

Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25 años

Curso: 2024-2025

Asignatura: MATEMÁTICAS II

**Responde a dos opciones de las cuatro que se presentan: A, B, C y D.**

(Examen sobre 20 puntos)

OPCIÓN A**A1)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ ax + 2y + (a - 4)z = 2 \\ -ax - 2y + z = a - 2 \end{cases}$$

(5 puntos)

A2) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(5 puntos)

$$(i) \int \frac{x+1}{x^2-4} dx \qquad (ii) \int (x \sin(x) + 3) dx$$

OPCIÓN B**B1)** Encuentra la ecuación del plano Π paralelo al plano $\Pi' \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0$ que dista 3 unidades del punto $P(4, 3, -2)$

(5 puntos)

B2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$(i) f(x) = (x^2 + 1) \arctg(x) \qquad (ii) g(x) = \sin(x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$$

(5 puntos)

OPCIÓN C

C1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula $(A \cdot B)^{-1}$. Calcula las dimensiones de $B \cdot A$.

(5 puntos)

C2) Calcula los siguientes límites:

(5 puntos)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x) - x}{x^3 + 4x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x} \right)^{x+5}$$

OPCIÓN D

D1) Los puntos $A(1, 0, -2)$, $B(3, 2, -1)$ y $C(0, 2, -4)$ son tres vértices de un cuadrado. Encuentra el cuarto vértice.

(5 puntos)

D2) Calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la siguiente curva:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

(5 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ ax + 2y + (a-4)z = 2 \\ -ax - 2y + z = a-2 \end{cases} \quad (5 \text{ puntos})$$

Este sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 2 & a-4 \\ -a & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & a-4 & 2 \\ -a & -2 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para triangular el sistema y estudiar con más comodidad su compatibilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & a-4 & 2 \\ -a & -2 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ a \quad 2 \quad a-4 \quad 2 \\ -a \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad a-3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -a \quad -2 \quad 1 \quad a-2 \\ a \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad a-1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad a-1 \\ 0 \quad 1 \quad a-3 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a-3 \quad a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & a \end{pmatrix}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 3$ y $a \neq 0$

En este caso el sistema tiene una única solución. La obtenemos, a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + y - z = 1 \\ y + (a-3)z = 1 \\ (a-3)z = a \end{cases} \Rightarrow \{a-3 \neq 0\} \Rightarrow y + (a-3)z = 1 \Rightarrow \boxed{z = \frac{a}{a-3}} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax + y - 0 = 1 \\ y + (a-3)\frac{a}{a-3} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ y + a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ \boxed{y = 1 - a} \end{array} \right\} \Rightarrow ax + 1 - a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax = a \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{a} = 1}$$

Para $a \neq 3$ y $a \neq 0$ la solución del sistema es $x = 1$, $y = 1 - a$, $z = \frac{a}{a-3}$.

CASO 2. $a = 3$

La matriz ampliada queda $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. El sistema asociado es:

$$\left. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ y = 1 \\ \mathbf{0 = 3} \end{array} \right\}$$

Queda una igualdad imposible. Para $a = 3$ el sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 0$

La matriz ampliada queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. La columna primera es nula y la columna segunda y

la cuarta son iguales, por lo que el rango de la matriz ampliada y la matriz de coeficientes es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema asociado es compatible indeterminado. Determinamos la expresión de sus infinitas soluciones-

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y - z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ -3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ \boxed{z = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ \boxed{y = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}}$$

Para $a = 0$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$.

A2) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(5 puntos)

$$(i) \int \frac{x+1}{x^2-4} dx \qquad (ii) \int (x \sin(x) + 3) dx$$

Calculamos la primera integral utilizando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+1}{x^2-4} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2-4} &= \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow x+1 &= A(x+2)+B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 3=4A \rightarrow A=\frac{3}{4} \\ x=-2 \rightarrow -1=B(-4) \rightarrow B=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-4} &= \frac{3/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2} \end{aligned}$$

$$\dots = \int \frac{3/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2} dx = \int \frac{3/4}{x-2} dx + \int \frac{1/4}{x+2} dx = \boxed{\frac{3}{4} \ln(x-2) + \frac{1}{4} \ln(x+2) + K}$$

Calculamos la segunda integral utilizando el método de integración por partes.

$$\int (x \sin(x) + 3) dx = \int x \sin(x) dx + \int 3 dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int 3 dx &= 3x \\ \int x \sin(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = \int \sin(x) dx = -\cos(x) \end{array} \right\} = \\ &= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \text{sen}(x) \end{aligned}$$

$$\dots = \boxed{-x \cos(x) + \text{sen}(x) + 3x + K}$$

OPCIÓN B

B1) Encuentra la ecuación del plano Π paralelo al plano $\Pi' \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0$ que dista 3 unidades del punto $P(4, 3, -2)$ (5 puntos)

El plano Π paralelo al plano $\Pi' \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0$ tiene ecuación $\Pi \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

