



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PARA MAYORES DE 25 AÑOS Y DE 45 AÑOS
2025
185-MATEMÁTICAS II

IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden en que se hayan respondido. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{cases}$$

- a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema es compatible determinado.
 b) [1,25 p.] Determine para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado y para qué valores de a el sistema es incompatible.
 c) [0,5 p.] Resuélvalo para $a = 0$.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz $A + B$ es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.
 b) [1,5 p.] Resuelva la ecuación matricial $AX + BX = B^2$.

3: [2,5 p.] Considere un rectángulo de lados x e y cuya diagonal mide $6\sqrt{2}$ centímetros.

- a) [0,5 p.] Demuestre que su perímetro viene dado por la expresión

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

- b) [2 p.] Calcule las dimensiones que debe tener dicho rectángulo para que su perímetro sea lo mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicho perímetro máximo?

4: [2,5 p.] Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

- a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$.
 b) [1 p.] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 1$.

5: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{2} \quad \text{y} \quad \pi: 2x + 3y + 5z - 4 = 0.$$

- a) [1 p.] Estudie su posición relativa.
 b) [1,5 p.] Encuentre la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

6: Considere el punto $P(5, -1, 6)$ y la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

- a) **[1 p.]** Calcule la ecuación del plano, π , que pasa por P y es perpendicular a r .
- b) **[1 p.]** Calcule la proyección ortogonal, P^t , de P en r .
- c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia de P a r .

7: Un examen tipo test consta de diez preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta.

- a) **[0,25 p.]** Si nos preguntamos por el número de preguntas contestadas correctamente por alguien que contesta al azar, ¿de qué tipo será la distribución de probabilidad? Calcule su media y su desviación típica.
- b) **[0,75 p.]** Diga cuál es la probabilidad de que conteste correctamente cuatro preguntas.
- c) **[0,75 p.]** Diga cuál es la probabilidad de que conteste bien al menos tres preguntas.
- d) **[0,75 p.]** Calcule, sin usar la tabla, la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta. (Utilice ocho decimales).

8: Se sabe que en un pueblo el 50% de la población tiene coche, el 35% tiene moto y el 22% tiene coche y moto. Se elige a una persona al azar. Halle la probabilidad de que:

- a) **[0,25 p.]** Tenga coche o moto.
- b) **[0,25 p.]** No tenga ni coche ni moto.
- c) **[0,5 p.]** Sabiendo que tiene coche, que tenga moto.
- d) **[0,75 p.]** Sabiendo que tiene moto, que no tenga coche.
- e) **[0,75 p.]** Que tenga solo uno de los dos.

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{cases}$$

- a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema es compatible determinado.
 b) **[1,25 p.]** Determine para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado y para qué valores de a el sistema es incompatible.
 c) **[0,5 p.]** Resuélvalo para $a = 0$.

Discutimos el sistema y después respondemos a lo planteado en cada apartado.

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix} = 40 + \cancel{24a} + 8a^2 - 32 - 10a^2 - \cancel{24a} = -2a^2 + 8.$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 8 = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \\ 2 \quad -2 \quad 4 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 10 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad -4 \quad 10 \quad -2 \\ -4 \quad 4 \quad -8 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 5 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 0 & 10 & -30 \\ 0 & 0 & -10 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & \overbrace{A/B} & \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \\ \underbrace{}_A & & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son diferentes.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a & & & \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 4 & 4 & 10 & 2 \\ -4 & -4 & -8 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & \overbrace{A/B} & \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{}_A & & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2. Los rangos son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

- a) El sistema es compatible determinado para cualquier valor de a distinto de -2 y 2 .
- b) El sistema es compatible indeterminado para $a = 2$. El sistema sea incompatible para $a = -2$.
- c) Lo resolvemos para $a = 0$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1).

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2 \\ 2y + 6z = 0 \\ 4x + 10z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y + 3z = 0 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 0 \\ 2 - 4z + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 0 \\ \boxed{z = -2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6} \\ \boxed{x = 1 - 2(-2) = 5} \end{cases}$$

La solución del sistema para $a = 0$ es $x = 5$, $y = 6$, $z = -2$.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [1 p.] Compruebe que la matriz $A + B$ es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.

b) [1,5 p.] Resuelva la ecuación matricial $AX + BX = B^2$.

a) Calculamos el determinante de la matriz $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz $A + B$ es distinto de cero la matriz tiene inversa.

