



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PAU

CURSO 2024-2025

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las CC SS II**Convocatoria: JUNIO_VIERNES_6**

Instrucciones: La pregunta 1 es obligatoria. Además, elegir un máximo de 3 preguntas, eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.
 - a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99 %, se ha obtenido [1174,25,1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA? **(0,75 puntos)**
 - b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? **(1 punto)**
 - c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? **(0,75 puntos)**

- 2A. Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.
 - a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. **(0,5 puntos)**
 - b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? **(1 punto)**
 - c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? **(1 punto)**

- 2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero. Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.
 - a) Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación? **(1 punto)**
 - b) Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? **(1 punto)**
 - c) De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? **(0,5 puntos)**

- 3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 24t^2 - 96t + 736, & 0 \leq t < 4 \\ t^3 - 30t^2 + 288t, & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas (de 0 a 12)

- Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en $t=4$? **(0,75 puntos)**
- Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? **(0,75 puntos) (1 punto)**
- Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t=6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor? **(0,75 puntos)**

3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas

$$y = 3x^2 - 5x + 3, \quad y = x + 3,$$

con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

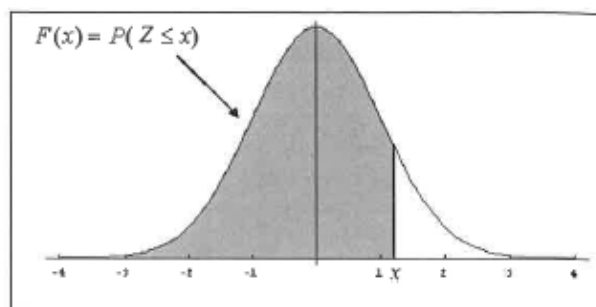
- Representar la superficie que se destina al jardín. **(0,75 puntos)**
- ¿Cuánto mide dicha superficie? **(1 punto)**
- La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m². Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m², siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m². A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? **(0,75 puntos)**

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

- Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**
- Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
- ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
- ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? **(1 punto)**



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.
- a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99 %, se ha obtenido [1174,25,1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA? **(0,75 puntos)**
- b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? **(1 punto)**
- c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? **(0,75 puntos)**

X = El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad. $X = N(\mu, \sigma)$.

- a) La muestra es de tamaño $n = 400$ pisos.

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{1174,25 + 1225,75}{2} = 1200$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{1225,75 - 1174,25}{2} = 25.75$$

Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9947	0.9948	0.9949	0.9951

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 25.75 = 2.575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \Rightarrow \frac{25.75}{2.575} = \frac{\sigma}{20} \Rightarrow \boxed{\sigma = 200}$$

La desviación típica tiene un valor de $\sigma = 200$ euros.

- b) Y = Los gastos de gestión en el alquiler de un piso de dos habitaciones de una gran ciudad. Como la desviación típica del precio del alquiler es 200 entonces la desviación típica de los gastos de gestión es el 10%: $0.10 \cdot 200 = 20$. $Y = N(\mu, 20)$.

La muestra es de tamaño $n = 400$ pisos.

La media muestral es el 10% de la muestra de la variable X: $\bar{y} = 0.10 \cdot \bar{x} = 0.10 \cdot 1200 = 120$

Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{400}} = 1.645$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{y} - Error, \bar{y} + Error) = (120 - 1.645, 120 + 1.645) = (118.355, 121.645)$$

c) X = El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad.

La media muestral es $\bar{x} = 1200$. $X = N(1200, 200)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media (1200) y con desviación típica $\sigma = \frac{200}{\sqrt{25}} = 40$. $\bar{X}_{25} = N(1200, 40)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{25} \geq 1250)$.

