

**Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales****INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
- En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

**Apartado 1 [3 puntos].****Opción 1.**

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

**Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS].** Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

**Tarea 1.1B [1 PUNTO].** Analice la compatibilidad de dicho sistema.

**Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS].** Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

**Opción 2.**

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tupper. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:

**Tarea 1.2A [1 PUNTO].** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

**Tarea 1.2B [1 PUNTO].** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

**Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS].** ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

**Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS].** ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

**Apartado 2 [4 puntos].** Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Dada la función  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4, & \text{si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2, & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

**Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS].** Estudie la continuidad de la función  $f(x)$ .

**Tarea 2.1B [1 PUNTO].** Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función  $f(x)$  con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.

**Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS].** Calcule el área del recinto delimitado por la curva  $f(x)$  y el eje de abscisas  $OX$  en el intervalo  $[2,6]$ .

**Apartado 3 [3 puntos].**

**Opción 1.**

En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:

**Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS].** Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.

**Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS].** Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

**Opción 2.**

En una cierta ciudad, el 45 % del censo vota al partido A, el 40 % al partido B y el 15 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25 % de los votantes del partido A, el 45 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado. Realice las siguientes tareas que se plantean:

**Tarea 3.2A [1 PUNTO].** ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

**Tarea 3.2B [1 PUNTO].** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

**Tarea 3.2C [1 PUNTO].** Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Tabla de la distribución normal  $N(0,1)$ 

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



| $z_0$ | 0,00    | 0,01    | 0,02    | 0,03    | 0,04    | 0,05    | 0,06    | 0,07    | 0,08    | 0,09    | $z_0$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 0,0   | 0,5000  | 0,5040  | 0,5080  | 0,5120  | 0,5160  | 0,5199  | 0,5239  | 0,5279  | 0,5319  | 0,5359  | 0,0   |
| 0,1   | 0,5398  | 0,5438  | 0,5478  | 0,5517  | 0,5557  | 0,5596  | 0,5636  | 0,5675  | 0,5714  | 0,5753  | 0,1   |
| 0,2   | 0,5793  | 0,5832  | 0,5871  | 0,5910  | 0,5948  | 0,5987  | 0,6026  | 0,6064  | 0,6103  | 0,6141  | 0,2   |
| 0,3   | 0,6179  | 0,6217  | 0,6255  | 0,6293  | 0,6331  | 0,6368  | 0,6406  | 0,6443  | 0,6480  | 0,6517  | 0,3   |
| 0,4   | 0,6554  | 0,6591  | 0,6628  | 0,6664  | 0,6700  | 0,6736  | 0,6772  | 0,6808  | 0,6844  | 0,6879  | 0,4   |
| 0,5   | 0,6915  | 0,6950  | 0,6985  | 0,7019  | 0,7054  | 0,7088  | 0,7123  | 0,7157  | 0,7190  | 0,7224  | 0,5   |
| 0,6   | 0,7257  | 0,7291  | 0,7324  | 0,7357  | 0,7389  | 0,7422  | 0,7454  | 0,7486  | 0,7517  | 0,7549  | 0,6   |
| 0,7   | 0,7580  | 0,7611  | 0,7642  | 0,7673  | 0,7704  | 0,7734  | 0,7764  | 0,7794  | 0,7823  | 0,7852  | 0,7   |
| 0,8   | 0,7881  | 0,7910  | 0,7939  | 0,7967  | 0,7995  | 0,8023  | 0,8051  | 0,8078  | 0,8106  | 0,8133  | 0,8   |
