



SOLUCIONES

Cuestión 1 [2.5 puntos] Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) [0.75 puntos] Encontrar los valores de la constante λ para los cuales la matriz A tiene inversa.

SOLUCIÓN:

Para que exista la inversa debe verificarse que el determinante de A debe ser no nulo. Así:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 1$$

Por tanto, existirá la inversa si $\lambda + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1$

- (b) [0.75 puntos] Calcular la inversa de la matriz A para $\lambda = 1$.

SOLUCIÓN:

En este caso ($\lambda = 1$) tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))'}{\det(A)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (c) [1.0 puntos] Para $\lambda = 1$, comprobar que se verifica la siguiente identidad:

$$A^2 - A = 2I$$

siendo I la matriz identidad de 3×3 .

SOLUCIÓN:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuestión 2 [2.5 puntos] Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} 4x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -3z & = & 0 \\ 3x & -2y & -az & = & 0 \end{cases}$$

(a) **[1.5 puntos]** Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calcularemos el determinante asociado a la matriz de los coeficientes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -a \end{vmatrix} = -5a - 20.$$

Entonces, si $\det(A) \neq 0$ el sistema será compatible determinado (teorema de Rouché-Frobenius). Por tanto:

$$-5a - 20 = 0, \Rightarrow a = -4$$

- Luego si $a \neq -4$ el sistema es compatible determinado, y al tratarse de un sistema homogéneo, la solución del mismo será la trivial, es decir, $(x = 0, y = 0, z = 0)$

- Para $a = -4$, la matriz de los coeficientes A y la ampliada será: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right)$.

Como se observa, la tercera fila será igual a la diferencia entre la primera fila y la segunda. Por tanto, el rango de la matriz A y el de la ampliada es 2 ya que tenemos una submatriz 2x2 con determinante no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Entonces, como el rango es 2 y es menor que el número de incógnitas, que es 3, el sistema será **compatible indeterminado (infinitas soluciones)**.

(b) **[1.0 puntos]** Obtener las soluciones para cualquier valor del parámetro a .

SOLUCIÓN:

- Para $a \neq -4$ el sistema es compatible determinado, y al tratarse de un sistema homogéneo la solución del mismo será la trivial, es decir, $(x = 0, y = 0, z = 0)$
- Para $a = -4$, observamos que la tercera fila será igual a la diferencia entre la primera fila y la segunda. Por tanto, podemos eliminar la tercera ecuación al ser combinación lineal de las anteriores, quedando el sistema de la siguiente manera:

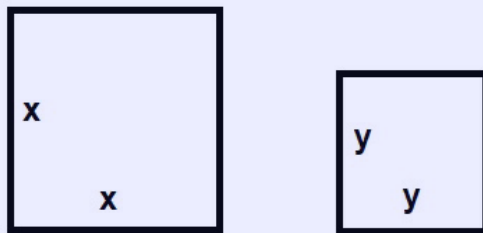
$$\begin{cases} 4x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -3z & = & 0 \end{cases}$$

Sistema que se puede resolver de manera sencilla por sustitución. Así, haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x & -y & = & -\lambda \\ x & +y & = & 3\lambda \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} . \\ x = 3\lambda - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(3\lambda - y) - y = -\lambda \\ . \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 12\lambda - 4y - y = -\lambda \\ . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{13\lambda}{5} \\ . \end{cases} \\ \begin{cases} . \\ x = 3\lambda - y \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} . \\ x = 3\lambda - \frac{13\lambda}{5} = \frac{2\lambda}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

por tanto, las soluciones será de la forma: $(x = \frac{2\lambda}{5}, y = \frac{13\lambda}{5}, z = \lambda)$

Cuestión 3 [2.5 puntos] Se dispone de una tela metálica de 144 metros de longitud para vallar dos parcelas cuadradas situadas en una region como la de la figura, es decir, se encuentran separadas.



Asumiendo que se han de utilizar exáctamente los 144 metros de valla, determinar los valores de x e y que hacen que la suma de las áreas encerradas sea mínima.