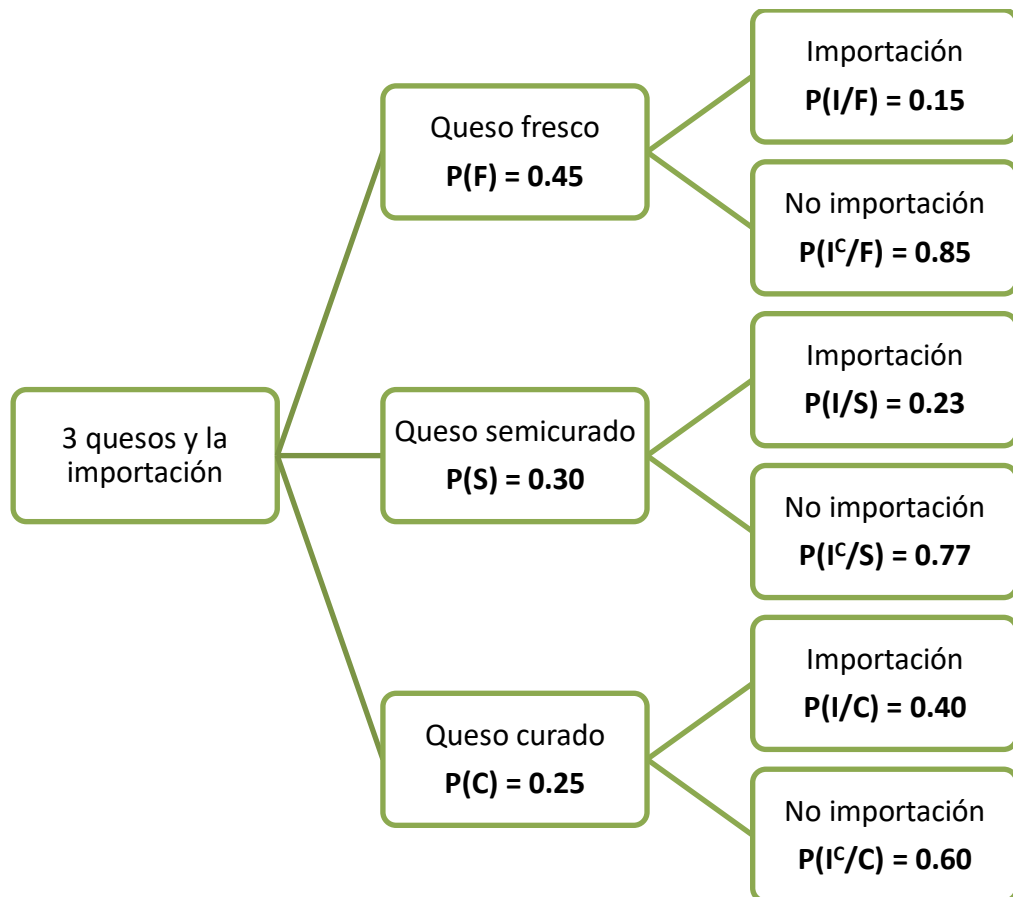
$$P(\bar{X}_{25} \geq 1250) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{1250 - 1200}{40}\right) = P(Z \geq 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

- 2A.** Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.
- a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. **(0,5 puntos)**
- b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? **(1 punto)**
- c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? **(1 punto)**

a) Llamamos F a “Queso fresco”, S a “Queso semicurado”, C a “Queso curado” e I a “Queso de Importación”.



b) Nos piden calcular $P(I^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(I^c) &= P(F)P(I^c/F) + P(S)P(I^c/S) + P(C)P(I^c/C) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.85 + 0.3 \cdot 0.77 + 0.25 \cdot 0.6 = \boxed{0.7635}
 \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(C/I)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C)P(I/C)}{1 - P(I^c)} = \frac{0.25 \cdot 0.4}{1 - 0.7635} = \frac{200}{473} \approx 0.4228$$

2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero. Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.

- Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación? **(1 punto)**
- Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? **(1 punto)**
- De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? **(0,5 puntos)**

- a) La proporción muestral de los clientes que consideran que este nuevo sistema ayuda a reducir el tiempo de espera es $p = \frac{140}{210} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$.

Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0	0.01	0.02	0.03
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9923

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{210}} \approx 0.0756$$

El error máximo en la estimación sería de 0.0756.

