

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 Cód 29- MATEMÁTICAS	Convocatoria 2024
---	--	---

SOLUCIONES

Cuestión 1 [2.5 puntos] Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

se pide:

- (a) **[1.5 puntos]** Estudiar el rango de la matriz para los diferentes valores del parámetro λ .

SOLUCIÓN:

En primer lugar calcularemos el determinante para determinar aquellos valores del parámetro que hacen que la matriz no tenga rango máximo. Así:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Por tanto, nos interesan aquellos valores que anulan dicho determinante, en estos casos el rango de la matriz A será menor que 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Luego:

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$, el rango de la matriz A será 3.
- Si $\lambda = 1$, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ la matriz A tendrá rango 2.

- Si $\lambda = 2$, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ la matriz A tendrá rango 2.

(b) [1.0 puntos] Calcular la inversa de la matriz A para $\lambda = -1$.

SOLUCIÓN:

En este caso ($\lambda = -1$) tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))'}{\det(A)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cuestión 2 [2.5 puntos] Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

(a) [1.5 puntos] Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calcularemos el determinante asociado a la matriz de los coeficientes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2.$$

Entonces, si $\det(A) \neq 0$ el sistema será compatible determinado (teorema de Rouché-Frobenius). Por tanto:

$$a^2 + a - 2 = 0, \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

• Luego si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es **compatible determinado**.

• Para $a = 1$, la matriz de los coeficientes A y la ampliada serán: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$.

Como se observa, la primera, tercera y cuarta columna coinciden. Por otro lado, el rango de la matriz A y el de la ampliada es 2 ya que tenemos una submatriz 2x2 con determinante no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Entonces, como el rango es 2 y es menor que el número de incógnitas, que es 3, el sistema será **compatible indeterminado (infinitas soluciones)**.

• Para $a = -2$, la matriz de los coeficientes A y la ampliada será: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$,

a partir de aquí, se observa que el rango de A es 2, pero el rango de la ampliada es 3 ya que hay un menor de orden 3 con determinante no nulo $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Por tanto en este caso el sistema será **incompatible**.

(b) [1.0 puntos] Resolverlo para $a = 1$.

SOLUCIÓN:

- Para $a = 1$ sabemos que el sistema tendrá infinitas soluciones ya que se anulaba el determinante de la matriz de los coeficientes. Para este caso, el sistema queda de la siguiente forma:

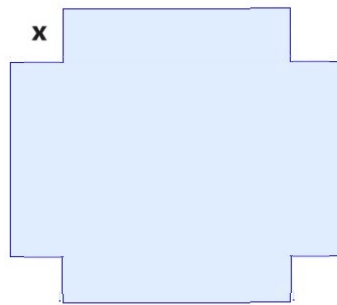
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Sistema que se puede resolver de manera sencilla, ya que si sumamos la segunda y tercera fila se obtiene 2 veces la primera. Así, eliminando la primera fila (es combinación lineal de las otras dos) obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{suma de ambas filas} \\ \text{diferencia de ambas filas} \end{array} \begin{cases} 2x + 2z = 2 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

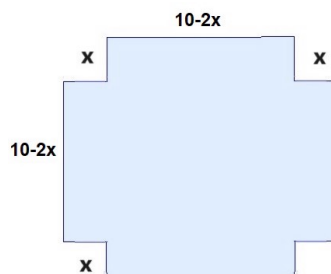
por tanto, las soluciones será de la forma: $(x = 1 - z, y = 0, z)$

Cuestión 3 [2.5 puntos] Para hacer una caja abierta por arriba, recortamos de una lámina de cartón cuadrada de $10u$. de lado, cuatro cuadrados, uno en cada uno de los vértices. Determinar el lado de cada cuadrado para que el volumen de la caja sea máximo.



SOLUCIÓN:

A partir del dibujo, sabemos que la caja tendrá una base cuadrada de lado $10 - 2x$ y altura x (con $x \in (0, 5)$).



Por tanto, el volumen será:

$$V(x) = x \cdot (10 - 2x)^2 = x(10 - 2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Con el fin de encontrar los extremos de dicha función, resolvemos:

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 80x + 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 4(12 \cdot 100)}}{2 \cdot 12} = \frac{80 \pm 40}{24} = \begin{cases} \frac{80+40}{24} = 5 \\ \frac{80-40}{24} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Por otro lado, como $x \in (0, 5)$ solo debemos comprobar que en $x = \frac{5}{3}$ se alcanza un máximo, bien estudiando la monotonía de $V'(x)$ o bien analizando $V''(x)$ en $x = \frac{5}{3}$. Como $V'(x) = 24x - 80$, $V'(5/3) < 0$ y por tanto en $x = \frac{5}{3}$ se alcanzará un máximo.

