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

a) Obtenemos la expresión de la función $F(x)$.

$$F(x) = g(x) - f(x) = \operatorname{sen}(x) - (x^2 - \pi x) = \operatorname{sen} x - x^2 + \pi x$$

Obtenemos la derivada de la función: $F'(x) = \cos x - 2x + \pi$.

Esta derivada se anula para $x = \frac{\pi}{2}$, pues $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} + \pi = 0 - \pi + \pi = 0$.

En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ estudiamos el signo de la derivada.

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < -x \leq 0 \Rightarrow 2\frac{-\pi}{2} < -2x \leq 0 \Rightarrow -\pi + \pi < -2x + \pi \leq \pi \Rightarrow 0 < -2x + \pi \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x < \cos x - 2x + \pi \leq \cos x + \pi \Rightarrow \left\{ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \Rightarrow 0 \leq \cos x < \cos x - 2x + \pi \leq \cos x + \pi$$

Tenemos que $0 < \cos x - 2x + \pi = F'(x)$, por lo que la derivada es positiva y la función crece en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ estudiamos el signo de la derivada.

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow -2\pi \leq -2x < -2\frac{\pi}{2} = -\pi \Rightarrow -2\pi + \pi < -2x + \pi \leq -\pi + \pi \Rightarrow -\pi < -2x + \pi \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x - \pi < \cos x - 2x + \pi \leq \cos x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \cos x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos x - 2x + \pi \leq \cos x < 0$$

Tenemos que $F'(x) = \cos x - 2x + \pi < 0$, por lo que la derivada es negativa y la función decrece en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

- b) Las funciones $f(x) = x^2 - \pi x = x(x - \pi)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ valen lo mismo para $x = 0$ y para $x = \pi$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0(0 - \pi) = 0 \\ g(0) = \operatorname{sen}(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = g(0) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\pi) = \pi(\pi - \pi) = 0 \\ g(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\pi) = g(\pi) = 0$$

No existen más valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$, pues la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una función que toma valores entre -1 y 1 y la función $f(x) = x^2 - \pi x$ crece por encima de estos valores a partir de π y antes de 0 .

Lo comprobamos después de π .

$$\frac{3\pi}{2} \geq x > \pi \Rightarrow x - \pi > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x(x - \pi) > 0 \\ g(x) = \operatorname{sen}(x) < 0 \end{array} \right.$$

$$x \geq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x - \pi \geq \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x(x - \pi) \geq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{4} \approx 7 > 1 \\ g(x) = \operatorname{sen}(x) \leq 1 \end{array} \right.$$

Lo comprobamos antes de 0 .

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \Rightarrow x - \pi < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x(x - \pi) > 0 \\ g(x) = \operatorname{sen}(x) < 0 \end{array} \right.$$

$$x < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \pi < -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x(x - \pi) \geq \frac{-3\pi}{2} \cdot \frac{-\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{4} \approx 7 > 1 \\ g(x) = \operatorname{sen}(x) \leq 1 \end{array} \right.$$

No hay ninguna solución en $(-\infty, 0)$ ni en $(\pi, +\infty)$.

Entre 0 y π no puede haber otra solución pues la función $F(x) = g(x) - f(x)$ vale 0 en $x = 0$,

crece hasta $x = \frac{\pi}{2}$ y luego decrece hasta $x = \pi$, donde vuelve a valer 0 .