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6667 - 0.0756, 0.6667 + 0.0756) = (0.5911, 0.7423)$$

b) Con un nivel de confianza del 96 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{2.055} = \sqrt{\frac{2}{9n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.04}{2.055} \right)^2 = \frac{2}{9n} \Rightarrow 9n \left(\frac{0.04}{2.055} \right)^2 = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{9 \left(\frac{0.04}{2.055} \right)^2} \approx 586.53$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 587 clientes.

- c) Llamamos X = Número de clientes de un grupo de 9 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 1/3$.

$$X = B\left(9, \frac{1}{3}\right)$$

Debemos calcular $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{9}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \right] = 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \right] = \boxed{0.857}$$

La probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera es de 0.857.

3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 24t^2 - 96t + 736, & 0 \leq t < 4 \\ t^3 - 30t^2 + 288t, & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas (de 0 a 12)

- a) Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en $t=4$? **(0,75 puntos)**
 b) Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? **(0,75 puntos) (1 punto)**
 c) Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t=6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor? **(0,75 puntos)**

a) En el intervalo $[0, 4)$ la función tiene la expresión $f(t) = 24t^2 - 96t + 736$, que es una función polinómica y por tanto es continua.

En el intervalo $(4, 12]$ la función tiene la expresión $f(t) = t^3 - 30t^2 + 288t$, que es una función polinómica y por tanto es continua.

Estudiamos la continuidad en $t = 4$.

$$f(4) = 4^3 - 30 \cdot 4^2 + 288 \cdot 4 = 736$$

$$\lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} t^3 - 30t^2 + 288t = 736$$

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} 24t^2 - 96t + 736 = 24 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 736 = 736$$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 736 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = 736 \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = 736 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = f(4) = 736$$

La función es continua en $t = 4$. La función es continua en $[0, 12]$.

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{4\}$ es $f'(t) = \begin{cases} 48t - 96, & 0 \leq t < 4 \\ 3t^2 - 60t + 288, & 4 < t \leq 12 \end{cases}$.

Comprobamos si la función es derivable en $t = 4$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f'(4^-) = \lim_{t \rightarrow 4^-} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} 48t - 96 = 48 \cdot 4 - 96 = 96 \\ f'(4^+) = \lim_{t \rightarrow 4^+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} 3t^2 - 60t + 288 = 3 \cdot 4^2 - 60 \cdot 4 + 288 = 96 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(4^-) = f'(4^+) = 96$$

La función es derivable en $t = 4$.

- b) La derivada de la función es $f'(t) = \begin{cases} 48t - 96, & 0 \leq t < 4 \\ 3t^2 - 60t + 288, & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

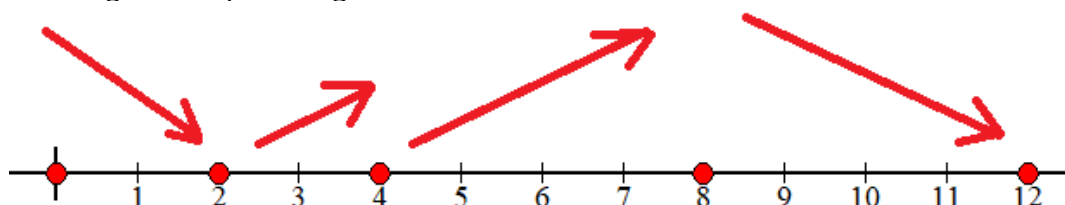
$$f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 48t - 96 = 0 \rightarrow 48t = 96 \rightarrow t = \frac{96}{48} = 2 \in [0, 4) \\ 3t^2 - 60t + 288 = 0 \rightarrow t^2 - 20t + 96 = 0 \rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 96}}{2} = \\ = \frac{20 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{20+4}{2} = 12 \in (4, 12] \\ \frac{20-4}{2} = 8 \in (4, 12] \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores críticos obtenidos, añadiendo el momento de cambio de definición.

- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 48 \cdot 1 - 96 = -48 < 0$. La función decrece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 48 \cdot 3 - 96 = 48 > 0$. La función crece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, 8)$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 + 288 = 63 > 0$. La función crece en $(4, 8)$.
- En el intervalo $(8, 12)$ consideramos $t = 10$ y la derivada vale $f'(10) = 3 \cdot 10^2 - 600 + 288 = -12 < 0$. La función decrece en $(8, 12)$.

La función decrece en $[0, 2) \cup (8, 12]$ y crece en $(2, 8)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función alcanza un mínimo relativo en $t = 2$ y un máximo relativo en $t = 8$.

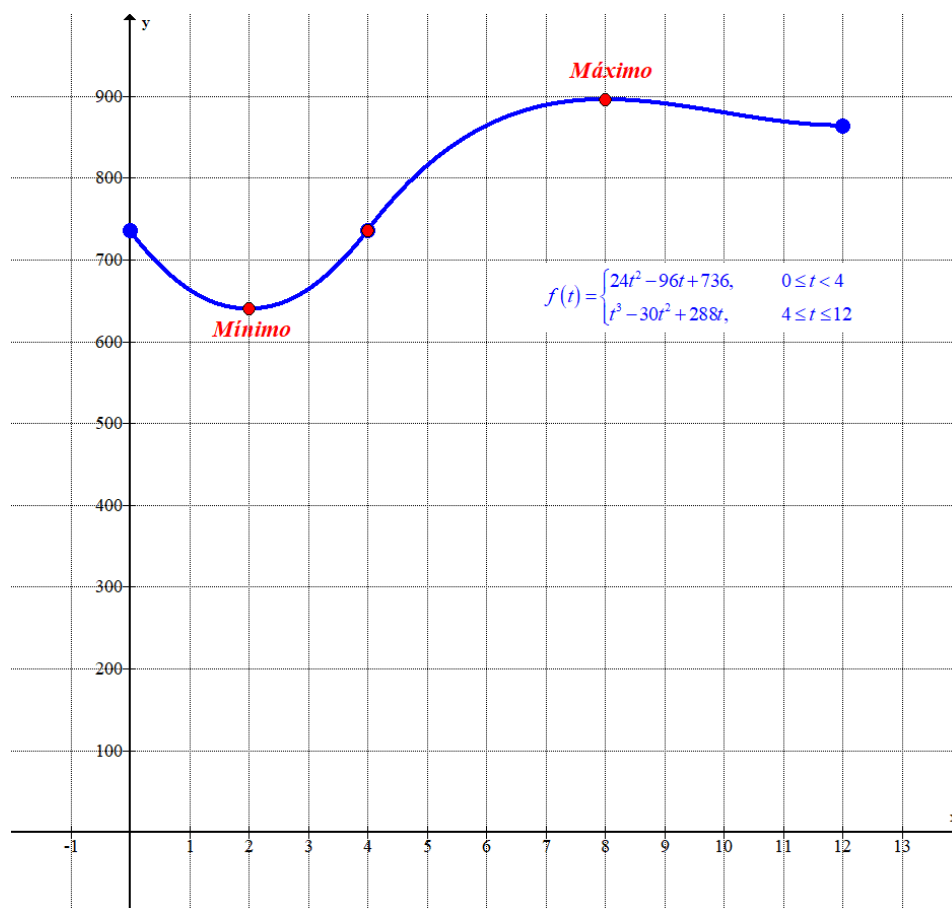
Estos son máximo y mínimo relativos, faltaría compararlo con los valores de la función en los extremos del intervalo para determinar si son máximo o/y mínimo absoluto.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 24 \cdot 0^2 - 96 \cdot 0 + 736 = 736 \\ f(2) &= 24 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 736 = 640 \text{ Mínimo} \\ f(8) &= 8^3 - 30 \cdot 8^2 + 288 \cdot 8 = 896 \text{ Máximo} \\ f(12) &= 12^3 - 30 \cdot 12^2 + 288 \cdot 12 = 864 \end{aligned} \right\}$$

El valor mínimo de actividad cerebral se produce a las 2 horas y tiene un valor de $640 \mu\text{V}$.