| 0,9   | 0,8159  | 0,8186  | 0,8212  | 0,8238  | 0,8264  | 0,8289  | 0,8315  | 0,8340  | 0,8365  | 0,8389  | 0,9   |
| 1,0   | 0,8413  | 0,8438  | 0,8461  | 0,8485  | 0,8508  | 0,8531  | 0,8554  | 0,8577  | 0,8599  | 0,8621  | 1,0   |
| 1,1   | 0,8643  | 0,8665  | 0,8686  | 0,8708  | 0,8729  | 0,8749  | 0,8770  | 0,8790  | 0,8810  | 0,8830  | 1,1   |
| 1,2   | 0,8849  | 0,8869  | 0,8888  | 0,8907  | 0,8925  | 0,8944  | 0,8962  | 0,8980  | 0,8997  | 0,9015  | 1,2   |
| 1,3   | 0,9032  | 0,9049  | 0,9066  | 0,9082  | 0,9099  | 0,9115  | 0,9131  | 0,9147  | 0,9162  | 0,9177  | 1,3   |
| 1,4   | 0,9192  | 0,9207  | 0,9222  | 0,9236  | 0,9251  | 0,9265  | 0,9279  | 0,9292  | 0,9306  | 0,9319  | 1,4   |
| 1,5   | 0,9332  | 0,9345  | 0,9357  | 0,9370  | 0,9382  | 0,9394  | 0,9406  | 0,9418  | 0,9429  | 0,9441  | 1,5   |
| 1,6   | 0,9452  | 0,9463  | 0,9474  | 0,9484  | 0,9495  | 0,9505  | 0,9515  | 0,9525  | 0,9535  | 0,9545  | 1,6   |
| 1,7   | 0,9554  | 0,9564  | 0,9573  | 0,9582  | 0,9591  | 0,9599  | 0,9608  | 0,9616  | 0,9625  | 0,9633  | 1,7   |
| 1,8   | 0,9641  | 0,9649  | 0,9656  | 0,9664  | 0,9671  | 0,9678  | 0,9686  | 0,9693  | 0,9699  | 0,9706  | 1,8   |
| 1,9   | 0,9713  | 0,9719  | 0,9726  | 0,9732  | 0,9738  | 0,9744  | 0,9750  | 0,9756  | 0,9761  | 0,9767  | 1,9   |
| 2,0   | 0,9772  | 0,9778  | 0,9783  | 0,9788  | 0,9793  | 0,9798  | 0,9803  | 0,9808  | 0,9812  | 0,9817  | 2,0   |
| 2,1   | 0,9821  | 0,9826  | 0,9830  | 0,9834  | 0,9838  | 0,9842  | 0,9846  | 0,9850  | 0,9854  | 0,9857  | 2,1   |
| 2,2   | 0,9861  | 0,9864  | 0,9868  | 0,9871  | 0,9875  | 0,9878  | 0,9881  | 0,9884  | 0,9887  | 0,9890  | 2,2   |
| 2,3   | 0,9893  | 0,9896  | 0,9898  | 0,9901  | 0,9904  | 0,9906  | 0,9909  | 0,9911  | 0,9913  | 0,9916  | 2,3   |
| 2,4   | 0,9918  | 0,9920  | 0,9922  | 0,9925  | 0,9927  | 0,9929  | 0,9931  | 0,9932  | 0,9934  | 0,9936  | 2,4   |
| 2,5   | 0,9938  | 0,9940  | 0,9941  | 0,9943  | 0,9945  | 0,9946  | 0,9948  | 0,9949  | 0,9951  | 0,9952  | 2,5   |
| 2,6   | 0,9953  | 0,9955  | 0,9956  | 0,9957  | 0,9959  | 0,9960  | 0,9961  | 0,9962  | 0,9963  | 0,9964  | 2,6   |
| 2,7   | 0,9965  | 0,9966  | 0,9967  | 0,9968  | 0,9969  | 0,9970  | 0,9971  | 0,9972  | 0,9973  | 0,9974  | 2,7   |
| 2,8   | 0,9974  | 0,9975  | 0,9976  | 0,9977  | 0,9977  | 0,9978  | 0,9979  | 0,9979  | 0,9980  | 0,9981  | 2,8   |
| 2,9   | 0,9981  | 0,9982  | 0,9982  | 0,9983  | 0,9984  | 0,9984  | 0,9985  | 0,9985  | 0,9986  | 0,9986  | 2,9   |
| 3,0   | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 | 3,0   |
| 3,1   | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 | 3,1   |
| 3,2   | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 | 3,2   |
| 3,3   | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 | 3,3   |
| 3,4   | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 | 3,4   |
| 3,5   | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 | 3,5   |
| 3,6   | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 | 3,6   |
| 3,7   | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 3,7   |
| 3,8   | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 | 3,8   |
| 3,9   | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 | 3,9   |

## SOLUCIONES

### Apartado 1 [3 puntos].

#### Opción 1.

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

**Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS].** Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

**Tarea 1.1B [1 PUNTO].** Analice la compatibilidad de dicho sistema.

**Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS].** Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

**1.1A** Llamamos “x” al número de lotes Clásicos, “y” al número de lotes Selección y “z” al número de lotes Premium.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

“Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes”  $\rightarrow x + y + z = 33$ .

“Se obtienen 855 €, siendo el precio de un lote Clásico de 20 €, de uno Selección de 30 € y de uno Premium de 45 €”  $\rightarrow 20x + 30y + 45z = 855$ .

