

Prueba de Acceso a la Universidad

CURSO: 2024-2025

upna

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones: las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta debe seleccionar sólo una opción (A o B) y contestar a todos sus apartados.

PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

- Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)
- Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

PREGUNTA 2:

En un estudio sobre la evolución de una determinada especie animal se ha determinado que la población, en miles de ejemplares, viene dada por la función:

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en años. Responda a las siguientes cuestiones:

- Determine la población a los 6 años y la población a largo plazo. ¿Es la población una función continua del tiempo? (0.75 puntos)
- ¿Cuándo se alcanza la máxima población? ¿Cuál es su valor? Determine para qué periodos de tiempo la población crece o decrece. (1.25 puntos)
- Represente gráficamente la función de población. (0.5 puntos)

PREGUNTA 3:

El ayuntamiento de una ciudad hace una encuesta a 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres) sobre sus hábitos de movilidad (transporte público, vehículo propio o caminar). Observaron que 60 mujeres y 40 hombres encuestados prefieren el transporte público, el 16% de las mujeres y el 10% de los hombres prefieren usar su propio vehículo, y el resto de las personas prefiere caminar.

- Se elige un joven al azar. Calcule la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que prefiere caminar. (1 punto)
- Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera utilizar el transporte público. (0.75 puntos)
- Se eligen al azar tres jóvenes sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que los tres prefieran usar su propio vehículo. (0.75 puntos)

PREGUNTA 4**OPCIÓN A:**

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de **a** y **b** para que se cumpla $AB = BA$. (1 punto)
- Calcule el área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x . (1.5 puntos)

OPCIÓN B:

i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación

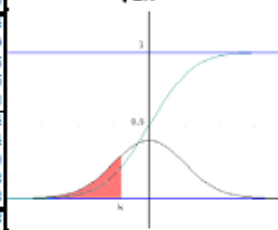
matricial $XD - C = I$. (1.25 puntos)

ii) En un barrio de una ciudad, el importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda sigue una distribución normal con varianza 22500 euros². Se selecciona una muestra de 74 viviendas en la zona, obteniéndose una media muestral de 738 euros. Calcule un intervalo de confianza al 96% para el importe medio mensual del alquiler de una vivienda. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

Tabla de la distribución normal estándar $Z \sim N(0,1)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1738	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,2	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,3	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,4	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,5	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,6	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,7	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,8	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,9	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
1,0	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,2	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,3	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,4	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,5	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,6	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,7	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,8	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,9	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
2,0	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,1	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,2	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,3	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,4	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,5	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,6	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,7	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,8	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,9	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
3,0	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,1	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,2	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,3	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,4	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,5	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-t^2/2} dt$$



SOLUCIONES

PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)

ii) Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

a) Llamamos “x” al número de cajas de pastas de 250 g, “y” al número de cajas de 500 g y “z” al número de cajas de 1 kg.

“Cierta día se envasaron 65 cajas en total” $\rightarrow x + y + z = 65$.

“Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g)” $\rightarrow x = 5 + y$.

“Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros” $\rightarrow$ Se envasaron un total de $\frac{720}{24} = 30$ kilos de galletas $\rightarrow 0.250 \cdot x + 0.500 \cdot y + 1 \cdot z = 30$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ 0.250 \cdot x + 0.500 \cdot y + 1 \cdot z = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ x + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ x + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 + y + y + z = 65 \\ 5 + y + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 60 \\ 3y + 4z = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 60 - 2y \\ 3y + 4z = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + 4(60 - 2y) = 115 \Rightarrow 3y + 240 - 8y = 115 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -125 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-125}{-5} = 25} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 60 - 2 \cdot 25 = 10} \\ \boxed{x = 5 + 25 = 30} \end{array} \right.$$

Se han vendido 30 cajas de galletas de 250 gramos, 25 cajas de 500 gramos y 10 de 1 kilogramo.

PREGUNTA 2:

En un estudio sobre la evolución de una determinada especie animal se ha determinado que la población, en miles de ejemplares, viene dada por la función:

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en años. Responda a las siguientes cuestiones:

- Determine la población a los 6 años y la población a largo plazo. ¿Es la población una función continua del tiempo? (0.75 puntos)
- ¿Cuándo se alcanza la máxima población? ¿Cuál es su valor? Determine para qué periodos de tiempo la población crece o decrece. (1.25 puntos)
- Represente gráficamente la función de población. (0.5 puntos)

i) Calculamos el valor de $P(6)$.

$$P(6) = 6 + \frac{12 \cdot 6}{6^2 + 4} = 7.8$$

La población a los 6 años es de 7800 ejemplares.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4} = 6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{12t}{t^2} = 6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{12}{t} = 6 + \frac{12}{\infty} = 6 + 0 = 6$$

La población a largo plazo tiende a ser de 6000 ejemplares.

