



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2024/2025

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES**

Tiempo: 1 HORA Y 30 MINUTOS

El examen consta de 4 ejercicios. La PARTE 1 consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales se puntúa con 2 puntos: el primero de carácter competencial y obligatorio; el segundo puede elegirse entre dos opciones dadas. En las PARTES 2 y 3 se realizará un ejercicio en cada una, puntuado con 3 puntos, con posibilidad de elegir entre dos opciones.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 350 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k: número real), se pide:

- (1 PUNTO)** Calcula para qué valores de "k" la matriz A posee rango 3.

- (1 PUNTO)** Para $k=1$, calcula una matriz X que verifique la igualdad $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

(Opción 2)

2.2. **(2 PUNTOS)** Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los

objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanes, bolas y llaveros) que han vendido.

PARTE 2. ANÁLISIS

EJERCICIO 3

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 21x + b$ (a y b: números reales), se pide:

- (0.75 PUNTOS) Calcula qué valores deben tomar “a” y “b” para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=1$ y la gráfica de $f(x)$ pase por el punto (0, 3).
- (1.25 PUNTOS) Para $a=-12$ y $b=100$; calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0,8]$.
- (1 PUNTO) Calcula el valor que debe tomar “a” para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21) dx = 30$$

(Opción 2)

3.2. El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función:

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8, \quad 0 \leq t \leq 6$$

siendo t: número de meses transcurridos

- (1 PUNTO) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$ y cuál es el valor de dicho beneficio.
- (1 PUNTO) Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$.
- (1 PUNTO) Calcula el área limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Resuelve los apartados A) y B)

A) (1 PUNTO) El examen de cierta materia se compone de dos partes; una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:

- Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.
- Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

B) (2 PUNTOS) El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 100 gramos.

B.1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 cobayas y su peso medio ha sido de 255 gramos. Calcula un intervalo de confianza del 93% para estimar μ .

B.2) Supongamos que $\mu = 250$ gramos: si se considera una muestra aleatoria con 25 cobayas, calcula la probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos.

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** Una empresa fabrica tres tipos de piezas mecánicas A, B y C. Para dicha fabricación se dispone de tres máquinas distintas M1, M2 y M3. El número de piezas fabricadas por cada máquina se indica en la siguiente tabla:

	Piezas tipo A	Piezas tipo B	Piezas tipo C	Total
M1	50	60	40	150
M2	40	75	55	170
M3	45	65	70	180
Total	135	200	165	500

Se elige una pieza al azar. Se pide:

A.1) Calcula la probabilidad de que no haya sido fabricada por la máquina 1.

A.2) Si la pieza es de tipo B, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina 2.

B) **(2 PUNTOS)** El peso de las mujeres estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 6 kg.

B.1) Se toma una muestra aleatoria con 64 mujeres de dicha universidad y la media de sus pesos es 66 kg. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la media μ .

B.2) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que al estimar μ con la media muestral al mismo nivel de confianza, el error sea a lo sumo de 2 kg?

SOLUCIONES

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

- a) Llamamos “x” al número de joyas A producidas e “y” al número de joyas B.

Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Beneficio
número de joyas A (x)	2x	4x	60x
número de joyas B (y)	4y	2y	80y
TOTAL	2x + 4y	4x + 2y	60x + 80y

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 60x + 80y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