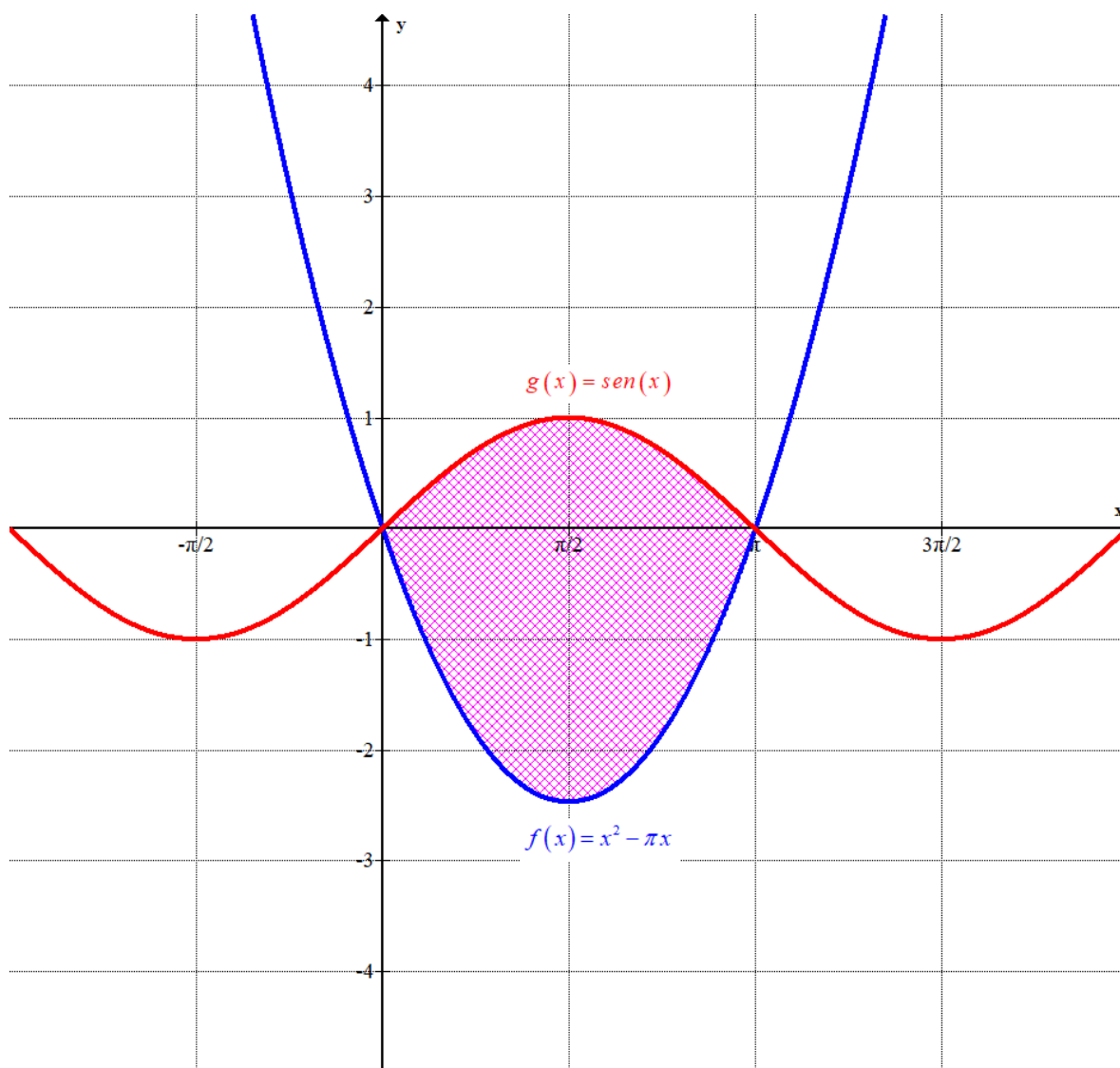
c) Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - \pi x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ se cortan en $x = 0$ y en $x = \pi$.

El área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ es el valor de la integral definida entre 0 y π de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^{\pi} f(x) - g(x) dx = \int_0^{\pi} x^2 - \pi x - \operatorname{sen}(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\pi x^2}{2} + \cos(x) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi \cdot \pi^2}{2} + \cos(\pi) \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{\pi \cdot 0^2}{2} + \cos(0) \right] = \boxed{\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{2} - 1 - 1 = \frac{-\pi^3}{6} - 2 \approx -7.17}$$

El área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un valor aproximado de 7.17 unidades cuadradas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-2z=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x=1+\mu \\ y=8-\mu \\ z=-11+2\mu \end{cases}$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas.
 b) (1.5 puntos) Hallar la recta perpendicular y que corta a r y s .

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$s: \begin{cases} x=1+\mu \\ y=8-\mu \\ z=-11+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1,8,-11) \\ \vec{u}_s=(1,-1,2) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y=2z \end{cases} \Rightarrow x+2z-z=1 \Rightarrow x=1-z \Rightarrow r: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(1,0,0) \\ \vec{v}_r=(-1,2,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s=(1,-1,2) \\ \vec{v}_r=(-1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_s Q_r}]$. Si es nulo se cortan y si es distinto de cero se cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} P_s(1,8,-11) \\ Q_r(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_s Q_r} = (1,0,0) - (1,8,-11) = (0,-8,11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(-1,2,1) \\ \vec{u}_s=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{P_s Q_r}=(0,-8,11) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_s Q_r}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 11 \end{vmatrix} = 11+0-8-0-22-16 = -35 \neq 0$$

Las rectas se cruzan (son dos rectas con distinta dirección, pero no se cortan).

- b) El producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas es el vector director de la recta t perpendicular a ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(-1,2,1) \\ \vec{u}_s=(1,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4i + j + k - 2k + 2j + i = 5i + 3j - k = (5,3,-1)$$

Hallamos el plano π que contiene a la recta r y que también tiene el vector $\vec{w}_t = (5, 3, -1)$ como vector director.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (5, 3, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \\ Q_r(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3 + y + 10z + 3z - 5y + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x - 4y + 13z - 5 = 0}$$

Hallamos el plano π' que contiene a la recta s y que también tiene el vector $\vec{w}_t = (5, 3, -1)$ como vector director.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (5, 3, -1) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 8, -11) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-8 & z+11 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6 - y + 8 - 5z - 55 - 3z - 33 - 10y + 80 - x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 5x - 11y - 8z - 5 = 0}$$

La recta perpendicular y que corta a r y s es la que definen los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi': 5x - 11y - 8z - 5 = 0 \\ \pi: 5x - 4y + 13z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} 5x - 11y - 8z - 5 = 0 \\ 5x - 4y + 13z - 5 = 0 \end{cases}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Cierta enfermedad vírica altamente contagiosa ha producido 17688 muertes en hombres y 14964 muertes en mujeres. Los porcentajes de decesos son para hombres, el 3.4% en la franja de edad 0-60, el 23.8% en la franja de edad 60-80 y el 72.8% en la franja de edad 80-adelante. Los porcentajes de decesos son para mujeres, el 5.8% en la franja de edad 0-60, el 39.8% en la franja de edad 60-80 y el 54.4% en la franja de edad 80-adelante.