“El número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos”  $\rightarrow x = 3y$ .

$$\text{Reunimos las ecuaciones en un sistema: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 20x + 30y + 45z = 855 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 4x + 6y + 9z = 171 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\}.$$

**1.1B** Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 12 - 6 - 0 + 27 = 18 \neq 0$$

Al ser el determinante de A no nulo su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una solución única).

**1.1C** Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 4x + 6y + 9z = 171 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + y + z = 33 \\ 4 \cdot 3y + 6y + 9z = 171 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + z = 33 \\ 18y + 9z = 171 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 33 - 4y \\ 2y + z = 19 \end{cases} \Rightarrow 2y + 33 - 4y = 19 \Rightarrow -2y = -14 \Rightarrow \boxed{y = 7} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3 \cdot 7 = 21} \\ \boxed{z = 33 - 4 \cdot 7 = 5} \end{cases}$$

Se vendieron 21 lotes Clásicos, 7 lotes Selección y 5 lotes Premium.

**Opción 2.**

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tupper. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:

**Tarea 1.2A [1 PUNTO].** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

**Tarea 1.2B [1 PUNTO].** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

**Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS].** ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

**Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS].** ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

**1.2A** Llamamos “x” = número de botellas de plástico e “y” = número de tupper.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

|                          | Plástico rígido | Plástico flexible | Ingresos |
|--------------------------|-----------------|-------------------|----------|
| Nº botellas plástico (x) | 200x            | 300x              | 5x       |
| Nº tupper (y)            | 400y            | 100y              | 7y       |
| TOTAL                    | 200x + 400y     | 300x + 100y       | 5x + 7y  |

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos que vienen expresados como:

$$I(x, y) = 5x + 7y$$

Las restricciones son:

“Se dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible” →

$$200x + 400y \leq 160000; 300x + 100y \leq 100000$$

“La cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas” →  $y \leq 100 + x$

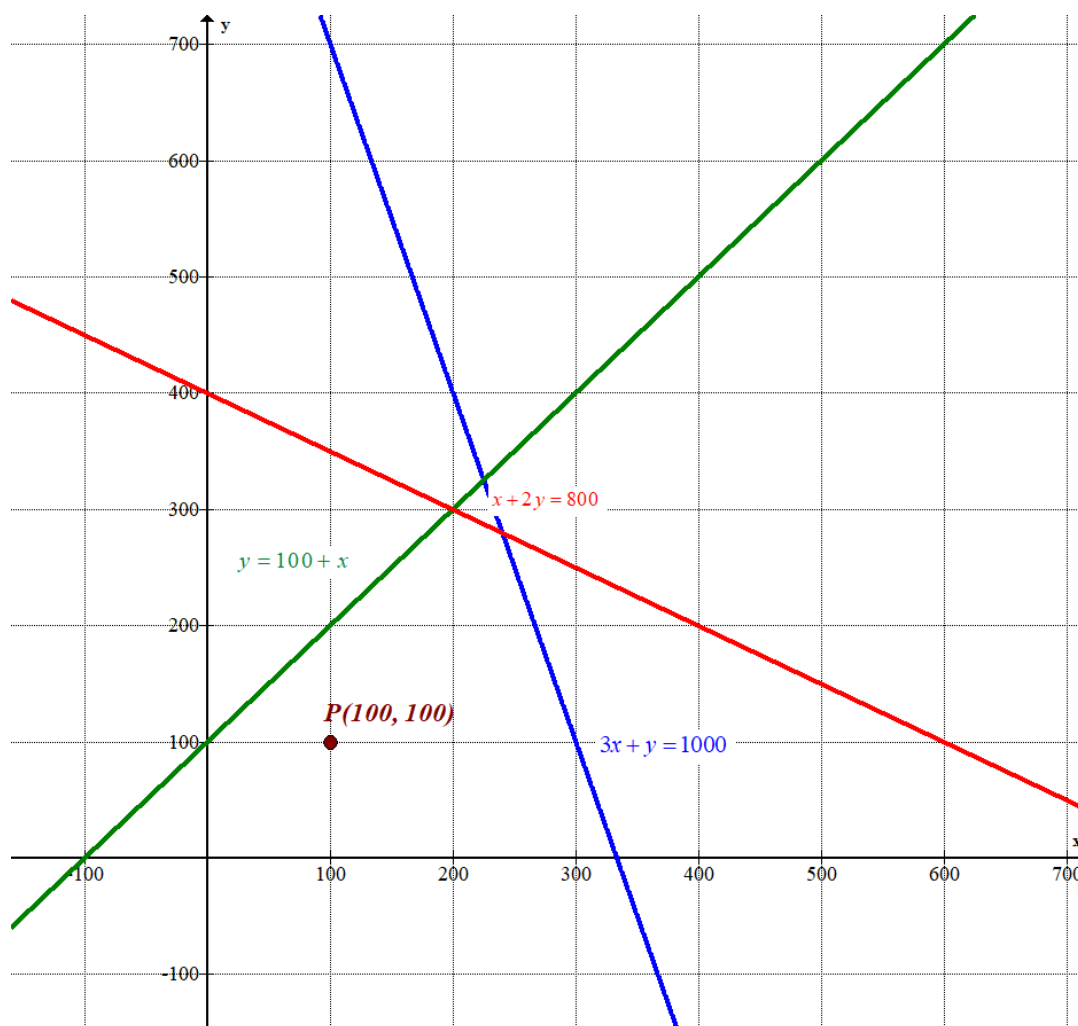
Las cantidades deben ser positivas →  $x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 400y \leq 160000 \\ 300x + 100y \leq 100000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + y \leq 1000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