Calculamos la expresión de la matriz $(A + B)^{-1}$.

$$(A + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + B)^t)}{|A + B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + BX = B^2 \Rightarrow (A + B)X = B^2 \Rightarrow X = (A + B)^{-1} B^2$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -2+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

$$X = (A + B)^{-1} B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

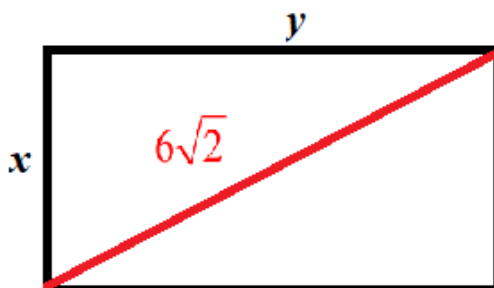
La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3: [2,5 p.] Considere un rectángulo de lados x e y cuya diagonal mide $6\sqrt{2}$ centímetros.

a) **[0,5 p.]** Demuestre que su perímetro viene dado por la expresión

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

b) **[2 p.]** Calcule las dimensiones que debe tener dicho rectángulo para que su perímetro sea lo mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicho perímetro máximo?



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de lados “ x ” e “ y ” $\rightarrow x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2$.

Al perímetro del rectángulo lo llamamos $f(x, y)$ y tiene la expresión $2x + 2y$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = 2x + 2y \\ x^2 + y^2 = 36 \cdot 2 = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x, y) = 2x + 2y \\ y^2 = 72 - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x, y) = 2x + 2y \\ y = \sqrt{72 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}}$$

Esta función solo tiene sentido con valores de x mayores que 0 y menores que $6\sqrt{2}$. El dominio de la función es $(0, 6\sqrt{2})$.

b) La función que deseamos maximizar es $f(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$.

Determinamos sus puntos críticos usando la función derivada.

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2} \rightarrow f'(x) = 2 + 2 \frac{-2x}{2\sqrt{72 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} \Rightarrow 2\sqrt{72 - x^2} = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{72 - x^2} = x \Rightarrow 72 - x^2 = x^2 \Rightarrow 72 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{36} = \pm 6}$$

No consideramos el valor negativo pues una longitud no tiene sentido con valores negativos. Estudiamos la evolución de la derivada antes y después de 6.

- En el intervalo $(0, 6)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 2 - \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{72 - 1^2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{71}} \approx 1.76 > 0. \text{ La función crece en } (0, 6).$$

- En el intervalo $(6, 6\sqrt{2})$ consideramos $x = 7$ y la derivada vale

$$f'(7) = 2 - \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{72 - 7^2}} = 2 - \frac{14}{\sqrt{23}} \approx -0.92 < 0. \text{ La función decrece en } (6, 6\sqrt{2}).$$

Como la función crece antes y decrece después para $x = 6$ la función tiene un máximo relativo.

Para dicho valor tenemos que $y = \sqrt{72 - 6^2} = \sqrt{36} = 6$.

El perímetro máximo se consigue con un cuadrado de lado 6 centímetros.

El perímetro máximo tiene un valor de $4 \cdot 6 = 24$ centímetros.

4: 2,5 p.] Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$.

b) **[1 p.]** Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=1$.

a) Calculamos la integral indefinida pedida usando el método de integración por partes.

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = \boxed{(x^2 - 2x + 2)e^x + K}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

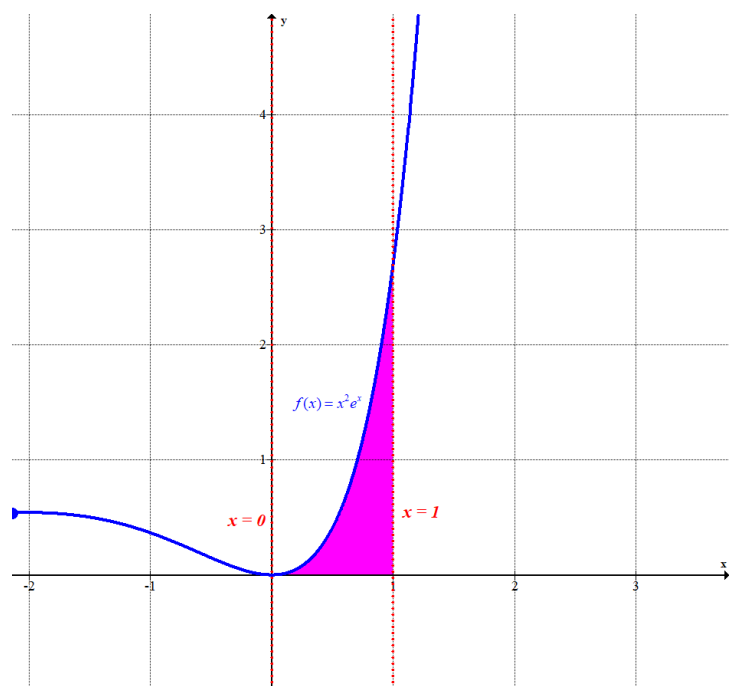
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \cdot e^x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 \cdot e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=1$ es el valor de la integral definida entre 0 y 1 de la función (es positiva).

