Universidad de Castilla~La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad

Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.**
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

c) Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) $z_{0.985} = 2.17$, $I.C._{0.97} = \left(\bar{x} \pm z_{0.985}\, {}^{\sigma}\!/\!_{\sqrt{n}}\right) = \left(15 \pm 2.17 \cdot {}^{4}\!/\!_{\sqrt{36}}\right) = (13.5533\,, 16.4467)$

(Obtención del cuantil, 0.25 puntos; planteamiento del intervalo, 0.5 puntos; solución, 0.25)

b) El único valor que se podría modificar es el tamaño muestral, *n*. Para reducir la amplitud, debería aumentar el tamaño muestral.

(Referencia a *n*, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)

c) El valor $\mu = 17$ no está en el intervalo al 97% de confianza, luego no estará en el intervalo al 95% de confianza, puesto que tiene menor amplitud. Por tanto, no se puede aceptar la afirmación.

(Conclusión, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7.2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Solución:

P_1= calificación de la pregunta 1; P_2= calificación de la pregunta 2; P_3= calificación de la pregunta 3.

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 7.2 \\ p_1 = 1.4 \cdot p_2 \\ p_3 = 2 \cdot (p_1 + p_2) \end{cases} \rightarrow 1.4 \cdot p_2 + p_2 + 2 \cdot (1.4 \cdot p_2 + p_2) = 7.2 \rightarrow 7.2 \cdot p_2 = 7.2 \rightarrow p_2 = 1$$

Luego $\boldsymbol{p_1 = 1.4} \quad \boldsymbol{p_2 = 1} \quad \boldsymbol{p_3 = 4.8}$

(Por cada ecuación correcta, 0.5 puntos; desarrollo de la resolución, 0.5 puntos; solución correcta, 0.5 puntos)

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & si\ x\le k\\ x^2-4x+9 & si\ x>k\end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x=k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k=1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

Solución:

a.1) Condición de continuidad en $x=k$, $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)=\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=f(k)$

$\lim\limits_{x\to k^-}(-x^2-3x+10)=-k^2-3k+10$

$\lim\limits_{x\to k^+}(x^2-4x+9)=k^2-4k+9$ $\quad \lim\limits_{x\to k^-} f(x)=\lim\limits_{x\to k^+} f(x)\to(-k^2-3k+10)=(k^2-4k+9)$

luego $2k^2-k-1=0\to \begin{matrix}k=-0.5\\ k=1\end{matrix}$

(Condición de continuidad, 0.25 puntos; planteamiento de la ecuación, 0.25 puntos; solución correcta, 0.5 puntos)

a.2) $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & si\ x\le 1\\ x^2-4x+9 & si\ x>1\end{cases}$;

$f'(x)=\begin{cases}-2x-3 & si\ x\le 1\\ 2x-4 & si\ x>1\end{cases}$; $f'(x)=0\to\begin{cases}x=-1.5\\ x=2\end{cases}$

Como $\begin{matrix}f''(-1.5)=-2<0 & En\ x=-1.5\ hay\ un\ máximo\ relativo\\ f''(2)=2>0 & En\ x=2\ hay\ un\ mínimo\ relativo\end{matrix}$. $\quad f(1)=6$ No es extremo.

(Obtención de cada extremo, 0.25 puntos; justificación de máximo-mínimo, 0.25 puntos)

a.3) $f'(x)=\begin{cases}-2x-3 & si\ x\le 1\\ 2x-4 & si\ x>1\end{cases}$; $\begin{cases}f'(x)<0\to x>-1.5\\ f'(x)<0\to x<2\end{cases}$. Luego $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-1.5\,,2)$ y creciente en los intervalos $(-\infty\,,-1.5)\cup(2,+\infty)$.

(Condición de crecimiento-decrecimiento, 0.25 puntos, obtención de intervalos, 0.5 puntos)

Apartado b) Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2,-3)$ y un punto de inflexión en $(1,-1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a,b y c. **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X=C\cdot X+I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Solución:

b.1) $\begin{matrix}f'(2)=0\to 12a+4b=0\\ f(2)=-3\to 8a+4b+c=-3\\ f''(1)=0\to 6a+2b=0\\ f(1)=-1\to a+b+c=-1\end{matrix}\to\begin{matrix}a=1\\ b=-3\\ c=1\end{matrix}$