**1.2B** Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

|                |                         |                 |                 |               |               |                      |
|----------------|-------------------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|----------------------|
| $x + 2y = 800$ |                         | $3x + y = 1000$ |                 | $y = 100 + x$ |               | $x \geq 0; y \geq 0$ |
| $x$            | $y = \frac{800 - x}{2}$ | $x$             | $y = 1000 - 3x$ | $x$           | $y = 100 + x$ | Primer cuadrante     |
| 0              | 400                     | 0               | 1000            | 0             | 100           |                      |
| 200            | 300                     | 300             | 100             | 200           | 300           |                      |
| 800            | 0                       | 1000            | 0               |               |               |                      |
|                |                         | 3               |                 |               |               |                      |



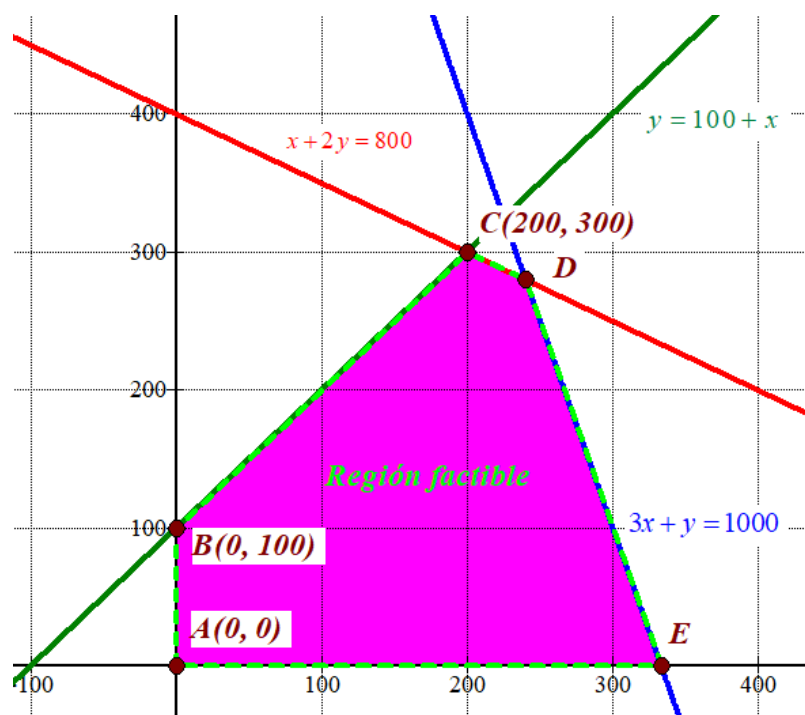
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + y \leq 1000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.}$$

Comprobamos que el punto  $P(100, 100)$  que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 200 \leq 800 \\ 300 + 100 \leq 1000 \\ 100 \leq 100 + 100 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices D y E.

$$D \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x + y = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 800 \\ y = 1000 - 3x \end{cases} \Rightarrow x + 2000 - 6x = 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x = -1200 \Rightarrow x = \frac{1200}{5} = 240 \Rightarrow y = 1000 - 3 \cdot 240 = 280 \Rightarrow \boxed{D(240, 280)}$$

$$E \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 1000 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{3} \Rightarrow \boxed{E\left(\frac{1000}{3}, 0\right)}$$

Los vértices son  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 100)$ ;  $C(200, 300)$ ,  $D(240, 280)$  y  $E\left(\frac{1000}{3}, 0\right)$ .