El valor máximo de actividad cerebral se produce a las 8 horas y tiene un valor de $896 \mu\text{V}$.

- c) Representamos la gráfica de la función usando todos los puntos de la gráfica obtenidos en los apartados anteriores.



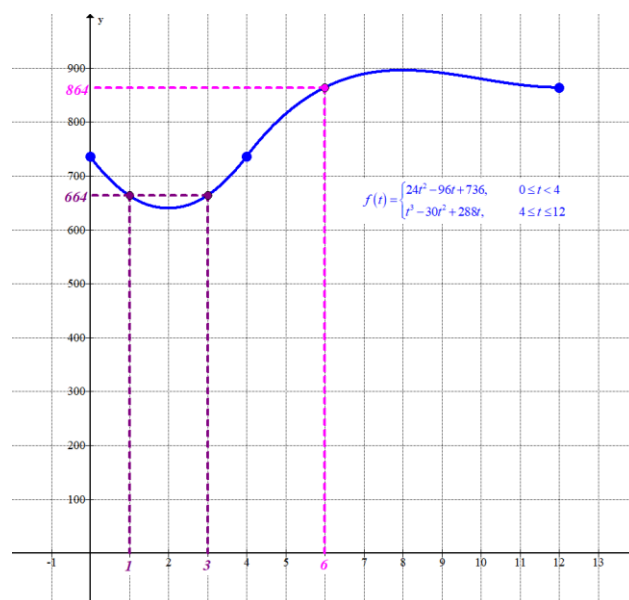
Para $t = 6$ la función vale $f(6) = 6^3 - 30 \cdot 6^2 + 288 \cdot 6 = 864$. La actividad cerebral es de 864 microvoltios.

Buscamos cuando antes de la sexta hora la actividad cerebral es $864 - 200 = 664$ micovolitos. En la gráfica de la función se aprecia que este valor se alcanza antes de $t = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = 664 \\ t \in (0, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow 24t^2 - 96t + 736 = 664 \Rightarrow 24t^2 - 96t + 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = 1 = t \\ \frac{4+2}{2} = 3 = t \end{cases}$$

Una actividad cerebral de $664 \mu\text{V}$ se consigue en la hora 1 y en la hora 3.



3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas

$$y = 3x^2 - 5x + 3, \quad y = x + 3,$$

con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

a) Representar la superficie que se destina al jardín. **(0,75 puntos)**

b) ¿Cuánto mide dicha superficie? **(1 punto)**

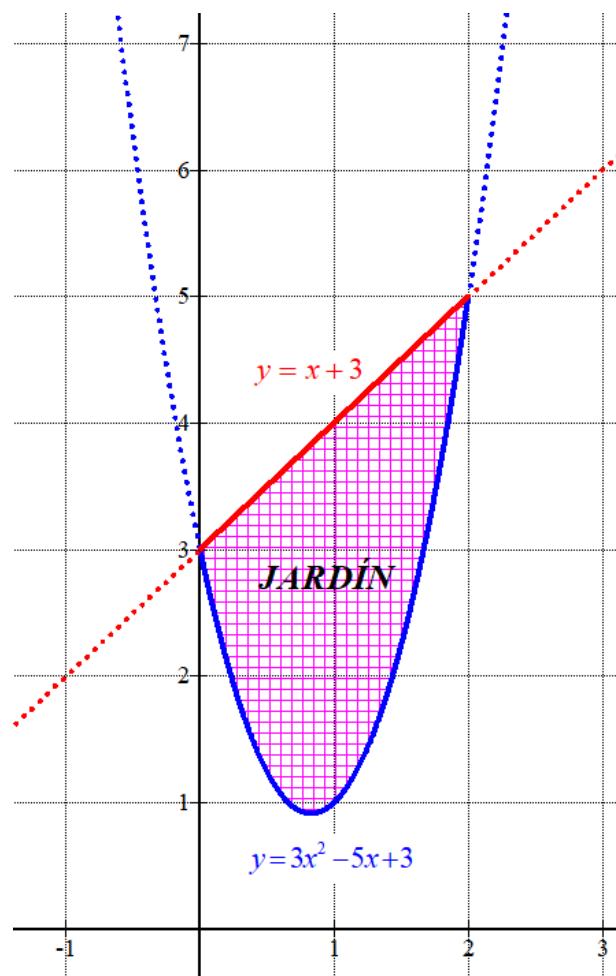
c) La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m². Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m², siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m². A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? **(0,75 puntos)**

a) Debemos representar la gráfica de una parábola y de una recta. Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$3x^2 - 5x + 3 = x + 3 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos el recinto del jardín.