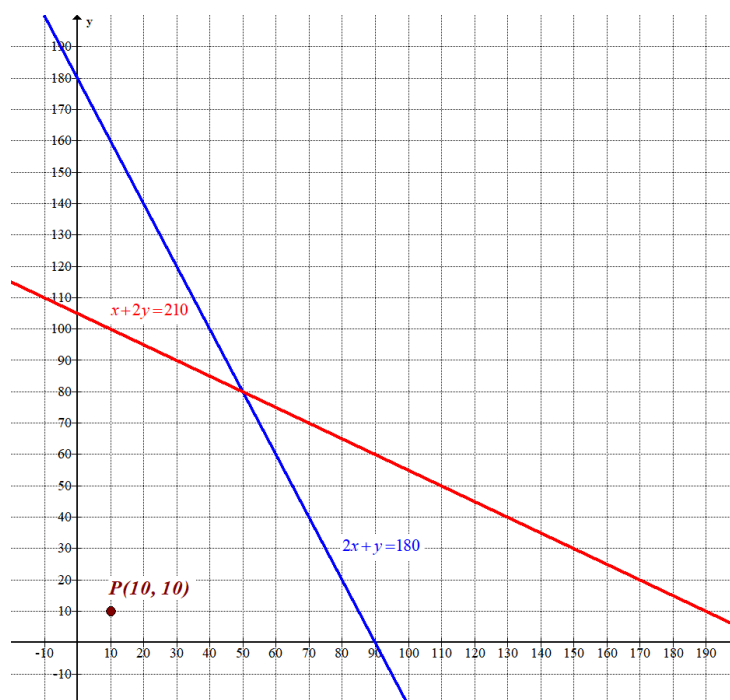
La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata $\rightarrow 2x + 4y \leq 420; 4x + 2y \leq 360$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 4y \leq 420 \\ 4x + 2y \leq 360 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 210 \\ 2x + y \leq 180 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

	$x + 2y = 210$	$2x + y = 180$												
$x \geq 0; y \geq 0$	$x \quad y = \frac{210 - x}{2}$	$x \quad y = 180 - 2x$												
El primer cuadrante	<table> <tr><td>0</td><td>105</td></tr> <tr><td>50</td><td>80</td></tr> <tr><td>210</td><td>0</td></tr> </table>	0	105	50	80	210	0	<table> <tr><td>0</td><td>180</td></tr> <tr><td>50</td><td>80</td></tr> <tr><td>90</td><td>0</td></tr> </table>	0	180	50	80	90	0
0	105													
50	80													
210	0													
0	180													
50	80													
90	0													



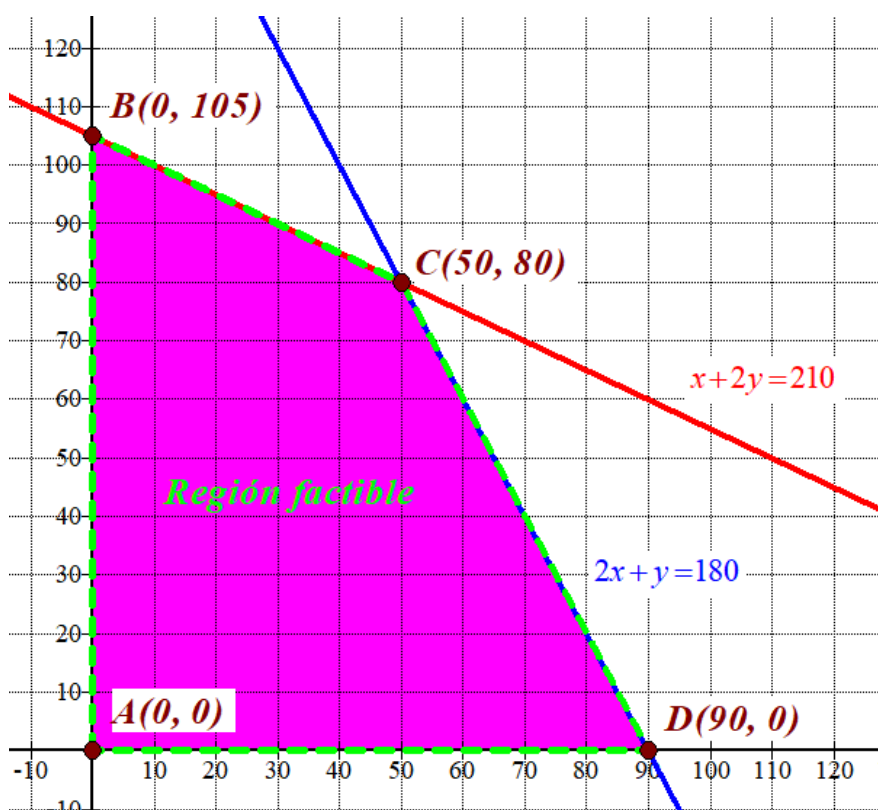
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 210 \\ 2x + y \leq 180 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 10 + 20 \leq 210 \\ 20 + 10 \leq 180 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! }$$

Coloreamos de rosa la región factible.



c) Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 105)$, $C(50, 80)$ y $D(90, 0)$.