Determinamos el valor de D usando que el plano Π dista 3 unidades del punto $P(4, 3, -2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi \equiv 2x + y - 2z + D = 0 \\ P(4, 3, -2) \\ d(\Pi, P) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2 \cdot 4 + 3 - 2(-2) + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|8 + 3 + 4 + D|}{3} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|15 + D|}{3} = 3 \Rightarrow |15 + D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 15 + D = 9 \rightarrow D = -6 \rightarrow \boxed{\Pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 6 = 0} \\ 15 + D = -9 \rightarrow D = -24 \rightarrow \boxed{\Pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 24 = 0} \end{cases}$$

Los dos planos que cumplen lo pedido son $\Pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 6 = 0$ y $\Pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 24 = 0$.

B2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x)$

(ii) $g(x) = \sin(x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$

(5 puntos)

(i) Calculamos la expresión de la primera derivada.

$$f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow f'(x) = 2x \operatorname{arctg}(x) + (x^2 + 1) \frac{1}{1+x^2} = 1 + 2x \operatorname{arctg}(x)$$

(ii) Calculamos la expresión de la segunda derivada.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x^2 + 2x) \cdot e^{-x} \Rightarrow g'(x) = [(2x + 2) \cos(x^2 + 2x)] \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot \sin(x^2 + 2x) = \\ &= e^{-x} [(2x + 2) \cos(x^2 + 2x) - \sin(x^2 + 2x)] \end{aligned}$$

OPCIÓN C

C1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula $(A \cdot B)^{-1}$. Calcula las dimensiones de $B \cdot A$.

(5 puntos)

Determinamos la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+3 & 0+2+3 \\ 2+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Comprobamos si esta matriz es invertible. Para ello obtenemos su determinante.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6 \neq 0$$

Al ser su determinante no nulo la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. La calculamos.

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 5/6 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos las dimensiones de la matriz $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2} \cdot 2 \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

La matriz $B \cdot A$ tiene 3 filas y 3 columnas, es una matriz cuadrada de orden 3.

C2) Calcula los siguientes límites:

(5 puntos)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x) - x}{x^3 + 4x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x} \right)^{x+5}$$

(i) Calculamos el primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x) - x}{x^3 + 4x} &= \frac{0^2 \cdot \cos(0) - 0}{0^3 + 4 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos(x) + x^2(-\sin(x)) - 1}{3x^2 + 4} = \frac{2 \cdot 0 \cdot \cos 0 - 0^2 \sin 0 - 1}{3 \cdot 0^2 + 4} = \boxed{\frac{-1}{4}} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x) - x}{x^3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} (x \cdot \cos(x) - 1)}{\cancel{x} (x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) - 1}{x^2 + 4} = \frac{0 \cdot \cos(0) - 1}{0^2 + 4} = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

(ii) Calculamos el segundo límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x} \right)^{x+5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{4}{x} \right)^{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4}{x} \right)^{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{-4}} \right)^{x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{-4}} \right)^{(x+5) \cdot \frac{-4}{x} \cdot \frac{x}{-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{-4}} \right)^{\frac{x}{-4}} \right]^{(x+5) \cdot \frac{-4}{x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) \cdot \frac{-4}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x-20}{x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -4 - \frac{20}{x}} = e^{-4 - \frac{20}{+\infty}} = \boxed{e^{-4}} \end{aligned}$$

OPCIÓN D

DI) Los puntos $A(1, 0, -2)$, $B(3, 2, -1)$ y $C(0, 2, -4)$ son tres vértices de un cuadrado. Encuentra el cuarto vértice. (5 puntos)

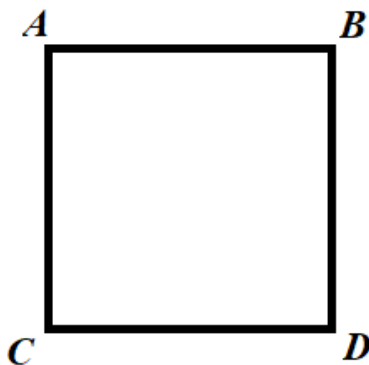
No sabemos en que orden están dispuestos los tres vértices A, B y C.

Determinamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Comprobamos si son paralelos o perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, -2) \\ B(3, 2, -1) \\ C(0, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 2, -1) - (1, 0, -2) = (2, 2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 2, -4) - (1, 0, -2) = (-1, 2, -2) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2, 2, 1)(-1, 2, -2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

Como el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es nulo los vectores son perpendiculares y el cuadrado a considerar es ABDC.



Para determinar las coordenadas del vértice D aplicamos que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ deben ser iguales.