SOLUCIÓN:

A partir del dibujo sabemos que la suma de las áreas será:

$$\text{área}(x, y) = x^2 + y^2$$

Por otro lado, como debemos utilizar la totalidad de la valla, la suma de los perímetros vendrá dado por:

$$4x + 4y = 144 \Rightarrow x + y = 36 \Rightarrow y = 36 - x$$

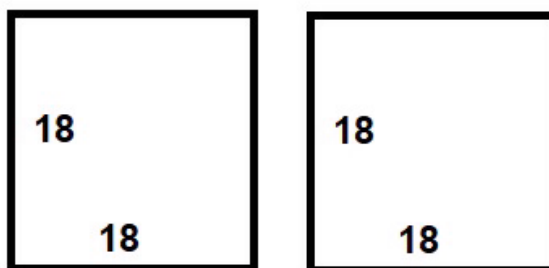
Por tanto, la función a minimizar vendrá dada por:

$$S(x) = x^2 + (36 - x)^2 = 2x^2 - 72x + 1296$$

A partir de esta función, sabemos que la suma de las áreas de los campos será mínima en las soluciones de $S'(x) = 0$ y que hagan positiva a $S''(x)$. Así:

$$\begin{aligned} S'(x) &= 4x - 72 \Rightarrow 4x - 72 = 0 \Rightarrow x = \frac{72}{4} = 18 \\ S''(x) &= 4 > 0 \text{ siempre} \end{aligned}$$

por tanto, para $x=18$ la función $S(x)$ presentará un mínimo, siendo por tanto las dimensiones de ambas parcelas de 18 y 18 de lado cada una, es decir, ambas deberán ser iguales.



Cuestión 4 [2.5 puntos] Consideremos la función racional $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- (a) [0.75 puntos] Determine los puntos de corte con el eje OX y calcule su derivada.

SOLUCIÓN:

- Puntos de corte:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

- La derivada de la función vendrá dada por:

$$f'(x) = \frac{2 * (x^2 + 1) - 2x * (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

- (b) [0.75 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función, así como sus extremos relativos.

SOLUCIÓN:

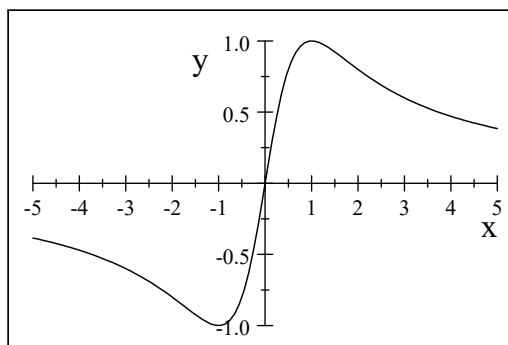
Sabemos que el crecimiento o decrecimiento de la función puede obtenerse analizando el signo de la derivada. Así, como el denominador, al tratarse de un cuadrado, es siempre positivo, debemos centrarnos únicamente en el signo del numerador, es decir:

- Si $2 - 2x^2 > 0$ la función será creciente. Por tanto, será creciente siempre que $x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$.
- Si $2 - 2x^2 < 0$ la función será decreciente. Por tanto, será decreciente $x \notin (-1, 1)$.

Por otro lado, los candidatos a extremos relativos se encuentran en aquellos puntos que verifican $f'(x) = 0$. Por tanto:

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

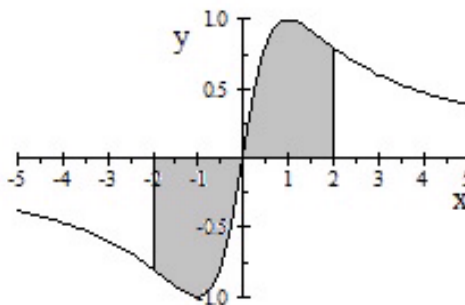
Gráficamente, tenemos:



- (c) [1.0 punto] Determine el área de la región encerrada entre el eje de abscisas ($y = 0$), la función $f(x)$ y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

SOLUCIÓN:

Como en este caso la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ es impar (es decir, $f(-x) = -f(x)$),



tendremos que:

$$\int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^2 \left| \frac{2x}{x^2+1} \right| dx = 2 * \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

Por tanto, el área solicitada será:

$$\text{Área} = 2 * \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = 2 * [\ln |x^2+1|]_{x=0}^{x=2} = 2 * \ln(5)$$

Cuestión 5 [2.5 puntos] Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

- (a) **[1.0 puntos]** Determinar la posición relativa de ambas rectas.