x	$y = 3x^2 - 5x + 3$	x	$y = x + 3$
0	3	0	3
1	1	1	4
2	5	2	5



- b) Hallamos la superficie del jardín calculando la integral definida entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Superficie} &= \int_0^2 x + 3 - (3x^2 - 5x + 3) dx = \int_0^2 x + 3 - 3x^2 + 5x - 3 dx = \\ &= \int_0^2 -3x^2 + 6x dx = \left[-x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = \left[-2^3 + 3 \cdot 2^2 \right] - \left[-0^3 + 3 \cdot 0^2 \right] = -8 + 12 = \boxed{4 m^2} \end{aligned}$$

La zona dedicada al jardín tiene una superficie de 4 metros cuadrados.

- c) El césped artificial necesario tiene un coste de $25,99 \text{ €/m}^2 \cdot 4 = 103.96 \text{ €}$.

El material adicional cuesta $18 \cdot 4 = 72 \text{ €}$.

Todos los materiales cuestan $103.96 + 72 = 175.96 \text{ €}$.

El coste de la mano de obra es $20 \cdot 4 = 80 \text{ €}$.

El impuesto cuesta $0.07 \cdot 175.96 + 80 \cdot 0.04 = 15.5172$.

Sumamos el coste del material, la mano de obra y los impuestos para obtener el coste total.

$$175.96 + 80 + 15.5172 = 271.4772 \text{ €}$$

El coste total de la obra es de 271.4772 €.

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**

c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

a) Llamamos x = número de discos SATA e y = número de discos SSD.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº ordenadores	Tb	Coste
Nº de discos SATA (x)	$100x$	$9.6x$	$200x$
Nº de discos SSD (y)	$50y$	$1.2y$	$100y$
TOTAL	$100x + 50y$	$9.6x + 1.2y$	$200x + 100y$

La función que deseamos maximizar la capacidad de almacenamiento $C(x, y) = 9.6x + 1.2y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€” $\rightarrow 200x + 100y \leq 4000$.

“Deben conectarse 700 ordenadores” $\rightarrow 100x + 50y \geq 700$.