**1.2C** Valoramos la función objetivo  $I(x, y) = 5x + 7y$  en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 100) \rightarrow I(0, 100) = 5 \cdot 0 + 7 \cdot 100 = 700$$

$$C(200, 300) \rightarrow I(200, 300) = 5 \cdot 200 + 7 \cdot 300 = 3100$$

$$D(240, 280) \rightarrow I(240, 280) = 5 \cdot 240 + 7 \cdot 280 = 3160 \text{ Máximo}$$

$$E\left(\frac{1000}{3}, 0\right) \rightarrow I\left(\frac{1000}{3}, 0\right) = 5 \cdot \frac{1000}{3} + 7 \cdot 0 = \frac{5000}{3} \approx 1666.67$$

Los máximos ingresos se obtienen en el vértice  $D(240, 280)$ . Los máximos ingresos se obtienen fabricando 240 botellas de plástico y 280 tupperes.

**1.2D** Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 3160 €.

**Apartado 2 [4 puntos].** Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Dada la función  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4, & \text{si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2, & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

**Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS].** Estudie la continuidad de la función  $f(x)$ .

**Tarea 2.1B [1 PUNTO].** Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función  $f(x)$  con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.

**Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS].** Calcule el área del recinto delimitado por la curva  $f(x)$  y el eje de abscisas  $OX$  en el intervalo  $[2,6]$ .

**2.1A** En el intervalo  $(-\infty, 6)$  la función tiene la expresión  $f(x) = (x-4)^2 - 4$  que es una función polinómica y por tanto, continua.

En el intervalo  $(6, +\infty)$  la función tiene la expresión  $f(x) = 16 - (x-10)^2$  que es una función polinómica y por tanto, continua.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición  $x = 6$ .

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= (6-4)^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} (x-4)^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} 16 - (x-10)^2 = 16 - (6-10)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = f(6) = 0$$

La función es continua en  $x = 6$ . La función es continua en  $\mathbb{R}$ .

**2.1B** Hallamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 2 \rightarrow \boxed{x=6} \in (-\infty, 6] \\ x-4 = -2 \rightarrow \boxed{x=2} \in (-\infty, 6] \end{cases} \\ 16 - (x-10)^2 = 0 \Rightarrow (x-10)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-10 = 4 \rightarrow \boxed{x=14} \in (6, +\infty) \\ x-10 = -4 \rightarrow x=6 \notin (6, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

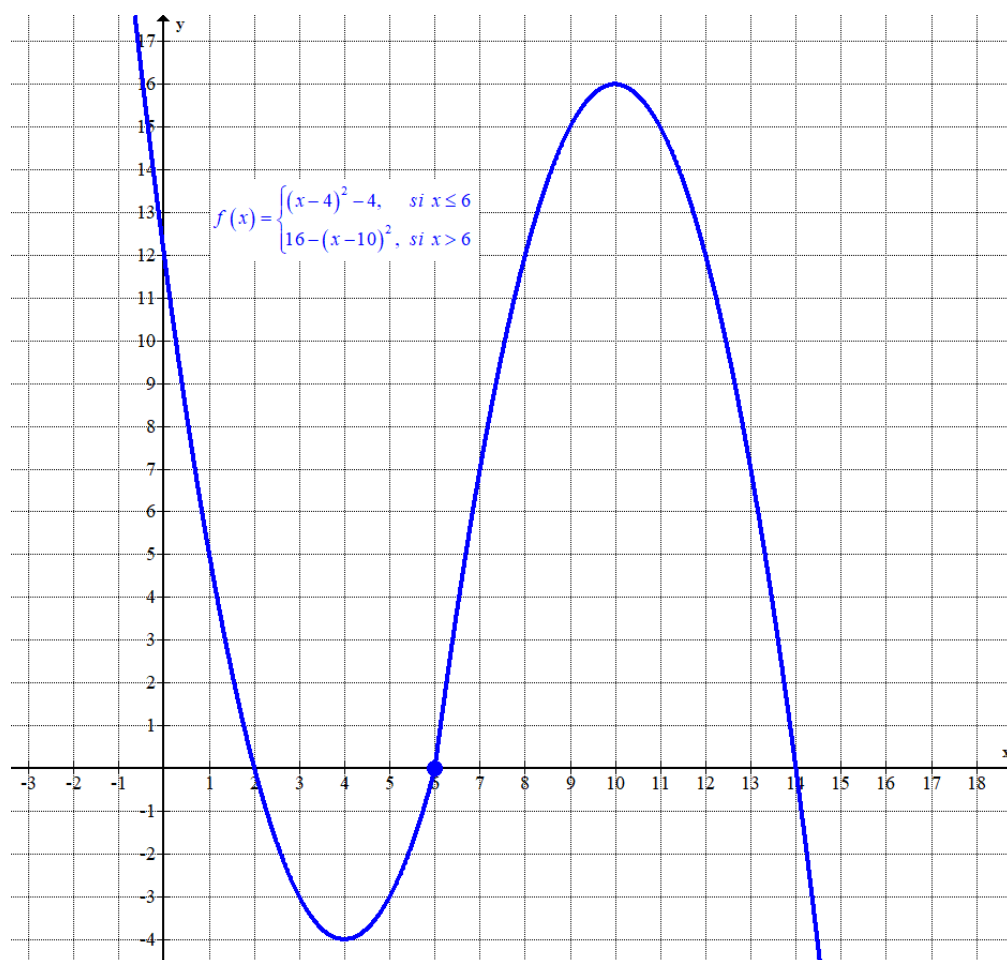
Los puntos de corte con el eje  $OX$  son  $A(2, 0)$ ,  $B(6, 0)$  y  $C(14, 0)$ .