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 60x + 80y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 105) \rightarrow B(0, 105) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 105 = 8400$$

$$C(50, 80) \rightarrow B(50, 80) = 60 \cdot 50 + 80 \cdot 80 = 9400 \text{ Máximo}$$

$$D(90, 0) \rightarrow B(90, 0) = 60 \cdot 90 + 80 \cdot 0 = 5400$$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto $C(50, 80)$.

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación de 50 joyas tipo A y 80 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 9400 €.

EJERCICIO 2**Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)****(Opción 1)**

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k: número real), se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de “k” la matriz A posee rango 3.

b) **(1 PUNTO)** Para $k=1$, calcula una matriz X que verifique la igualdad $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

a) Para que la matriz A tenga rango 3 su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 4k^2 + 12(k+3) - 12 - 32k = 4k^2 + 12k + 36 - 12 - 32k = 4k^2 - 20k + 24$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4k^2 - 20k + 24 = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3=k} \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2=k} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para $k=2$ y $k=3$. La matriz A tiene rango 3 para cualquier valor de “k” distinto de 2 y de 3.

b) Para $k=1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y sabemos que su determinante es no nulo, por lo

que tiene inversa. La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 48 - 12 - 32 = 8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -28 & -12 & 12 \\ 12 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$. Terminamos de calcular la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -77/2 - 27/2 + 54 \\ 33/2 + 9/2 - 18 \\ 11/2 + 9/2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Opción 2)

2.2. (2 PUNTOS) Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanes, bolas y llaveros) que han vendido.

Llamamos “x” al número de imanes, “y” al número de bolas y “z” al número de llaveros.

“Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €” $\rightarrow x + 1.5y + 2z = 87$

“El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes” $\rightarrow y = 0.80 \cdot x$

“Con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2 € menos que con la venta de los llaveros” $\rightarrow 1.5y = 2z - 2$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y + 2z = 87 \\ y = 0.80 \cdot x \\ 1.5y = 2z - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1.5 \cdot 0.8x + 2z = 87 \\ 1.5 \cdot 0.8x = 2z - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.2x + 2z = 87 \\ 1.2x = 2z - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.2x + 2z = 87 \\ 0.6x = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.2x + 2z = 87 \\ 0.6x + 1 = z \end{array} \right\} \Rightarrow 2.2x + 2(1 + 0.6x) = 87 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.2x + 2 + 1.2x = 87 \Rightarrow 3.4x = 85 \Rightarrow \boxed{x = \frac{85}{3.4} = 25} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 1 + 0.6 \cdot 25 = 16} \\ \boxed{y = 0.8 \cdot 25 = 20} \end{array} \right.$$

Se han vendido 25 imanes, 20 bolas navideñas y 16 llaveros.

PARTE 2. ANÁLISIS**EJERCICIO 3****Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)****(Opción 1)****3.1.** Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 21x + b$ (a y b : números reales), se pide:

- a) **(0.75 PUNTOS)** Calcula qué valores deben tomar “ a ” y “ b ” para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=1$ y la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0, 3)$.
- b) **(1.25 PUNTOS)** Para $a=-12$ y $b=100$; calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 8]$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor que debe tomar “ a ” para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21) dx = 30$$

- a) Si la función tiene un extremo relativo en $x=1$ la derivada de la función debe anularse para este valor: $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = x^3 + ax^2 + 21x + b &\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 21 \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 2a + 24 \Rightarrow 2a = -24 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-24}{2} = -12}$$

Tenemos que $a = -12$. La función queda $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + b$.