Cuestión 4 [2.5 puntos] Calcular el área de la región del plano encerrada entre las representaciones gráficas de las funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad g(x) = x - 2$$

(a) **SOLUCIÓN:**

En primer lugar, calcularemos el punto de corte de ambas funciones. Así:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0$$

cuyas soluciones son:

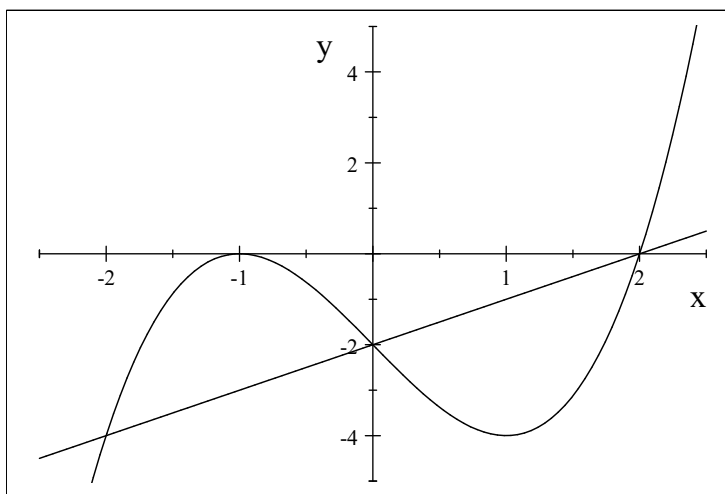
$$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2$$

Por tanto existen 3 puntos de corte entre ambas funciones. Luego, como $f(x) - g(x) = x^3 - 4x$, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^0 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \\ &= \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} \right]_{x=-2}^{x=0} + \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=2} = \left[0 - \left(\frac{16}{4} - 4\frac{4}{2} \right) \right] + \left[\left(4\frac{4}{2} - \frac{16}{4} \right) - 0 \right]_{x=0}^{x=2} = \\ &= 4 + 4 = 8u^2 \end{aligned}$$

Gráficamente:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x - 2 \\ g(x) = x - 2 \end{cases}$$



Cuestión 5 [2.5 puntos] Dadas las rectas:

$$r: x + 1 = y - a = -z \quad s: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

se pide:

- (a) **[1.5 puntos]** Determinar el valor de la constante a para que ambas rectas se corten, y determinar dicho punto de corte.

SOLUCIÓN:

A partir de las expresiones anteriores, en primer lugar calcularemos la solución del sistema de ecuaciones formado por ambas rectas. Así, a partir de la ecuación de la recta s sustituyendo en la recta r se tiene:

$$s: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r: x + 1 = y - a = -z \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ 5 + 2\lambda + 1 = -3 - a \\ 5 + 2\lambda + 1 = -2 + \lambda \Rightarrow \lambda = -8 \end{cases} \Rightarrow a = -3 - (6 + 2(-8)) = 7$$

Luego, sustituyendo en la recta s , el punto de corte de ambas rectas será: $(-11, -3, 10)$

- (b) **[1.0 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(8, -7, 2)$ y contiene a la recta s .

SOLUCIÓN:

El plano que contiene a la recta s tendrá como uno de sus vectores directores, al vector director de la recta s y el otro vector lo podemos obtener tomando un punto cualquiera de la recta s (P_s) y calculando el vector que lo une con el punto P . Por tanto:

$$s: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s = (5, -3, 2) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_s P} = (8, -7, 2) - (5, -3, 2) = (3, -4, 0)$$

Luego el plano solicitado vendrá dado por:

$$\begin{vmatrix} x - 8 & y + 7 & z - 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 27 - 3y - 8z - 4x = 0$$

Cuestión 6 [2.5 puntos] Consideremos los planos:

$$\begin{aligned} \pi &: 3x - 2y + z + 5 = 0 \\ \pi' &: y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z - \frac{21}{4} \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) **[1.0 puntos]** Determinar un vector perpendicular al plano π y un punto del mismo.

SOLUCIÓN:

En primer lugar sabemos que los vectores normales (perpendicular) a un plano viene dado por los coeficientes de la ecuación, por tanto, un vector perpendicular al plano π será:

$$\vec{v}_\pi = (3, -2, 1)$$

Por otro lado, cualquier punto que verifique la ecuación pertenecerá al plano π , por ejemplo $(0, 0, -5)$:

- (b) [1.5 puntos] Determinar la posición relativa de ambos planos, así como la distancia entre ellos.