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = (0-4)^2 - 4 = 12$$

El punto de corte con el eje  $OY$  es el punto  $D(0, 12)$ .

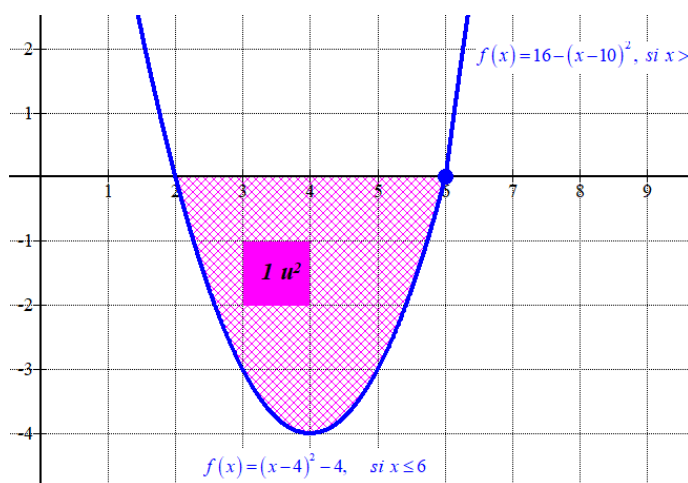
Sabemos que la gráfica son dos trozos de parábolas. Hallamos el vértice de cada una de ellas y dibujamos la gráfica de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-4), & \text{si } x < 6 \\ 2(x-10), & \text{si } x > 6 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-4) = 0 \rightarrow \boxed{x=4} \rightarrow V_1(4, -4) \\ 2(x-10) = 0 \rightarrow \boxed{x=10} \rightarrow V_2(10, 16) \end{cases}$$



**2.1C** El área del recinto delimitado por la curva  $f(x)$  y el eje de abscisas  $OX$  en el intervalo  $[2,6]$  lo representamos en el dibujo. Como la función es negativa en ese intervalo calculamos el valor del área como el valor absoluto de la integral definida entre 2 y 6 de la función.

$$\begin{aligned}
 \int_2^6 f(x) dx &= \int_2^6 (x-4)^2 - 4 dx = \\
 &= \left[ \frac{(x-4)^3}{3} - 4x \right]_2^6 = \\
 &= \left[ \frac{(6-4)^3}{3} - 4 \cdot 6 \right] - \left[ \frac{(2-4)^3}{3} - 4 \cdot 2 \right] = \\
 &= \frac{8}{3} - 24 + \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{-32}{3}}
 \end{aligned}$$



El área tiene un valor de  $\frac{32}{3} \approx 10.667$  unidades cuadradas.

**Apartado 3 [3 puntos].****Opción 1.**

En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:

**Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS].** Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.

**Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS].** Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

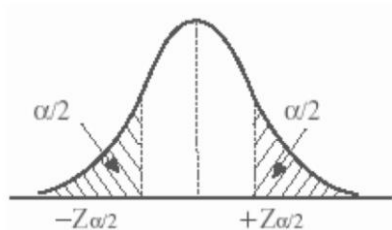
$X$  = el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico (en minutos).