$$\text{Área} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[(x^2 - 2x + 2)e^x \right]_0^1 =$$

$$= (1^2 - 2 \cdot 1 + 2)e^1 - (0^2 - 2 \cdot 0 + 2)e^0 = \boxed{e - 2 \approx 0.72 \text{ u}^2}$$

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=1$ tiene un valor aproximado de $e - 2 \approx 0.72$ unidades cuadradas.



5: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{2} \quad \text{y} \quad \pi: 2x+3y+5z-4=0.$$

a) [1 p.] Estudie su posición relativa.

b) [1,5 p.] Encuentre la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -4, 2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Estudiamos si plano y recta se cortan.

$$\pi: 2x+3y+5z-4=0 \quad \left. \begin{matrix} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2\lambda + 3(-3 - 4\lambda) + 5(1 + 2\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda - 9 - 12\lambda + 5 + 10\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \text{¡¡-8 = 0!!}$$

Obtenemos una igualdad imposible al intentar resolver el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano. No existe punto de corte de recta y plano, por lo que la recta es paralela al plano.

b) El plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano. Además, contiene el punto $P_r(0, -3, 1)$ de la recta r .

$$\pi: 2x+3y+5z-4=0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 5)$$

$$\left. \begin{matrix} P_r(0, -3, 1) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, -4, 2) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, 3, 5) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y+3 & z-1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -20x + 4(y+3) + 3(z-1) + 8(z-1) - 5(y+3) - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -20x + 4y + 12 + 3z - 3 + 8z - 8 - 5y - 15 - 6x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -26x - y + 11z - 14 = 0}$$

El plano que contiene a r y es perpendicular a π tiene ecuación $\pi': -26x - y + 11z - 14 = 0$.

6: Considere el punto $P(5, -1, 6)$ y la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

- a) [1 p.] Calcule la ecuación del plano, π , que pasa por P y es perpendicular a r .
 b) [1 p.] Calcule la proyección ortogonal, P^t , de P en r .
 c) [0,5 p.] Calcule la distancia de P a r .

a) Si el plano es perpendicular a la recta tendrá como vector normal el vector director de la recta.

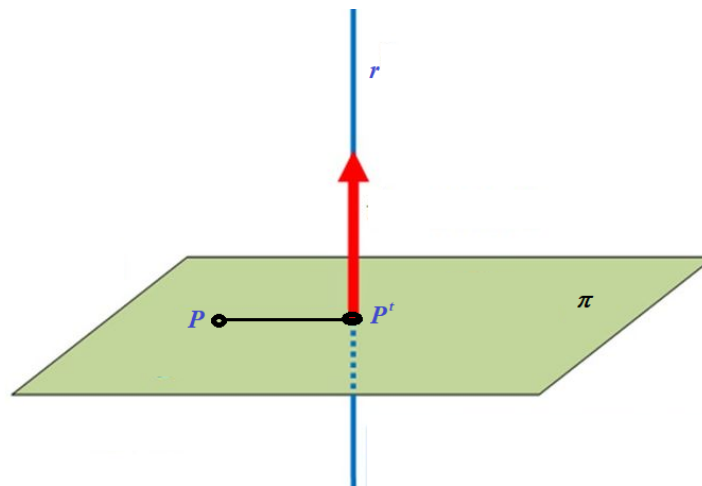
$$r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(5, -1, 6) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (-2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(5, -1, 6) \in \pi \\ \pi: -2x - y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 5 - (-1) + 6 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 + 1 + 6 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = 3} \Rightarrow \boxed{\pi: -2x - y + z + 3 = 0}$$

El plano que pasa por P y es perpendicular a r tiene ecuación $\pi: -2x - y + z + 3 = 0$.