SOLUCIÓN:

Si calculamos un vector perpendicular al plano π' observamos que:

$$\pi' : y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z - \frac{21}{4} \Rightarrow \pi' : \frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z - \frac{21}{4} = 0$$

$$\vec{v}_{\pi'} = (3/2, -1, 1/2) \Rightarrow \vec{v}_{\pi'} = 2 \cdot \vec{v}_{\pi}$$

Luego ambos planos son paralelos.

Por otro lado, para calcular la distancia, es suficiente tomar un punto de uno de los planos y calcular la distancia de ese punto al otro plano. Por ejemplo, tomando el punto $(0, 0, -5)$ del plano π , la distancia de dicho punto al plano π' vendrá dada por:

$$d(A, \pi') = \frac{|\frac{3}{2} \cdot 0 - 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-5) - \frac{21}{4}|}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-1)^2 + (\frac{1}{2})^2}} = \frac{\frac{31}{4}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{31\sqrt{14}}{28}$$

Cuestión 7 [2.5 puntos] Una determinada empresa farmacéutica está interesada en desarrollar un test que permita determinar si un individuo ha consumido una determinada sustancia. En las pruebas de laboratorio, en el 98% de los casos, el test clasifica como consumidor de dicha sustancia a aquellos que realmente la han consumido y también, en el 60% de los casos, el test clasifica como no usuarios a aquellos que no la han consumido. Además, se sabe que 15 de cada 100 personas a las que se les va a pasar el test son consumidores de dicha sustancia. A partir de esta información, se pide:

- (a) [1.5 puntos] Calcular la probabilidad de que se obtenga un resultado positivo, independientemente de si es consumidor o no.

SOLUCIÓN:

Definamos los sucesos:

A = "El test da positivo"

C = "El usuario es consumidor"

A partir del enunciado, tenemos las siguientes probabilidades:

$$\Pr(C) = 0.15 \quad \Pr(C^c) = 0.85$$

$$\Pr(A/C) = 0.98 \quad \Pr(A^c/C) = 0.02$$

$$\Pr(A/C^c) = 0.6 \quad \Pr(A^c/C^c) = 0.4$$

Como nos piden $\Pr(C)$, aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$\Pr(A) = \Pr(A/C) \cdot \Pr(C) + \Pr(A/C^c) \cdot \Pr(C^c) = 0.98 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.85 = 0.572$$

- (b) [1.0 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona realmente consuma la sustancia si ha dado positivo en el test?

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\begin{aligned} \Pr(C/A) &= \frac{\Pr(C \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A/C) \cdot \Pr(C)}{\Pr(A/C) \cdot \Pr(C) + \Pr(A/C^c) \cdot \Pr(C^c)} \\ &= \frac{0.98 \cdot 0.15}{0.98 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.85} = 0.257 \end{aligned}$$

Cuestión 8 [2.5 puntos] Un estudiante ha comprobado que el tiempo, en minutos, que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5. A partir de esta información, se pide:

- (a) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

SOLUCIÓN:

Definamos la variable:

$$X = \text{"Tiempo (minutos) que tarda en llegar a la universidad"}$$

Nos indican que X sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos, esto es: $X \sim N(30, \sigma = 5)$.

Así:

$$\Pr(X \leq 40) \xrightarrow{\text{Tipificando}} \Pr(Z \leq \frac{40 - 30}{5}) = \Pr(Z \leq 2) = 0.9772$$

- (b) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

SOLUCIÓN:

En este caso tenemos $X \sim N(\mu = 30, \sigma = 5)$ y nos piden:

$$\begin{aligned} \Pr(X \in (20, 40)) &= \Pr(X \leq 40) - \Pr(X \leq 20) \xrightarrow{\text{Tipificando}} \Pr(Z \leq \frac{40 - 30}{5}) - \Pr(Z \leq \frac{20 - 30}{5}) \\ &= \Pr(Z \leq 2) - \Pr(Z \leq -2) = \Pr(Z \leq 2) - (\Pr(Z > 2)) = \Pr(Z \leq 2) - (1 - \Pr(Z \leq 2)) = \\ &= 2 \cdot \Pr(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544 \end{aligned}$$

- (c) **[1.0 puntos]** Calcular la probabilidad de que en una semana (5 días) solo un día tarde entre 29 y 40 minutos en llegar a la universidad.

SOLUCIÓN:

En este caso debemos definir la variable aleatoria $Y = \text{"Número de días en el que tarda entre 20 y 40 minutos"}$. Sabemos que en este caso, como $\Pr(X \in (20, 40)) = 0.9544$, se tiene que $Y \sim B(4, p = 0.9544)$.

Nos piden:

$$\begin{aligned} \Pr(Y = 1) &= \binom{5}{1} 0.9544^5 (1 - 0.9544) = \\ &= 5 \cdot 0.9544^5 (1 - 0.9544) = 0.181 \end{aligned}$$