También sabemos que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 3)$, por lo que $f(0) = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 3 \\ f(x) &= x^3 - 12x^2 + 21x + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores buscados son $a = -12$ y $b = 3$.

- b) Para $a = -12$ y $b = 100$ la función queda $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 100$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 100 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 24x + 21$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 21 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 7}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = \boxed{7=x} \\ \frac{8-6}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Ambos valores pertenecen al intervalo $[0, 8]$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale
 $f'(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 24 \cdot 0.5 + 21 = 9.75 > 0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,7)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale
 $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 21 = -15 < 0$. La función decrece en $(1,7)$.
- En el intervalo $(7,8)$ tomamos $x=7.5$ y la derivada vale
 $f'(7.5) = 3 \cdot 7.5^2 - 24 \cdot 7.5 + 21 = 9.75 > 0$. La función crece en $(7,8)$.

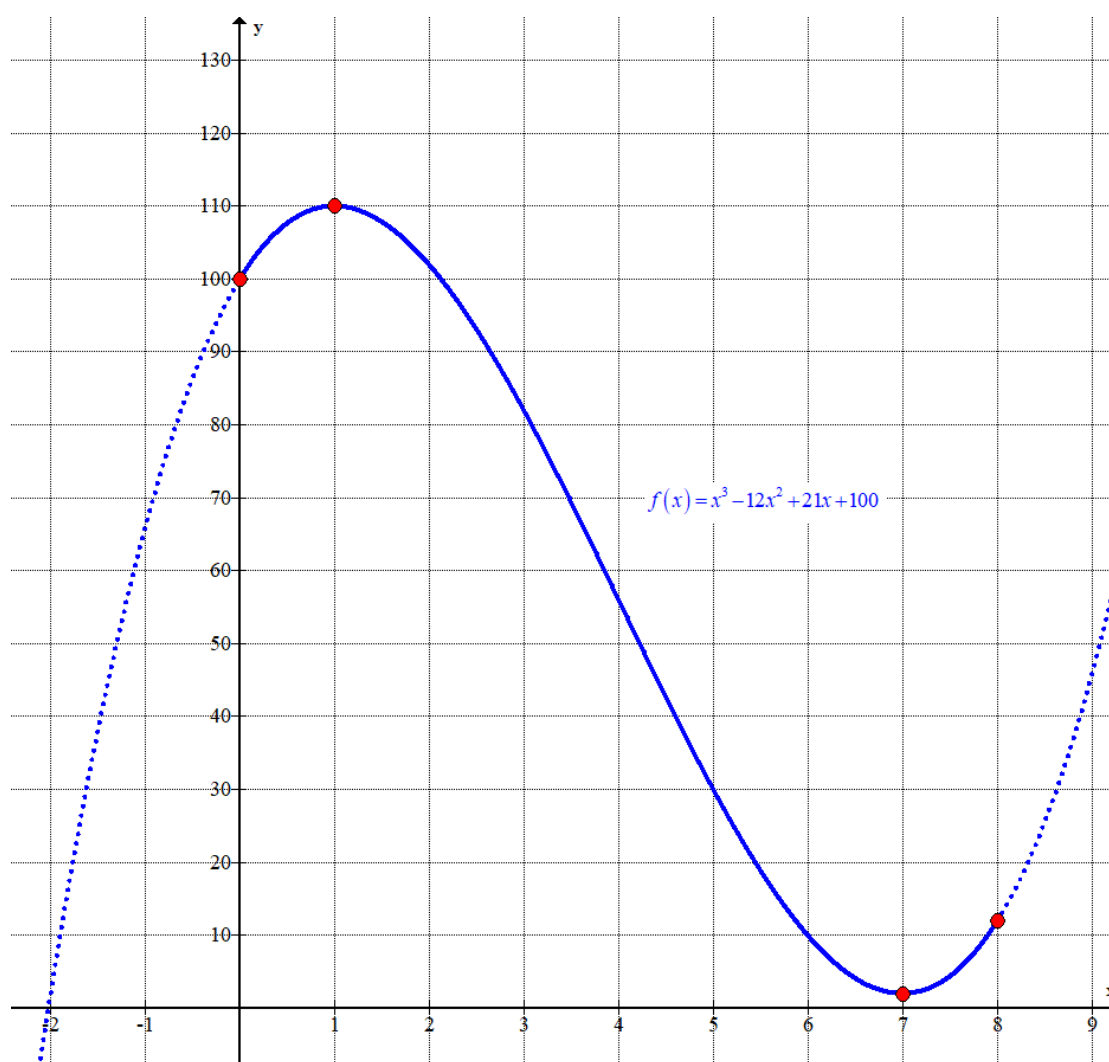
La función presenta un máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=7$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los dos puntos críticos obtenidos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 + 100 = 100 \\ f(1) &= 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 + 100 = 110 \text{ Máximo} \\ f(7) &= 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 21 \cdot 7 + 100 = 2 \text{ Mínimo} \\ f(8) &= 8^3 - 12 \cdot 8^2 + 21 \cdot 8 + 100 = 12 \end{aligned} \right\}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=1$, siendo también máximo absoluto.

