

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de realitzar expressant de forma raonada el procés seguit per resoldre-les, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. Es valorarà el grau d'acompliment amb un màxim de 0,25 punts cada exercici.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tindran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que puguin veure's afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent.
- Els errors en les operacions aritmètiques elementals es penalitzaran amb un màxim de 0,25 punts en cada pregunta o tasca
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corriu-ne els que apareixen primer.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. Contestau el problema A1, i contestau també un problema a escollir entre el problema A2 i el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatori). — A la loteria de Nadal, el número guanyador de la grossa és un únic número de 5 xifres. Tots els números tenen la mateixa probabilitat de resultar guanyadors. Considera els següents esdeveniments:

- A : el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 00000.
- B : el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 72480.
- C : el número guanyador el Nadal de 2026 serà el 72480.

- a) Expressa, amb les teves pròpies paraules, què volen dir els dos termes següents: $P(C | B)$, i $P(A \cap B)$.

Criteris: No penalitzar si s'expressa en termes d' A i B .

(Total 1 pt)

Solució. Els termes són:

- $P(C | B)$: Probabilitat que el Nadal de 2026 el número guanyador sigui el 72480, sabent que aquest mateix número també ha estat el guanyador el proper Nadal de 2025.
- $P(A \cap B)$: Probabilitat que el número guanyador el proper Nadal de 2025 sigui el 00000 i també sigui el 72480.

- b) Calcula $P(C | B)$ i $P(A \cap B)$.

Criteris: 0.5 pts per cada càlcul. Penalització amb -0.25 pts si no es justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts si es considera 99999 per al nombre de casos totals, i penalització amb -0.5 pts per qualsevol altre valor incorrecte.

(Total 1 pt)

Solució. En el primer cas, els esdeveniments són independents, així que, per la llei de Laplace,

$$P(C | B) = P(C) = \frac{\# \text{ Casos favorables}}{\# \text{ Casos totals}} = \frac{1}{100000} = 0.00001.$$

En el segon cas, els esdeveniments són incompatibles, així que $P(A \cap B) = 0$.

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa de les dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants totals i la quantitat de treballadors per nacionalitat i sexe a Espanya, que són les següents:

	Espanyols	Estrangers		Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions	Homes	10.8 milions	1.9 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions	Dones	9.6 milions	1.7 milions
Quantitat d'habitants total.			Quantitat de treballadors.		

- a) Escollint un home a l'atzar, quina és la probabilitat que treballi?

Criteris: Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul.

(Total 1 pt)

Solució. Considerem els esdeveniments següents:

- H : ser home.
- T : treballar.

Per la llei de Laplace,

$$P(T | H) = \frac{\# \text{ Homes que treballen}}{\# \text{ Homes}} = \frac{10.8 + 1.9}{20.6 + 3} = 0.538$$

- b) Escollint un individu a l'atzar, els esdeveniments “ser dona” i “treballar” són independents?

Criteris: 0.25 pts per plantejar, 0.75 pts per calcular. Penalització amb -0.25 pts si no indica en cap càlcul llei de Laplace o casos favorables/casos totals.

(Total 1 pt)

Solució. Considerem els esdeveniments següents:

- D : ser dona.
- T : treballar.

Per la llei de Laplace, i tenint en compte que hi ha 48.1 milions d'habitants,

$$\begin{cases} P(D) = \frac{\# \text{ Dones}}{\# \text{ Habitants}} = \frac{21.2+3.3}{48.1} = 0.509, \\ P(T) = \frac{\# \text{ Treballadors}}{\# \text{ Habitants}} = \frac{10.8+1.9+9.6+1.7}{48.1} = 0.499. \\ P(D \cap T) = \frac{\# \text{ Dones treballadores}}{\# \text{ Habitants}} = \frac{9.6+1.7}{48.1} = 0.235. \end{cases}$$

Els esdeveniments no són independents ja que

$$\begin{aligned} P(D) \cdot P(T) &\neq P(D \cap T), \\ 0.509 \cdot 0.499 &\neq 0.235. \end{aligned}$$

Problema A3. — Després d'una formació acadèmica determinada, el temps que tarden els titulats a trobar feina el podem aproximar mitjançant una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional μ desconeguda, i desviació típica $\sigma = 30$ dies. Respecte dels 22 titulats d'enguany, el nombre mitjà de dies que han tardat a trobar feina ha estat de 86.

Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional μ amb un nivell de confiança del 80%.

Criteris: 0.5 pt per calcular $z_{\alpha/2}$, 1.5 pt per calcular l'interval. No penalitzar si s'utilitza el valor $z_{\alpha/2}$ més proper o interpolat. Penalització amb -0.5 pts si s'utilitza el valor de $z_{\alpha/2}$ sense justificar. Penalització amb -0.25 pts si utilitzen el valor $z_{\alpha/2} = 1.29$. Penalització amb -0.25 pts si no s'indica la fórmula de l'interval. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 2 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 80%, el nivell de significació és $\alpha = 0.2$. Per tant, $\alpha/2 = 0.10$ i $z_{\alpha/2} = 1.285$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 22$, $\bar{x} = 86$, $\sigma = 30$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (77.78, 94.22).$$

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$?