La función es continua pues el denominador ($t^2 + 4$) nunca se anula.

ii) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4} \Rightarrow P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + 4) - 2t(12t)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{12t^2 + 48 - 24t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 48 - 12t^2 = 0 \Rightarrow 4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

Estudiamos la evolución de la población antes y después del segundo año.

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{48 \cdot 1 - 12 \cdot 1^2}{(1^2 + 4)^2} = \frac{36}{25} > 0$

. La población crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$$P'(5) = \frac{48 \cdot 5 - 12 \cdot 5^2}{(5^2 + 4)^2} = \frac{-60}{841} < 0. \text{ La población decrece en } (2, +\infty).$$

Como la población crece antes y decrece después la población tiene un máximo relativo

para $t = 2$. Tenemos que $P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$.

La población es máxima en el segundo año, siendo esta población máxima de 9000 ejemplares.

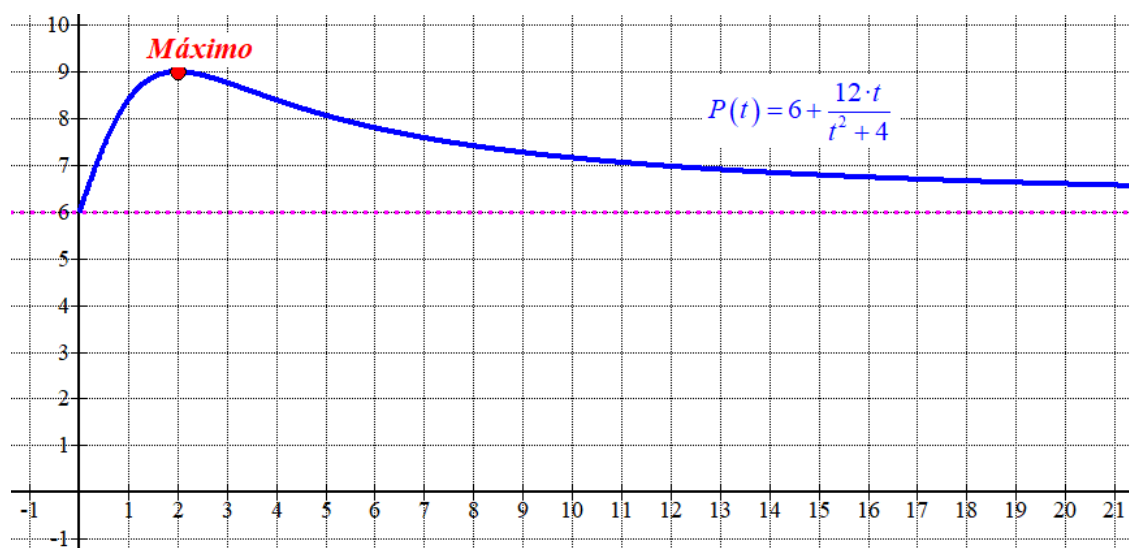
La población crece durante los dos primeros años y decrece a partir del segundo año.

iii) Sabemos que la función presenta un máximo relativo y absoluto en el punto (2, 9).

También sabemos que tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y = 6$.

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$
0	6
2	9 <i>Máximo</i>
6	7.8
20	6.594



PREGUNTA 3:

El ayuntamiento de una ciudad hace una encuesta a 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres) sobre sus hábitos de movilidad (transporte público, vehículo propio o caminar). Observaron que 60 mujeres y 40 hombres encuestados prefieren el transporte público, el 16% de las mujeres y el 10% de los hombres prefieren usar su propio vehículo, y el resto de las personas prefiere caminar.

- i) Se elige un joven al azar. Calcule la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que prefiere caminar. (1 punto)
- ii) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera utilizar el transporte público. (0.75 puntos)
- iii) Se eligen al azar tres jóvenes sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que los tres prefieran usar su propio vehículo. (0.75 puntos)

Han sido encuestados 150 mujeres y 100 hombres (250 jóvenes). Prefieren usar el transporte público 60 mujeres y 40 hombres, prefieren usar su propio vehículo el 16% de las mujeres: $0.16 \cdot 150 = 24$ mujeres y el 10% de los hombres: $0.10 \cdot 100 = 10$ hombres, y por último prefieren caminar el resto: $150 - 60 - 24 = 66$ mujeres y $100 - 40 - 10 = 50$ hombres. Ponemos todos estos datos en una tabla.