La función presenta un mínimo relativo en $x=7$. Siendo también mínimo absoluto.



c) Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21) dx &= \left[x^3 + ax^2 + 21x \right]_0^2 = \\ &= \left[2^3 + a \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 \right] - \left[0^3 + a \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 \right] = 8 + 4a + 42 = \boxed{4a + 50}\end{aligned}$$

Averiguamos cuando este resultado vale 30.

$$4a + 50 = 30 \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-20}{4} = -5}$$

Se cumple lo pedido para $a = -5$.

(Opción 2)

3.2. El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función:

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8, \quad 0 \leq t \leq 6$$

siendo t : número de meses transcurridos

- a) **(1 PUNTO)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$ y cuál es el valor de dicho beneficio.
- b) **(1 PUNTO)** Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el área limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada del beneficio.

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = \boxed{4=t} \\ \frac{6-2}{2} = \boxed{2=t} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, 6]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $(4, 6]$.

La función crece en $[0, 2) \cup (4, 6]$ y decrece en $(2, 4)$.

La función presenta un máximo relativo en $t = 2$ y un mínimo relativo en $t = 4$.

Valoramos el beneficio en estos puntos críticos y en los extremos del intervalo para determinar el máximo absoluto del beneficio.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 8 = 8 \\ f(2) &= 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 8 = 28 \\ f(4) &= 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 8 = 24 \\ f(6) &= 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 + 8 = \textcolor{red}{44} \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

El beneficio máximo se consigue en el sexto mes siendo este beneficio máximo de 44000 €.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda (candidatos a puntos de inflexión).

$$f'(t) = 3t^2 - 18t + 24 \Rightarrow f''(t) = 6t - 18$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow 6t - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 3}$$