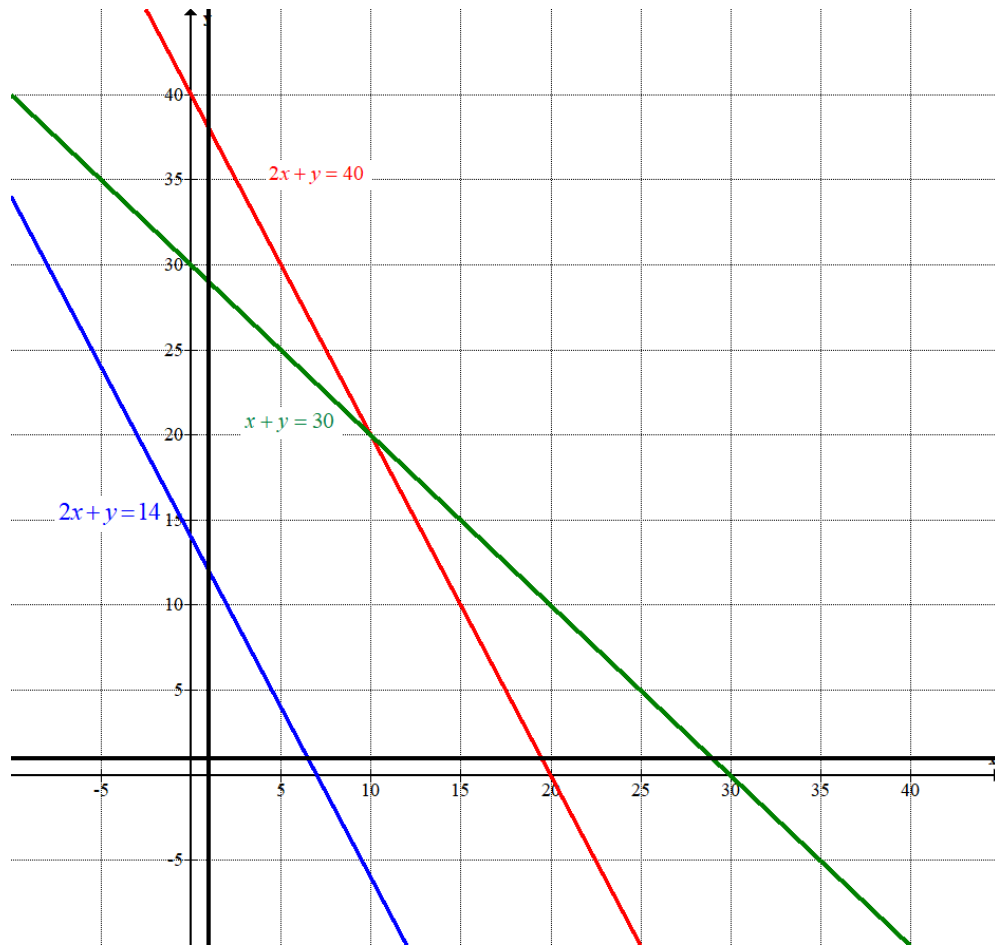
“Será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco” $\rightarrow x + y \geq 30, x \geq 1; y \geq 1$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 100y \leq 4000 \\ 100x + 50y \geq 700 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 1; y \geq 1 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 40 \\ 2x + y \geq 14 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 1; y \geq 1 \end{array} \right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x + y = 40$		$2x + y = 14$		$x + y = 30$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 40 - 2x$	x	$y = 14 - 2x$	x	$y = 30 - x$	
0	40	0	14	1	29	Primer cuadrante
10	20	5	4	10	20	
20	0	7	0	29	1	