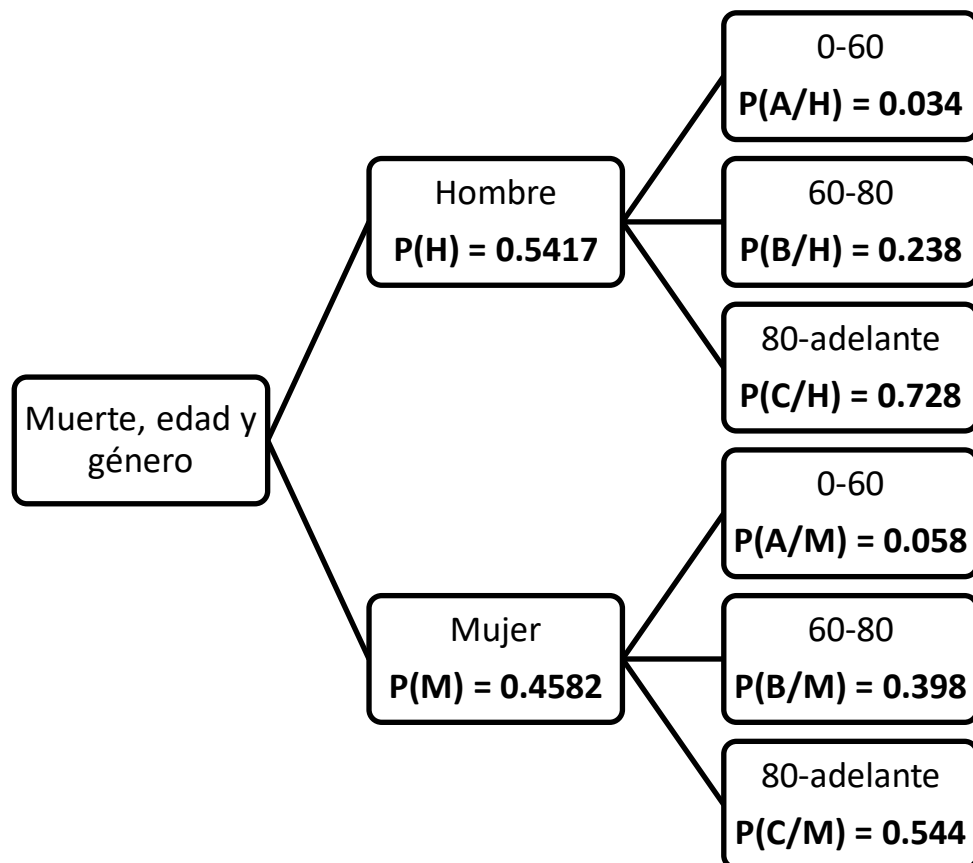
- a) (1.25 puntos) Suponiendo que un deceso es de alguien de más de 80 años, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?
- b) (1.25 puntos) Usando la aproximación a la normal, si hay 100 decesos de personas de más de 80 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya más decesos de hombres?

Llamamos H a “la muerte es de un hombre” y M a “la muerte es de una mujer”.

Hay $17688 + 14964 = 32652$ muertes. La probabilidad de que una muerte sea de hombre es

$$\frac{17688}{32652} = \frac{1474}{2721} \approx 0.5417 \text{ y la de que sea mujer es } \frac{14964}{32652} = \frac{1247}{2721} \approx 0.4582.$$

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(H / C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(H / C) &= \frac{P(H \cap C)}{P(C)} = \frac{P(H)P(C / H)}{P(H)P(C / H) + P(M)P(C / M)} = \\
 &= \frac{0.5417 \cdot 0.728}{0.5417 \cdot 0.728 + 0.4582 \cdot 0.544} \approx \boxed{0.6127}
 \end{aligned}$$

- b) Consideramos una binomial $X = N^\circ$ de decesos de hombres de un grupo de 100 decesos de personas de más de 80 años. Sabemos que $n = 100$ y que $p = P(H / C) = 0.6127$

$$X = B(100, 0.6127)$$

Esta binomial se aproxima con una normal de media $\mu = np = 100 \cdot 0.6127 = 61.27$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.6127 \cdot 0.3873} \approx 4.87$.

La variable binomial X se aproxima con una normal $Y = N(61.27, 4.87)$.

Esta aproximación es buena pues $n = 100 > 30$, $np = 61.27 > 5$ y $nq = 38.73 > 5$.

Nos piden calcular $P(X > 50)$.

$$P(X > 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 50.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{50.5 - 61.27}{4.87}\right) = P(Z \geq -2.21) = P(Z \leq 2.21) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9864}$$

z	0.00	0.01	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9
2.3	0.9893	0.9896	0.9