	T. Público	Su vehículo	Caminar	TOTALES
Mujeres	60	24	66	150
Hombres	40	10	50	100
TOTALES				250

Completamos la tabla.

	T. Público	Su vehículo	Caminar	TOTALES
Mujeres	60	24	66	150
Hombres	40	10	50	100
TOTALES	100	34	116	250

Respondemos a las cuestiones planteadas utilizando la regla de Laplace y la información contenida en la tabla.

- i) Hay 116 jóvenes que prefieren caminar y de ellos 66 son mujeres. La probabilidad de que el joven que prefiere caminar sea mujer tiene un valor de $\frac{66}{116} = \frac{33}{58} \approx 0.569$.

- ii) La probabilidad de que al elegir un hombre prefiera el transporte público vale $\frac{40}{100} = 0.4$ y la probabilidad de que al elegir una mujer esta prefiera el transporte público vale $\frac{60}{150} = 0.4$.

El suceso contrario al que se contempla en el ejercicio es “Ninguno prefiere el transporte público”. Usamos este suceso contrario para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Al menos uno prefiere el t. público}) &= 1 - P(\text{Ninguno de los dos prefiere el t. público}) = \\
 &= 1 - P(\text{Mujer no prefiere t. público}) \cdot P(\text{Hombre no prefiere t. público}) = \\
 &= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.4) = \boxed{0.64}
 \end{aligned}$$

También podemos obtener la solución con expresiones matemáticas.

Llamamos M a “ser mujer”, H a “ser hombre” y T a “preferir el transporte público”.

$$\begin{aligned}
 P((T/H) \cup (T/M)) &= P(T/H) + P(T/M) - P((T/H) \cap (T/M)) = \\
 &= \{ \text{Independientes} \} = P(T/H) + P(T/M) - P(T/H)P(T/M) = \\
 &= 0.4 + 0.4 - 0.4 \cdot 0.4 = \boxed{0.64}
 \end{aligned}$$

- iii) En cada nueva elección de un joven queda uno menos en el grupo que inicialmente tenía 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres), es decir, en la primera elección hay 250 jóvenes en el grupo, tras la primera elección para la segunda quedan 249 jóvenes y para la tercera quedan 248 jóvenes.

Si vamos eligiendo jóvenes que prefieren usar su propio vehículo en la primera elección hay 34 jóvenes que prefieren usar su vehículo, en la segunda quedan 33 y en la tercera 32.

Para expresarnos mejor los sucesos llamamos V1, V2 y V3 a elegir joven que prefiere usar su propio vehículo en primera, segunda y tercera elección.

$$P(V1 \cap V2 \cap V3) = P(V1)P(V2/V1)P(V3/(V1 \cap V2)) = \frac{34}{250} \cdot \frac{33}{249} \cdot \frac{32}{248} \approx \boxed{0.0023}$$

PREGUNTA 4**OPCIÓN A:**

i) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de **a** y **b** para que se cumpla $AB = BA$. (1 punto)

ii) Calcule el área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x . (1.5 puntos)

i) Resolvemos la igualdad planteada.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & -2a \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8 = 3b \rightarrow b = \frac{-8}{3} \\ -2 = -2a \rightarrow a = 1 \\ 3a = 3 \rightarrow a = 1 \\ 3b = -8 \rightarrow b = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = \frac{-8}{3}$.

ii) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2x + 3 \\ \text{Eje } x \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} =$$