SOLUCIÓN:

A partir de las expresiones anteriores, tenemos que:

- La recta r tiene como un vector de dirección $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ y pasa por el punto $A(1, 2, 1)$.
- La recta s tiene como un vector de dirección $\vec{v}_s = (-2, -1, 2)$ y pasa por el punto $B(3, 3, -1)$.

A partir de estos valores tenemos que el vector $\overrightarrow{AB}$ viene dado por: $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -2)$

Si calculamos el determinante, observamos que dichos vectores no son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{vmatrix} = 0$$

y como existe un menor con determinante no nulo $\left(\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} = 1 \right)$, el rango será 2 y por tanto, ambas rectas se cortarán en un punto.

- (b) **[1.5 puntos]** En caso de que se corten, obtener el punto de corte entre ambas rectas. En caso contrario determinar la distancia entre ambas rectas.

SOLUCIÓN:

Como sabemos que se cortan, para obtener el punto de corte P , resolvemos el sistema de ecuaciones que obtenemos al expresar ambas rectas en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda + 1 = -2\mu + 3 \\ y = \lambda + 2 = -\mu + 3 \\ z = 2\lambda + 1 = 2\mu - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\lambda + 3\mu = 3 \\ 3\lambda - \mu = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right\}$$

Por tanto, el punto de corte se encuentra en $P = (0 + 1, 0 + 2, 2 * 0 + 1) = (1, 2, 1)$

Cuestión 6 [2.5 puntos] Consideremos los planos $\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0$ y $\pi' : 2x - 2y + 4z - 3 = 0$. Se pide:

- (a) **[1.5 puntos]** Determinar el ángulo entre ambos planos

SOLUCIÓN:

En primer lugar sabemos que los vectores normales a ambos planos vienen dados por:

- $\vec{v}_\pi = (3, -1, 2)$
- $\vec{v}_{\pi'} = (2, -2, 4)$

A partir de esta información, si denotamos por α al ángulo entre ambos planos, sabemos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{\pi'}}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_{\pi'}|}$$

En nuestro caso:

- $|\vec{v}_\pi| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$
- $|\vec{v}_{\pi'}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24}$
- $\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{\pi'} = (3, -1, 2) \cdot (2, -2, 4) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 16$

Luego:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{\pi'}}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_{\pi'}|} = \frac{16}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{4\sqrt{21}}{21}\right)\end{aligned}$$

- (b) **[1.0 puntos]** Determinar la distancia del punto $A = (2, 3, 1)$ al plano π .

SOLUCIÓN:

La distancia pedida viene dada por:

$$d(A, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \frac{3}{7}\sqrt{14}$$

Cuestión 7 [2.5 puntos] La Concejalía de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en una capital sobre el uso del casco por parte de usuarios de bicicletas y patinetes. El estudio concluye que el 70 % de los usuarios de estos sistemas de movilidad son hombres y, de estos, el 60 % usa casco, mientras que, entre las mujeres, solo el 40 % de ellas usan casco. A partir de esta información, se pide:

- (a) **[0.75 puntos]** Calcular la probabilidad de que un usuario de estos sistemas de movilidad, elegido al azar, use casco.

SOLUCIÓN:

Definamos los sucesos:

$$\begin{aligned}H &= \text{"El usuario es un hombre"} \\ M &= \text{"El usuario es una mujer"} \\ C &= \text{"El usuario lleva casco"}\end{aligned}$$

A partir del enunciado, tenemos las siguientes probabilidades:

$$\Pr(H) = 0.7 \quad \Pr(M) = \Pr(H^c) = 0.3$$

$$\Pr(C/H) = 0.6 \quad \Pr(C^c/H) = 0.4$$

$$\Pr(C/M) = 0.5 \quad \Pr(C^c/M) = 0.5$$

Como nos piden $\Pr(C)$, aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$\Pr(C) = \Pr(C/H) \cdot \Pr(H) + \Pr(C/M) \cdot \Pr(M) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.57$$

- (b) [0.75 puntos] Si se detecta un usuario con casco, ¿cuál es la probabilidad de que dicho usuario sea un hombre?