$X = N(\mu, 25)$

Tamaño de muestra =  $n = 100$ . Media muestral =  $\bar{x} = 180$  minutos.

**3.1A** Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$



| z   | 0.00   | 0.01   | 0   |
|-----|--------|--------|-----|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9 |
| 1.8 | 0.9644 | 0.9649 | 0.9 |

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 4.525 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (180 - 4.525, 180 + 4.525) = (175.475, 184.525)$$

**3.1B** Con un nivel de confianza del 97.5% determinamos el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$$

| $z_0$ | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   |     |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0,0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5 |
| 0,1   | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5 |
| 0,2   | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5 |
| 0,3   | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6 |
| 0,4   | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6 |
| 0,5   | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7 |
| 0,6   | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7 |
| 0,7   | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7 |
| 0,8   | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8 |
| 0,9   | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8 |
| 1,0   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8 |
| 1,1   | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8 |
| 1,2   | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8 |
| 1,3   | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9 |
| 1,4   | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9 |
| 1,5   | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9 |
| 1,6   | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9 |
| 1,7   | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9 |
| 1,8   | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9 |
| 1,9   | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9 |
| 2,0   | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9 |
| 2,1   | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9 |
| 2,2   | 0,9854 | 0,9858 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9867 | 0,9 |
| 2,3   | 0,9889 | 0,9891 | 0,9893 | 0,9895 | 0,9896 | 0,9 |

Igualemos el error a 5 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 2.24 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 56 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{56}{5} \Rightarrow n = \left(\frac{56}{5}\right)^2 = 125.44$$

Como  $n$  debe ser entero y superior al “ $n$ ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 126 estudiantes.

**Opción 2.**

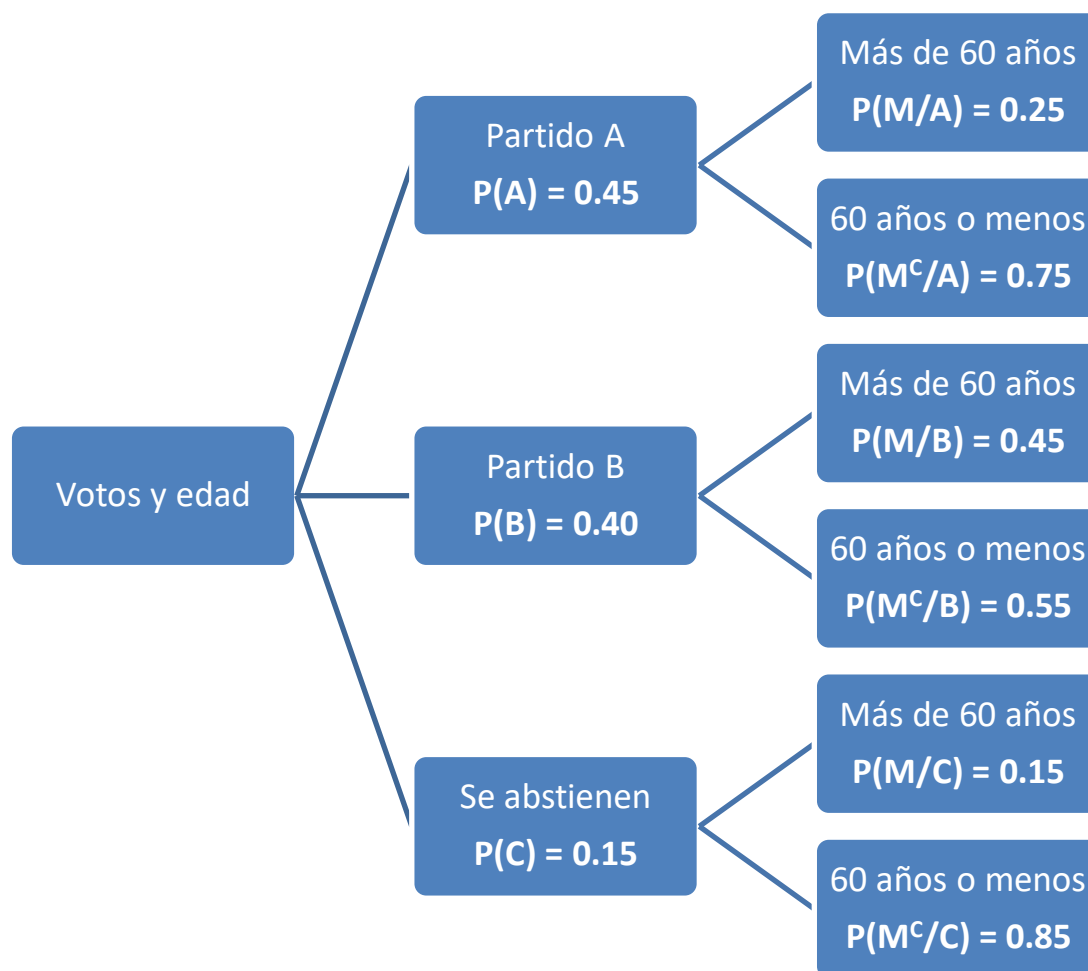
En una cierta ciudad, el 45 % del censo vota al partido A, el 40 % al partido B y el 15 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25 % de los votantes del partido A, el 45 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado. Realice las siguientes tareas que se plantean:

**Tarea 3.2A [1 PUNTO].** ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

**Tarea 3.2B [1 PUNTO].** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

**Tarea 3.2C [1 PUNTO].** Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.



**3.2A** Nos piden calcular  $P(B \cap M^c)$ .

$$P(B \cap M^c) = P(B)P(M^c / B) = 0.4 \cdot 0.55 = \boxed{0.22}$$

**3.2B** Nos piden calcular  $P(M)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M / A) + P(B)P(M / B) + P(C)P(M / C) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.25 + 0.40 \cdot 0.45 + 0.15 \cdot 0.15 = \boxed{0.315}$$

**3.2C** Nos piden calcular  $P(C/M)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)P(M/C)}{P(M)} = \frac{0.15 \cdot 0.15}{0.315} = \frac{1}{14} \approx 0.0714$$

### OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos relativos a absolutos suponiendo que hay una población de 400 personas (elijo esta cifra para que los cálculos salgan exactos, de no conseguirlo la cambio por otra).

El 45 % votan al partido A, esto significa que el partido A tiene  $0.45 \cdot 400 = 180$  votantes.

El 40 % votan al partido B, esto significa que  $0.4 \cdot 400 = 160$  personas votan a B.

El resto se abstiene, es decir,  $400 - 180 - 160 = 60$  personas se abstienen.

El 25 % de los votantes de A son mayores de 60 años, es decir,  $0.25 \cdot 180 = 45$  personas son mayores de 60 años y votantes del partido A.

El 45 % de los votantes de B son mayores de 60 años, es decir,  $0.45 \cdot 160 = 72$  personas son mayores de 60 años y votantes del partido B.

El 15% de las personas que se abstienen son mayores de 60 años, es decir,  $0.15 \cdot 60 = 9$  personas son mayores de 60 años y se abstienen.

Ponemos todos estos datos en una tabla para tenerlos mejor ordenados y claros.

|            | Mayores de 60 años | 60 años o menos | TOTALES    |
|------------|--------------------|-----------------|------------|
| Partido A  | 45                 |                 | 180        |
| Partido B  | 72                 |                 | 160        |
| Abstención | 9                  |                 | 60         |
| TOTALES    |                    |                 | <b>400</b> |

Completamos la tabla.

|            | Mayores de 60 años | 60 años o menos | TOTALES    |
|------------|--------------------|-----------------|------------|
| Partido A  | 45                 | <b>135</b>      | 180        |
| Partido B  | 72                 | <b>88</b>       | 160        |
| Abstención | 9                  | <b>51</b>       | 60         |
| TOTALES    | <b>126</b>         | <b>274</b>      | <b>400</b> |

Aplicando la regla de Laplace respondemos a las cuestiones planteadas.

**Tarea 3.2A.** Hay 88 personas que votan al partido B y que son menores de 60 años. La probabilidad de que la persona elegida al azar vote al partido B y tenga como máximo 60 años vale  $\frac{88}{400} = 0.22$ .

**Tarea 3.2B.** De las 400 habitantes 126 son mayores de 60 años. La probabilidad de que la persona elegida al azar sea mayor de 60 años vale  $\frac{126}{400} = 0.315$ .

**Tarea 3.2C.** Hay 126 habitantes mayores de 60 años y de estos 9 se abstuvieron. Si la persona elegida al azar es mayor de 60 años, la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones vale  $\frac{9}{126} = \frac{1}{14} \approx 0.0714$ .