Criteris: Penalització amb -0.25 pt si es respon només a una de les dues qüestions. Penalització amb -1 pt si es calcula la inversa amb calculadora. **(Total 1 pt)**

Solució. Per comprovar-ho, les multiplicam:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Per tant, $B \cdot A = I$, i podem dir que ambdues igualtats són certes: $A = B^{-1}$ i, per tant, $B = A^{-1}$.

b) Calcula x tal que $Ax = v$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per errors aïllant a l'equació matricial. Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul numèric. **(Total 1 pt)**

Solució. Ens demanen calcular el vector $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Podem resoldre el problema pel mètode de Gauss, però és més senzill utilitzar l'apartat anterior:

$$Ax = v \implies x = A^{-1}v \implies x = Bv \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

c) Amb el valor de x de l'apartat anterior, calcula y tal que $B^2y = x$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per errors aïllant a l'equació matricial. Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul numèric. **(Total 1 pt)**

Solució. De nou, és més senzill utilitzar els apartats anteriors:

$$B^2y = x \implies A \cdot B^2y = Ax \implies I \cdot By = v \implies By = v \implies y = Av \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Problema B2. — Per organitzar un esdeveniment social, volem contractar el transport amb una empresa que ens ofereix autocars i minibusos.

- Cada autocar té una capacitat de 50 viatgers i té un preu de 100 €.
- Cada minibus té una capacitat de 30 viatgers i té un preu de 55 €.

Podem contractar tants autocars com vulguem, i fins a 8 minibusos. Per limitacions en el nombre de conductors, només podem contractar 11 vehicles. Si volem assegurar el transport per a almenys 450 persones, quina és la combinació més avantatjosa i quin cost té?

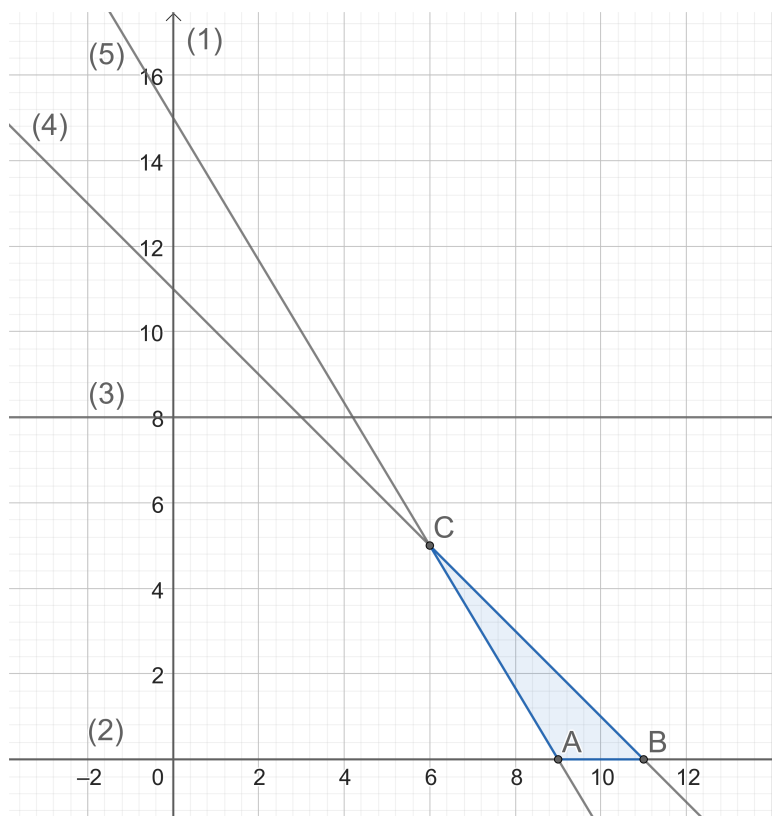
Criteris: 0.5 pts per plantejar (0.1 pt/recta). 0.5 pts per indicar la funció objectiu. 1 pt per traçar les rectes i indicar la regió factible (penalitzar amb -0.5 pts per cada recta incorrectament traçada). 0.5 pts per calcular els vèrtexs (penalitzar amb -0.25 pts per cada vèrtex incorrecte). 0.5 pts per calcular el vèrtex corresponent al mínim i interpretar-lo. Penalització amb -3 pt si les variables són incorrectes. Penalització amb -0.25 pts si no es descriuen les variables.