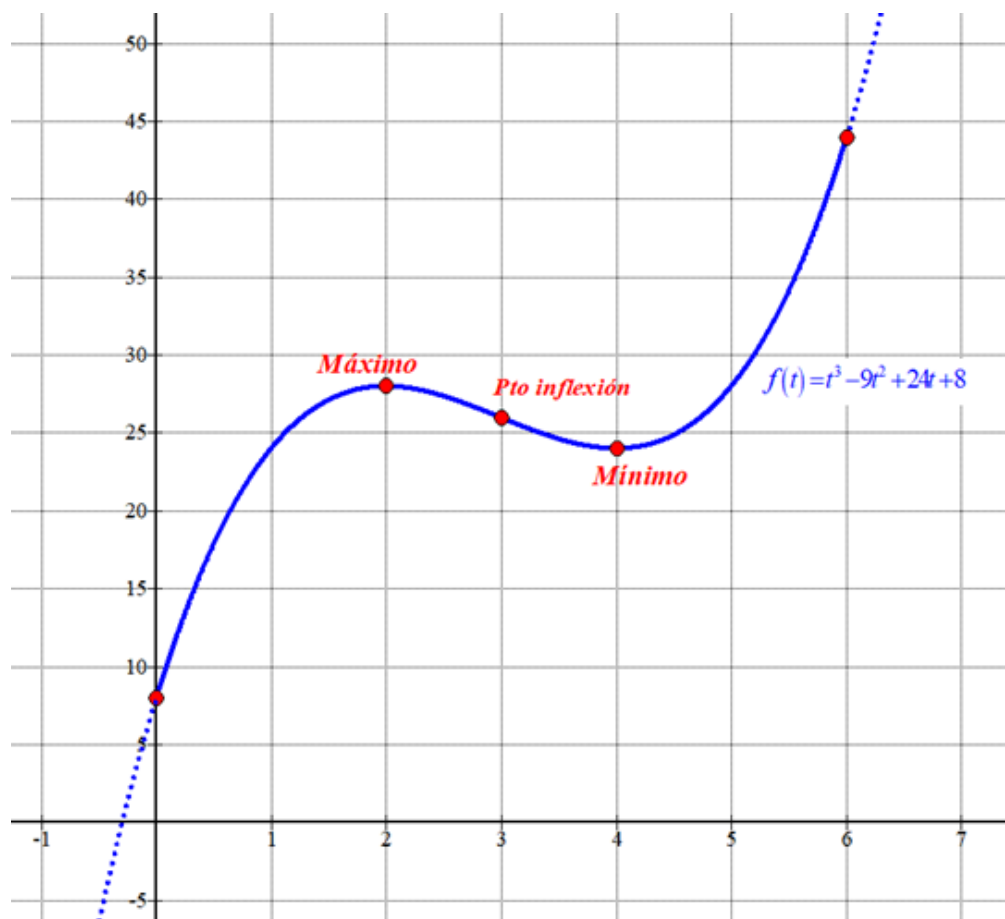
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $t = 3$.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 \cdot 1 - 18 = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 6]$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale $f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(3, 6]$.

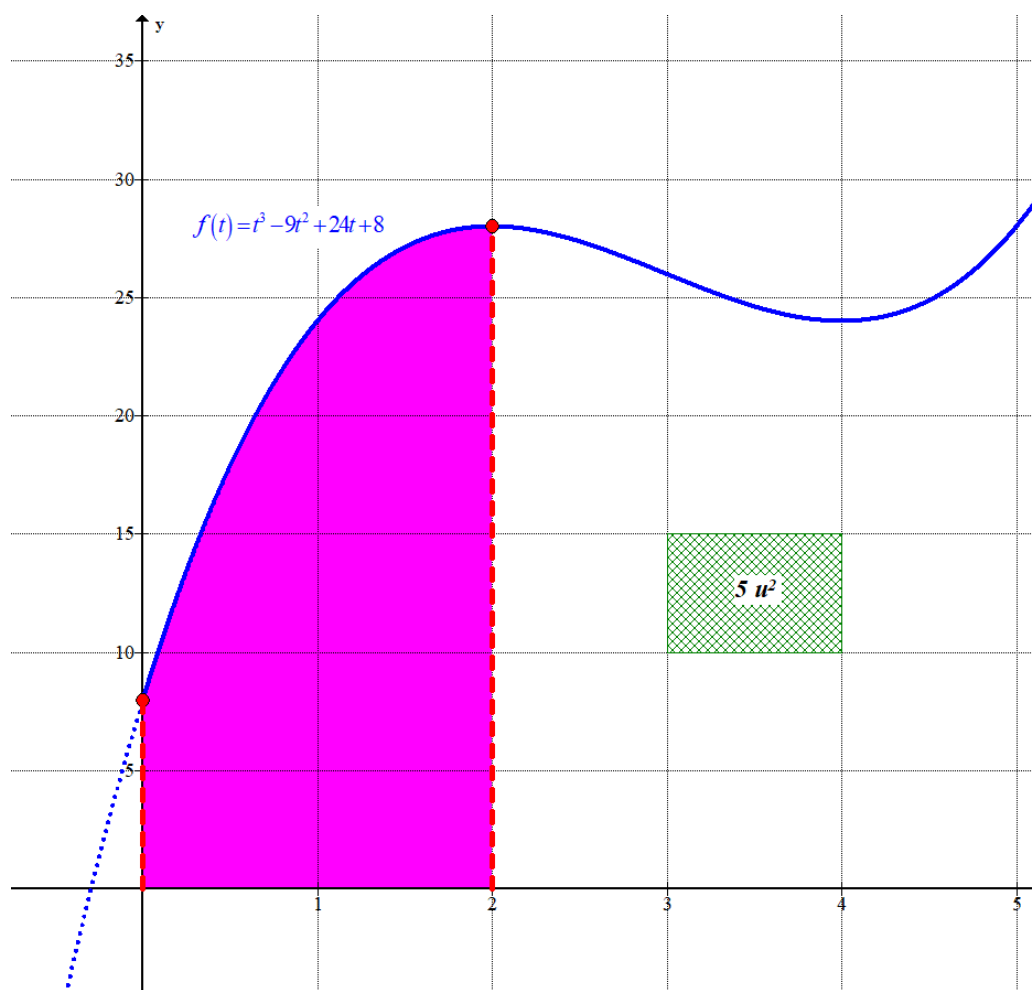
La función presenta un punto de inflexión en $t = 3$. Como $f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + 8 = 26$ las coordenadas del punto de inflexión son $(3, 26)$.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8$
0	8
2	28
3	26
4	24
6	44