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\begin{aligned}\Pr(H/C) &= \frac{\Pr(H \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C/H) * \Pr(H)}{\Pr(C/H) * \Pr(H) + \Pr(C/M) * \Pr(M)} \\ &= \frac{0.6 * 0.7}{0.6 * 0.7 + 0.5 * 0.3} = 0.737\end{aligned}$$

- (c) [1.0 punto] Determinar la probabilidad de detectar un usuario sin casco y que no sea hombre.

SOLUCIÓN:

En este caso nos piden:

$$\Pr(C^c \cap H^c)$$

Aplicando las leyes de Morgan,

$$(C^c \cap H^c) = (C \cup H)^c$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\Pr(C^c \cap H^c) &= \Pr((C \cup H)^c) = 1 - \Pr(C \cup H) = 1 - [\Pr(C) + \Pr(H) - \Pr(C \cap H)] = \\ &= 1 - [\Pr(C) + \Pr(H) - \Pr(C/H) * \Pr(H)] = \\ &= 1 - [0.57 + 0.7 - 0.6 * 0.7] = 0.15\end{aligned}$$

Cuestión 8 [2.5 puntos] Se sabe que el tiempo de espera en una determinada cola del supermercado se puede asumir que sigue una distribución normal. Por otro lado se sabe que en el 84.13% de las ocasiones se espera menos de 1.4 minutos, mientras que en el 50% de los casos el tiempo de espera es inferior a 1.2 minutos. A partir de esa información, se pide:

- (a) [1.0 puntos] Determinar la media y la desviación típica que caracteriza a la variable X ="tiempo de espera en la cola".

SOLUCIÓN:

- Como nos indican que $\Pr(X < 1.2) = 0.5$, al ser la distribución simétrica respecto a la media, de manera inmediata tenemos que $\mu = 1.2$ minutos.
- Por otro lado, nos indican que:

$$\begin{aligned}\Pr(X < 1.4) &= 0.8413 \Rightarrow \Pr\left(\frac{X - 1.2}{\sigma} < \frac{1.4 - 1.2}{\sigma}\right) = 0.8413 \Rightarrow \\ \Pr\left(Z < \frac{0.2}{\sigma}\right) &= 0.8413 \Rightarrow \Pr\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.894\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{0.2}{\sigma} = z_{0.8413} \text{ (tabla)} = 1 \Rightarrow \sigma = \frac{0.2}{1} = 0.2$$

- (b) [0.75 puntos] Asumamos que el tiempo de espera sigue un modelo $N(\mu = 1.2, \sigma = 0.2)$. Determinar la probabilidad de que el tiempo de espera sea superior a 1.3 minutos.

SOLUCIÓN:

En este caso tenemos $X \sim N(\mu = 1.2, \sigma = 0.2)$ y nos piden:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 1.3) &= (\text{tipificando}) \Pr\left(\frac{X - 1.2}{0.2} > \frac{1.3 - 1.2}{0.2}\right) = \\ \Pr(Z > 0.5) &= 1 - \Pr(Z \leq 0.5) = 1 - 0.691 = 0.309\end{aligned}$$

- (c) [0.75 puntos] Supongamos que en un momento determinado se encuentran 4 personas en la cola. Determinar la probabilidad de al menos 3 de ellos esperen más de 1.3 minutos.

SOLUCIÓN:

En este caso debemos definir la variable aleatoria Y = "Número de personas, entre las 4, que esperan más de 1.3 minutos". Sabemos que en este caso, como $\Pr(\text{esperar más de 1.3 minutos}) = 0.309$, se tiene que $Y \sim B(4, p = 0.309)$.

Nos piden:

$$\begin{aligned}\Pr(Y \geq 3) &= \Pr(Y = 3) + \Pr(Y = 4) = \\ &= \binom{4}{3} 0.309^3 (1 - 0.309) + \binom{4}{4} 0.309^4 = \\ &= 4 * 0.309^3 * (1 - 0.309) + 0.309^4 = 0.090\end{aligned}$$