(Total 3 pt)

Solució. Siguin a el nombre d'autocars i b el nombre de minibusos que contractarem. La funció a minimitzar serà $f(a,b) = 100a + 55b$. D'acord amb l'enunciat,

$$\begin{cases} a & \geq 0, \\ 0 & \leq b \\ a + b & \leq 11, \\ 50a + 30b & \geq 450, \end{cases} \leq 8, \implies \begin{cases} (1) & a \geq 0, \\ (2) & b \geq 0, \\ (3) & b \leq 8, \\ (4) & a + b \leq 11, \\ (5) & 5a + 3b \geq 45. \end{cases}$$

Amb aquestes rectes traçam la següent regió factible:



On els vèrtexs són els punts $A = (9, 0)$, $B = (11, 0)$ i el punt d'intersecció de les rectes (4) i (5), $C = (6, 5)$. Avaluant la funció objectiu, s'observa que el mínim es dona en el vèrtex C , amb $f(6, 5) = 875$. És a dir, que la combinació més avantatjosa és contractar 6 autocars i 5 minibusos, per un preu de 875 €.

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$, per a $x \in [-1, \infty)$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

Criteris: 0.5 pt per indicar els valors en els extrems del domini. 0.5 pt per indicar els intervals de creixement/decreixement. 0.75 pt per indicar els màxims/mínims relatius i absoluts (penalitzar amb -0.25 pts si no indiquen quins són els màxims o mínims absoluts). 0.25 pt per la claredat/correcció de la gràfica i els eixos. **(Total 2 pt)**

Solució. El domini és $x \in [-1, \infty)$ per l'enunciat.

En els extrems del domini,

$$f(-1) = -1^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -4, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot (x - 3) = +\infty.$$

Pels intervals de creixement i decreixement, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, que s'anul·la a

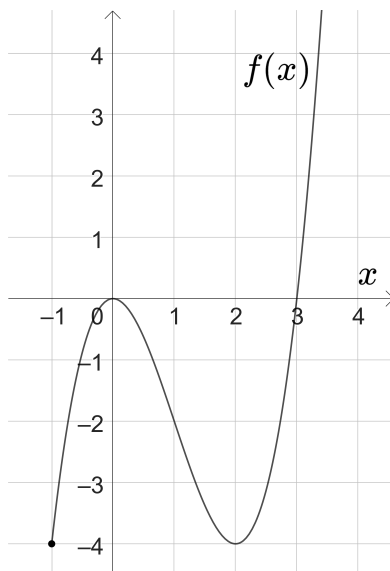
$$f'(x) = 0 \implies 3 \cdot x \cdot (x - 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Amb el valor de la funció en els punts d'interès,

$$\begin{cases} f(-1) &= -4 \\ f(0) &= 0 \\ f(2) &= -4 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= +\infty \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) &\text{és creixent per a } x \in (-1, 0), \\ f(x) &\text{és decreixent per a } x \in (0, 2), \\ f(x) &\text{és creixent per a } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Per tant, té un màxim relatiu, $f(0) = 0$; un mínim relatiu, $f(2) = -4$; el mínim absolut s'assoleix a $x = -1$ i a $x = 2$; i no té màxim absolut.

La gràfica demanada és la següent:



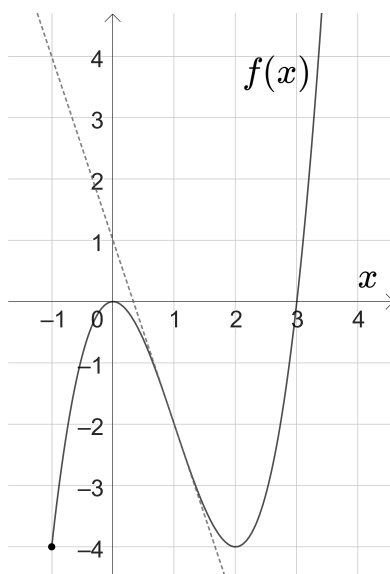
- b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent?

Criteris: 0.5 pt per calcular el pendent, 0.5 pt per traçar la recta.

(Total 1 pt)

Solució. El seu pendent ve donat per $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

Sobre la gràfica, la representació és



Problema C2. — En psicologia, la funció següent modela com les persones valoren recompenses en un instant de temps futur, t :

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

on r és una constant positiva, i t es mesura en dies.

- a) Si $r = 0.01$, què val la funció $V(t)$ a $t = 50$?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts per errors de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$V(50) = \frac{1}{(1+0.01)^{50}} = 0.61.$$

- b) Per a quin valor de r , la funció $V(t)$ val 0.75 a $t = 50$?

Criteris: 0.25 pt per plantejar, 0.75 pt per calcular. Penalització amb -0.25 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Solució. Ens demanen resoldre r per a:

$$0.75 = V(50) = \frac{1}{(1+r)^{50}}.$$

Operant,

$$(1+r)^{50} = \frac{1}{0.75} \implies (1+r) = \left(\frac{1}{0.75}\right)^{1/50} \implies r = \left(\frac{1}{0.75}\right)^{1/50} - 1 \implies r \approx 0.0058.$$

- c) Si $r = 0.03$, a quin valor tendeix la valoració d'una recompensa en un futur molt llunyà?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. La tendència en un futur molt llunyà ve donada pel límit d'aquesta funció quan t tendeix a infinit:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+0.03)^t} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

És a dir, el valor de la recompensa tendeix a zero.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.