- c) Vemos en el dibujo la región de la cual queremos hallar el área. Su valor está situado entre 40 y 50 unidades cuadradas (contando cuadraditos de 5 unidades cuadradas cada uno).



Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 t^3 - 9t^2 + 24t + 8 dt = \left[\frac{t^4}{4} - 3t^3 + 12t^2 + 8t \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 3 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 \right] = 4 - 24 + 48 + 16 = 44 \end{aligned}$$

El área limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$ tiene un valor de 44 unidades cuadradas.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**EJERCICIO 4****Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)****(Opción 1)****4.1.** Resuelve los apartados A) y B)

- A) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes; una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:
- A1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.
- A2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

- B) **(2 PUNTOS)** El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 100 gramos.
- B.1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 cobayas y su peso medio ha sido de 255 gramos. Calcula un intervalo de confianza del 93% para estimar μ .
- B.2) Supongamos que $\mu = 250$ gramos: si se considera una muestra aleatoria con 25 cobayas, calcula la probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos.

A) Realizamos una tabla de contingencia.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20		70
Suspenden teórica			
	40		100

Completamos la tabla.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20	50	70
Suspenden teórica	20	10	30
	40	60	100

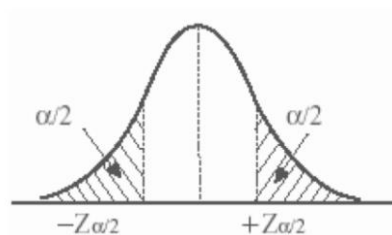
- A.1) La parte teórica la han aprobado el 70% y el 20% han aprobado la parte teórica y la práctica. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un alumno que ha aprobado la parte teórica apruebe la parte práctica es de $\frac{20}{70} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$.

- A.2) Los alumnos que aprueban solo la parte práctica son el 20 %, hay otro 50 % que solo aprueba la parte teórica y un 20% que aprueban las dos partes. Por lo tanto, la probabilidad de que al elegir un alumno al azar este apruebe alguna de las dos partes vale $\frac{20+50+20}{100} = 0.9$.

B) Sea X = El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu, 100)$.