(Planteamiento de cada ecuación, 0.25 puntos; resolución del sistema, 0.5 puntos)

b.2) $(A \cdot B - C) \cdot X = I \rightarrow X = (A \cdot B - C)^{-1}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (A \cdot B - C) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \det\big((A \cdot B - C)\big) = -4$$

Luego $(A \cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

(Planteamiento de la ecuación, 0.25 puntos; producto de matrices, 0.25 puntos; inversa y solución, 0.5 puntos)

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

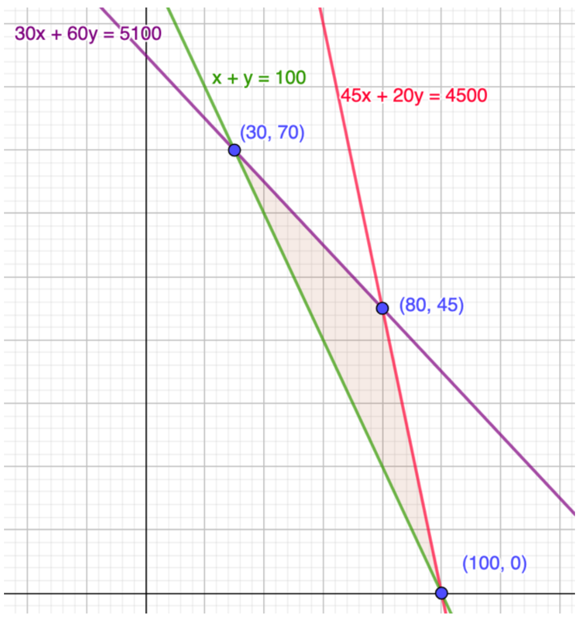
Solución:

a.1) $a = número\ de\ paquetes\ de\ tipo\ A$; $\quad b = número\ de\ paquetes\ de\ tipo\ B$

Función objetivo: $Beneficio(a, b) = 20 \cdot a + 17 \cdot b \rightarrow \max\limits_{a,b}(20 \cdot a + 17 \cdot b)$

Restricciones del problema:
$$\begin{array}{r} trabajo\ manual \rightarrow 30a + 60b \leq 5100 \\ trabajo\ máquinas \rightarrow 45a + 20b \leq 4500 \\ a + b \geq 100 \end{array}$$

Recinto factible:



(Función objetivo, 0.5 puntos; restricciones, 0.25 puntos por cada inecuación; región factible, 0.5 puntos y vértices: 0.25 puntos)

a.2) $Ben(30,70) = 1790 \quad Ben(80,45) = 2365 \quad Ben(100,0) = 2000$. Luego el beneficio máximo se obtiene con 80 paquetes de tipo A y 45 de tipo B.
(Valor del beneficio en los tres vértices y máximo, 0.5 puntos)

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas **independientes**: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %. Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b. **(1.25 puntos)**

Solución:

$A = Superar\ la\ prueba\ A \rightarrow P(A) = 0.1$
$B = Superar\ la\ prueba\ B \rightarrow P(B) = 0.4$
$C = Superar\ la\ prueba\ C \rightarrow P(C) = 0.2$

b.1) $P(Superar\ la\ selección) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.008$
(Resolución, 0.5 puntos)

b.2).
$$P(Fallar\ sólo\ en\ A) = P(\bar{A} \cap B \cap C) = 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.072$$
$$P(Fallar\ sólo\ en\ B) = P(A \cap \bar{B} \cap C) = 0.1 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.012$$
$$P(Fallar\ sólo\ en\ C) = P(A \cap B \cap \bar{C}) = 0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.032$$
$$P(Fallar\ sólo\ en\ una\ prueba) = P\big((\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})\big) =$$
$$= 0.072 + 0.012 + 0.032 = 0.116$$
(Cálculo de la probabilidad parciales, 0.25 puntos; cálculo de la global, 0.25 puntos)

b.3) $P\left(Fallar\ sólo\ en\ B / Falla\ sólo\ en\ una\ prueba\right) = \frac{P(A \cap \bar{B} \cap C)}{P(Fallar\ sólo\ en\ una\ prueba)} = \frac{0.012}{0.116} = 0.103$
(Resolución, 0.25 puntos)

b.4) $V(t) = at^3 + bt^2 + t \qquad V(1) = 150 \rightarrow a + b + 1 = 150$
$V'(t) = 3at^2 + 2bt + 1 \qquad V'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + 1 = 0$ Luego $a = -299$, $b = 448$
(Por derivada, 0.25 puntos; por cada ecuación, 0.25 puntos; resolución, 0.5 puntos)