- b) Para hallar la proyección ortogonal de P sobre la recta r determinamos el plano perpendicular a r que pase por P. Lo hemos hallado en el apartado anterior y tiene ecuación $\pi: -2x - y + z + 3 = 0$. Hallamos el punto P^t intersección del plano y la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x - y + z + 3 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2(1 - 2\lambda) - (-\lambda) + 5 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4\lambda + \lambda + 5 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2(-1) = 3 \\ y = -(-1) = 1 \\ z = 5 - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P^t(3,1,4)}$$

La proyección ortogonal, P^t , de P en r tiene coordenadas $P^t(3,1,4)$.

c) La distancia de P a la recta r es el módulo del vector que une los puntos P y P^t .

$$\overrightarrow{PP^t} = (3,1,4) - (5,-1,6) = (-2,2,-2)$$

$$d(P,r) = d(P,P^t) = |\overrightarrow{PP^t}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{12} \simeq 3.46 \text{ unidades}}$$

La distancia de P a la recta r vale $\sqrt{12} \simeq 3.46$ unidades de distancia.

- 7:** Un examen tipo test consta de diez preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta.
- a) **[0,25 p.]** Si nos preguntamos por el número de preguntas contestadas correctamente por alguien que contesta al azar, ¿de qué tipo será la distribución de probabilidad? Calcule su media y su desviación típica.
- b) **[0,75 p.]** Diga cuál es la probabilidad de que conteste correctamente cuatro preguntas.
- c) **[0,75 p.]** Diga cuál es la probabilidad de que conteste bien al menos tres preguntas.
- d) **[0,75 p.]** Calcule, sin usar la tabla, la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta. (Utilice ocho decimales).

- a) Llamamos $X =$ “número de preguntas contestadas correctamente por alguien que contesta al azar un test de 10 preguntas con 4 respuestas”.

Como la probabilidad de acertar una pregunta respondiendo al azar es $p = \frac{1}{4} = 0.25$ y las respuestas de cada pregunta son independientes entre si tenemos que la variable aleatoria X es una binomial con $n = 10$ y $p = 0.25$. $X = B(10, 0.25)$.

La media de la distribución es $n \cdot p = 10 \cdot 0.25 = 2.5$ respuestas correctas. La desviación típica es

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{\sqrt{30}}{4} \approx 1.37 \text{ respuestas correctas.}$$

- b) Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.25^4 \cdot 0.75^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0.25^4 \cdot 0.75^6 \approx \boxed{0.146}$$

- c) Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.25^0 \cdot 0.75^{10} + \binom{10}{1} 0.25^1 \cdot 0.75^9 + \binom{10}{2} 0.25^2 \cdot 0.75^8 \right] = \\ &= 1 - \left[0.75^{10} + 10 \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^9 + \frac{10 \cdot 9}{2} 0.25^2 \cdot 0.75^8 \right] \approx \boxed{0.474} \end{aligned}$$

- d) Nos piden calcular la probabilidad de que conteste bien menos de 10 preguntas. Nos piden calcular $P(X \leq 9)$.

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} 0.25^{10} \cdot 0.75^0 = 1 - 0.25^{10} \approx \boxed{0.99999905}$$

8: Se sabe que en un pueblo el 50% de la población tiene coche, el 35% tiene moto y el 22% tiene coche y moto. Se elige a una persona al azar. Halle la probabilidad de que:

- [0,25 p.]** Tenga coche o moto.
- [0,25 p.]** No tenga ni coche ni moto.
- [0,5 p.]** Sabiendo que tiene coche, que tenga moto.
- [0,75 p.]** Sabiendo que tiene moto, que no tenga coche.
- [0,75 p.]** Que tenga solo uno de los dos.

Elaboramos una tabla de contingencia.

	Tiene moto	No tiene moto	
Tienen coche	22		50
No tienen coche			
	35		100

Completamos la tabla.

	Tiene moto	No tiene moto	
Tienen coche	22	28	50
No tienen coche	13	37	50
	35	65	100

- Hay un 37 % de la población que no tiene moto ni coche, por lo que el $100 - 37 = 63$ % tienen moto o coche. La probabilidad de que al elegir una persona al azar tenga coche o moto es de 0.63.
- Hay un 37 % de la población que no tiene moto ni coche, por lo que la probabilidad de que al elegir una persona al azar no tenga coche ni moto es de 0.37.
- Hay un 50 % de la población que tiene coche y de estos el 22% tiene moto. La probabilidad de que al elegir una persona que tenga coche al azar tenga también moto es de $\frac{22}{50} = 0.44$.
- Hay un 35 % de la población que tiene moto y de estos el 13 % no tiene coche. La probabilidad de que al elegir una persona al azar que tiene moto no tenga coche es de $\frac{13}{35} \approx 0.3714$.
- Hay un 28 % de la población que tiene coche, pero no moto y un 13 % que tiene moto, pero no coche. La probabilidad de que al elegir una persona al azar tenga solo uno de los dos es de $\frac{28+13}{100} = 0.41$.