- B.1) Tenemos que tamaño muestra $n = 100$ y Media $= \bar{x} = 255$ gramos.
Con un nivel de confianza del 93 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.81+1.82}{2} = 1.815$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51196
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59094
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79672
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94844
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818
1.8	0.96485	0.96562	0.96639	0.96714

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.815 \cdot \frac{100}{\sqrt{100}} = 18.15 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (255 - 18.15, 255 + 18.15) = (236.85, 273.15)$$

B.2) $X = N(250, 100)$. La distribución de los pesos medios de muestras de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media (250) y con desviación típica $\sigma = \frac{100}{\sqrt{25}} = 20$ gramos.

$$\overline{X}_{25} = N(250, 20)$$

Nos piden calcular $P(230 \leq \overline{X}_{25} \leq 280)$.

$$\begin{aligned}
 P(230 \leq \overline{X}_{25} \leq 280) &= \{ \text{Tipificamos} \} = \\
 &= P\left(\frac{230 - 250}{20} \leq Z \leq \frac{280 - 250}{20}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = \\
 &= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \geq 1) = \\
 &= P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \\
 &= 0.93319 - [1 - 0.84134] = 0.77453
 \end{aligned}$$

z	+0.00	+0.01
0.0	0.50000	0.503
0.1	0.53983	0.543
0.2	0.57926	0.583
0.3	0.61791	0.621
0.4	0.65542	0.659
0.5	0.69146	0.694
0.6	0.72575	0.729
0.7	0.75804	0.761
0.8	0.78814	0.791
0.9	0.81594	0.818
1.0	0.84134	0.843
1.1	0.86433	0.866
1.2	0.88493	0.886
1.3	0.90320	0.904
1.4	0.91924	0.920
1.5	0.93319	0.934

La probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos es de 0.77453.

(Opción 2)**4.2.** Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** Una empresa fabrica tres tipos de piezas mecánicas A, B y C. Para dicha fabricación se dispone de tres máquinas distintas M1, M2 y M3. El número de piezas fabricadas por cada máquina se indica en la siguiente tabla:

	Piezas tipo A	Piezas tipo B	Piezas tipo C	Total
M1	50	60	40	150
M2	40	75	55	170
M3	45	65	70	180
Total	135	200	165	500

Se elige una pieza al azar. Se pide:

A.1) Calcula la probabilidad de que no haya sido fabricada por la máquina 1.

A.2) Si la pieza es de tipo B, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina 2.

B) **(2 PUNTOS)** El peso de las mujeres estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 6 kg.

B.1) Se toma una muestra aleatoria con 64 mujeres de dicha universidad y la media de sus pesos es 66 kg. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la media μ .

B.2) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que al estimar μ con la media muestral al mismo nivel de confianza, el error sea a lo sumo de 2 kg?

A) Aplicamos la regla de Laplace utilizando los datos ofrecidos en la tabla.

A.1) Se fabrican un total de 500 piezas y la máquina 1 fabrica 150. La probabilidad de que al elegir una pieza esta no haya sido fabricada por la máquina 1 vale $\frac{500-150}{500} = 0.7$.

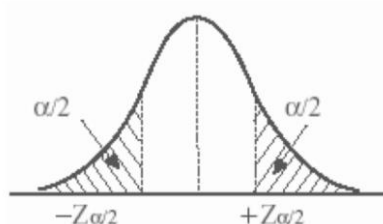
A.2) Del tipo B se fabrican 200 piezas y la máquina 2 ha fabricado 75 de estas piezas. La probabilidad de que una pieza de tipo B haya sido fabricada por la máquina 2 vale $\frac{75}{200} = 0.375$.

B) Sea X = El peso en kg de las mujeres estudiantes de cierta universidad. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu, 6)$.

B.1) Tenemos que tamaño muestra $n = 64$ y Media $= \bar{x} = 66$ kg.

Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56759	0.57142
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85770	0.85993
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = 1.93125 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (66 - 1.93125, 66 + 1.93125) = (64.06875, 67.93125)$$

B.2) Sabemos que $X = N(\mu, 6)$ y que $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Utilizamos la fórmula del error para despejar n con un error de 2 kg.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{15.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{15.45}{2} \Rightarrow n = 7.725^2 \approx 59.675$$

Para que el error cometido en la estimación sea menor de 2 kg la muestra debe ser de un mínimo de 60 mujeres estudiantes de cierta universidad.