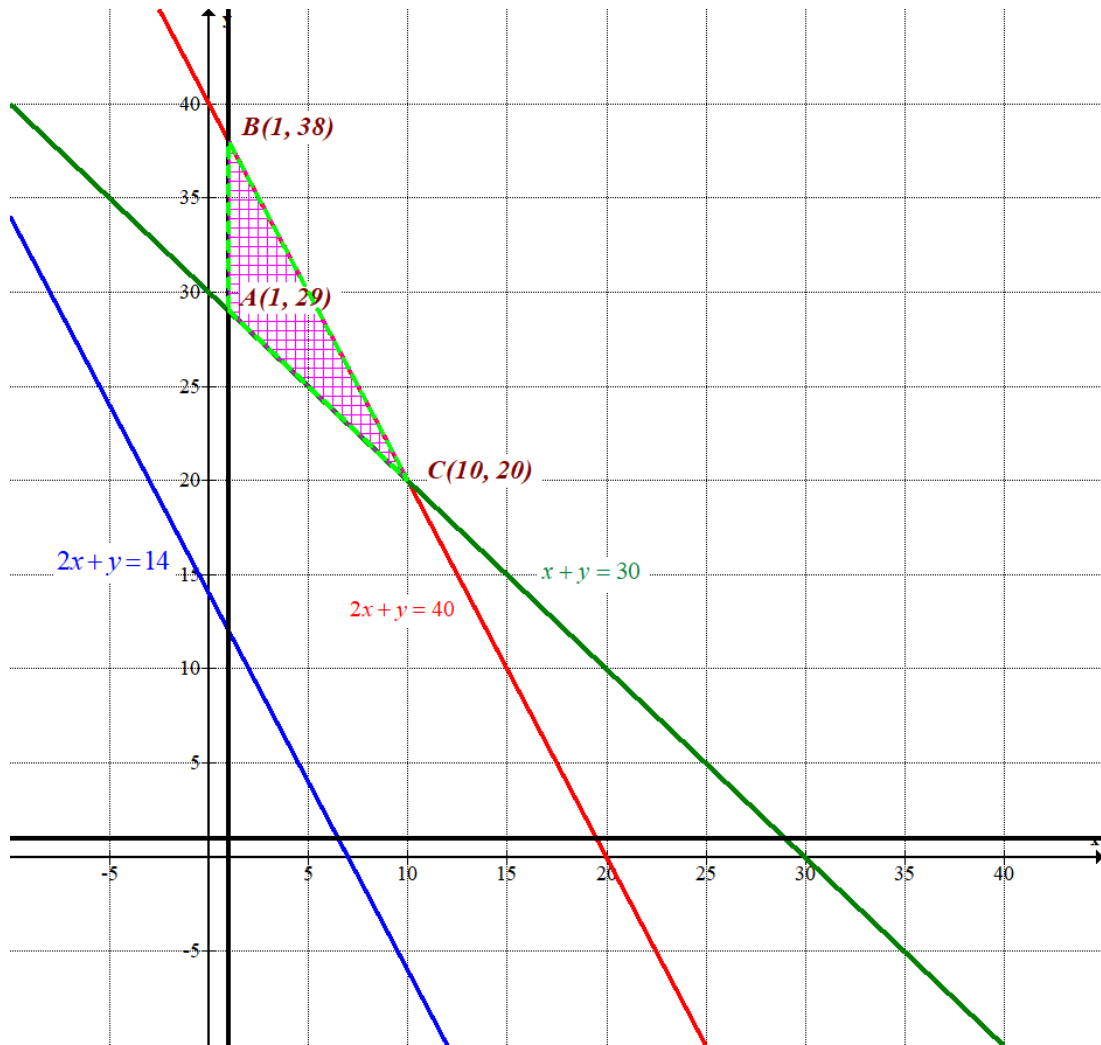


Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 40 \\ 2x + y \geq 14 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 1; y \geq 1 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de la recta **roja**, por encima de la recta **azul** y **verde**, a la derecha de la recta vertical negra.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible tienen coordenadas $A(1, 29)$, $B(1, 38)$ y $C(10, 20)$.

- c) Valoramos la función capacidad de almacenamiento $C(x, y) = 9.6x + 1.2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(1, 29) \rightarrow C(1, 29) = 9.6 \cdot 1 + 1.2 \cdot 29 = 44.4$$

$$B(1, 38) \rightarrow C(1, 38) = 9.6 \cdot 1 + 1.2 \cdot 38 = 55.2$$

$$C(10, 20) \rightarrow C(10, 20) = 9.6 \cdot 10 + 1.2 \cdot 20 = \mathbf{120 \text{ Máximo}}$$

El almacenamiento máximo es de 120 Tb y se consigue en el vértice $C(10, 20)$, que significa instalar 10 discos SATA y 20 discos SSD.

La capacidad media es de $\frac{120}{700} = \frac{6}{35}$ Tb por ordenador.

LA RECTA AZUL NO PINTA MUCHO ¡ALGO NO CUADRA!

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**

b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? **(1 punto)**

a) Llamamos “x” al número de clientes en SA, “y” al número de clientes en AD y “z” al número de clientes en TI.

“El número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento” $\rightarrow z = 2x$.

“Por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x \longrightarrow y \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 3y$$

“Si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido” $\rightarrow z - 39 = x + y$.

$$\left. \begin{array}{l} z = 2x \\ 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ 2x - 39 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = y + 39 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(y + 39) = 3y$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} z = 2x \\ 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ 2x - 39 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = y + 39 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(y + 39) = 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 78 = 3y \Rightarrow \boxed{78 = y} \Rightarrow \boxed{x = 78 + 39 = 117} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 117 = 234}$$

Hay 117 clientes en Solo Alojamiento, 78 en Alojamiento y Desayuno, 234 en Todo Incluido.