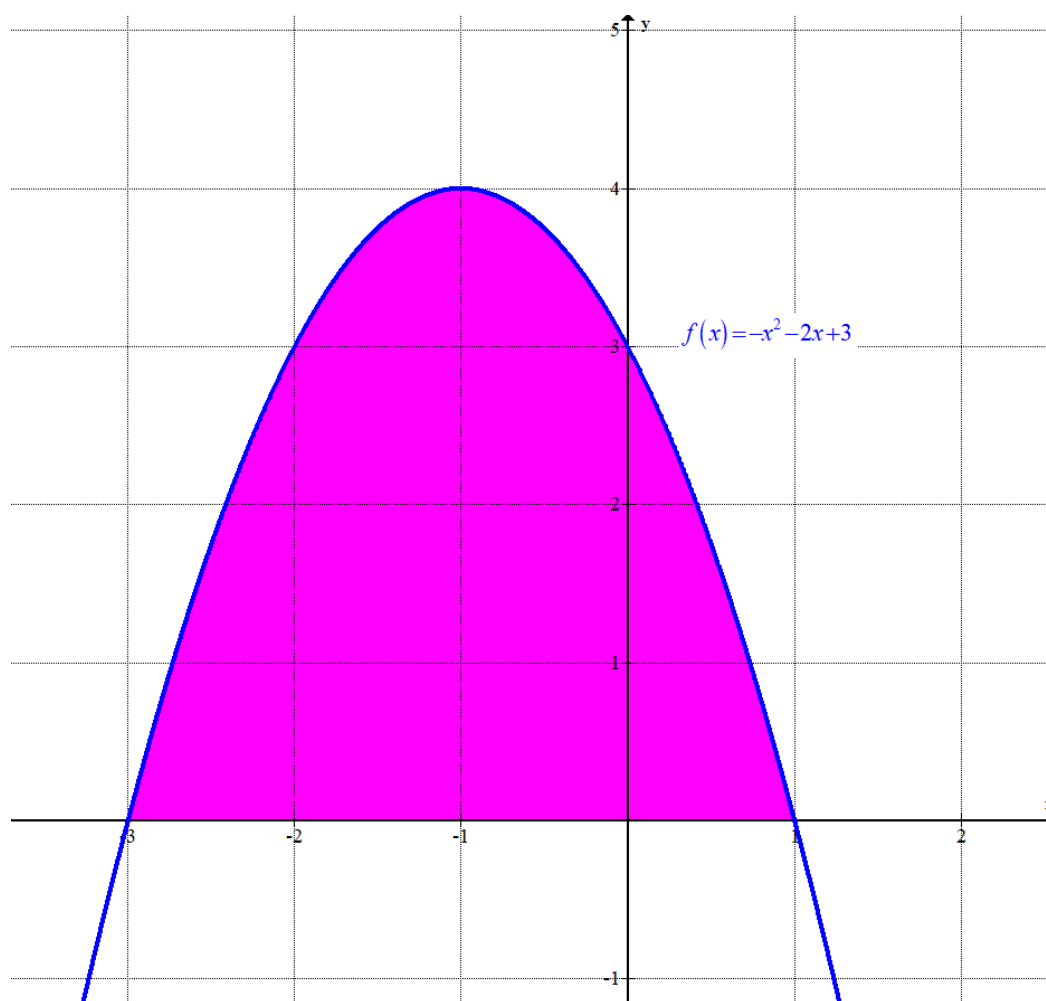
$$= \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = -3 = x \\ \frac{2-4}{-2} = 1 = x \end{cases}$$

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre -3 y 1 .

$$\int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^1 -x^2 - 2x + 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 =$$

$$= \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3) \right] = \frac{-1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = \frac{32}{3} \approx 10.6667$$

El área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x tiene un valor de $\frac{32}{3} \approx 10.6667$ unidades cuadradas.



OPCIÓN B:

i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación matricial $XD - C = I$. (1.25 puntos)

ii) En un barrio de una ciudad, el importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda sigue una distribución normal con varianza 22500 euros². Se selecciona una muestra de 74 viviendas en la zona, obteniéndose una media muestral de 738 euros. Calcule un intervalo de confianza al 96% para el importe medio mensual del alquiler de una vivienda. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

i) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XD - C = I \Rightarrow XD = I + C \Rightarrow X = (I + C)D^{-1}$$

Comprobamos que la matriz D tiene inversa y la calculamos.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0$$

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X = (I + C)D^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+8 & 1-4 \\ 3-4 & 3+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X buscada es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$.

ii) X = El importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda.

Como la varianza es 22500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{22500} = 150$ euros.

$X = N(\mu, 150)$

El tamaño de la muestra es $n = 74$. La media muestral es $\bar{x} = 738$ euros.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 96 %

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

k	0	1	2	3	4	5	6
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{150}{\sqrt{74}} \approx 35.83 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (738 - 35.83, 738 + 35.83) = (702.17, 773.83)$$

Con un nivel de confianza del 96% el precio del alquiler de un piso en este barrio estará comprendido entre 702.17 y 773.83 euros al mes.

Significa que si fuésemos realizando distintas muestras de 74 pisos el 96 % de dichas muestras tendrían una media comprendida entre 702.17 y 773.83 euros al mes.