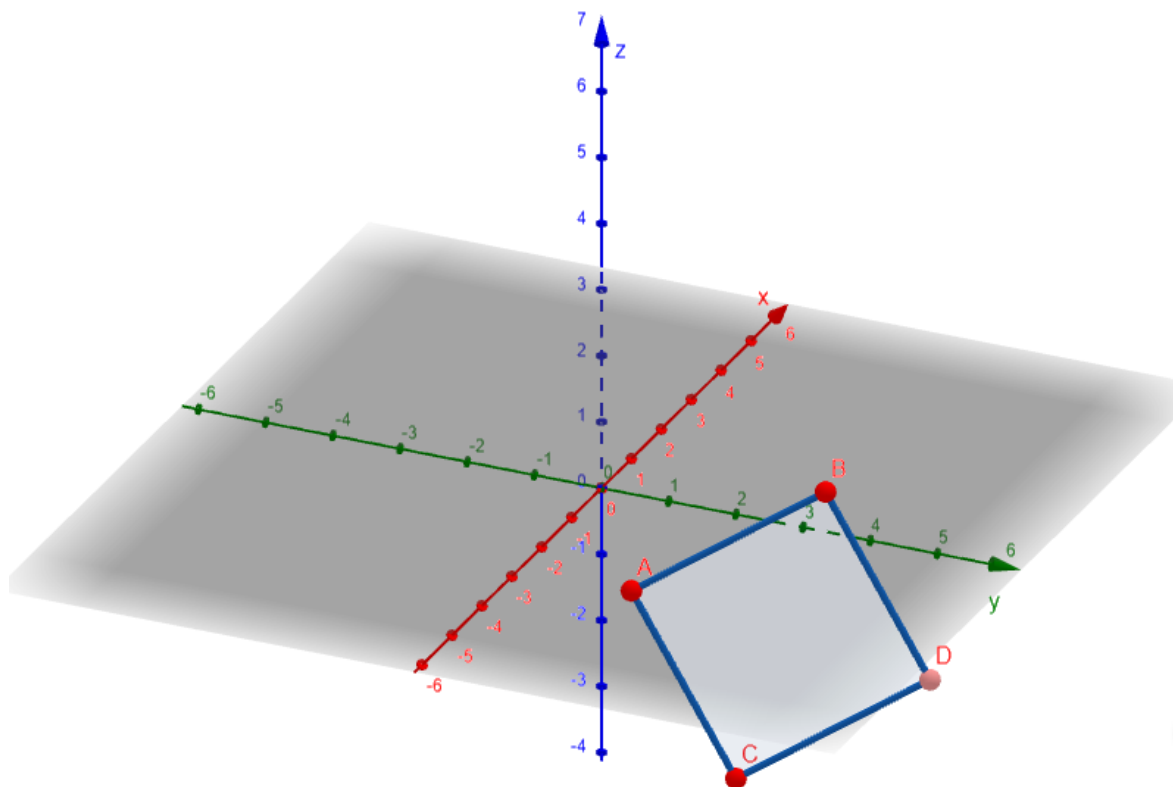
$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, -2) \\ B(3, 2, -1) \\ C(0, 2, -4) \\ D(a, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 2, -1) - (1, 0, -2) = (2, 2, 1) \\ \overrightarrow{CD} = (a, b, c) - (0, 2, -4) = (a, b-2, c+4) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b-2, c+4) = (2, 2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b - 2 = 2 \rightarrow b = 4 \\ c + 4 = 1 \rightarrow c = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{D(2, 4, -3)}$$

El cuarto vértice del cuadrado tiene coordenadas $D(2, 4, -3)$.

Comprobamos que el lado CD tiene la misma longitud que los lados AC y BD.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, -2) \\ B(3, 2, -1) \\ C(0, 2, -4) \\ D(2, 4, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (0, 2, -4) - (1, 0, -2) = (-1, 2, -2) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 \\ \overrightarrow{BD} = (2, 4, -3) - (3, 2, -1) = (-1, 2, -2) \rightarrow |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 \\ \overrightarrow{CD} = (2, 4, -3) - (0, 2, -4) = (2, 2, 1) \rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \end{array} \right.$$



D2) Calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la siguiente curva:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 \quad (5 \text{ puntos})$$

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \Rightarrow f''(x) = 12x - 18 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 12 \cdot 1 - 18 = -6 < 0 \rightarrow \text{Es máximo} \\ f''(2) = 12 \cdot 2 - 18 = 6 > 0 \rightarrow \text{Es mínimo} \end{cases}$$

Como $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 5 = 0$ y $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 5 = -1$ el máximo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$ y el mínimo relativo es $(2, -1)$.

Para obtener el punto de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 12x - 18 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12x - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}}$$

Comprobamos si la derivada tercera es no nula en este valor.

$$f'''(x) = 12 \Rightarrow f''' \left(\frac{3}{2} \right) = 12 \neq 0$$

La derivada tercera es no nula y la función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$.

Como $f \left(\frac{3}{2} \right) = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^3 - 9 \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 12 \left(\frac{3}{2} \right) - 5 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 18 - 5 = \frac{-1}{2}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right)$.

