



USaP  
2024/25  
AZTERKETA EREDUA

PAU  
2024/25  
MODELO DE EXAMEN



HEZKUNTZA SAILA  
DEPARTAMENTO DE EDUCACION

GIZARTE ZIENTZIEI  
APLIKATUTAKO  
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS  
APLICADAS A LAS  
CC SOCIALES II

### INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

- El examen consta de cinco problemas:
  - o **El problema 1 es competencial y de respuesta obligatoria.**
  - o **Elegir tres problemas de los cuatro restantes. En cada uno de estos problemas elegidos se responderá a uno de los dos apartados.**
- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
  - o pantalla gráfica
  - o posibilidad de transmitir datos
  - o programable
  - o resolución de ecuaciones
  - o operaciones con matrices
  - o cálculo de determinantes
  - o derivadas e integrales
  - o almacenamiento de datos alfanuméricos.
- **Observación importante:** No se permitirá el uso de lapicero ni de bolígrafo rojo para la elaboración de la prueba.
- **No olvides incluir el código en cada una de las hojas del examen.**

**PROBLEMA 1 [ 2,5 puntos]**

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

- [ 1,6 puntos]** ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?
- [ 0,3 puntos]** ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
- [ 0,6 puntos]** ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

**PROBLEMA 2**

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

**APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2****APARTADO 2.1 [ 2,5 puntos]**

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente.

Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

- [ 1 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.
- [ 1,5 puntos]** Resuelve el problema.

**APARTADO 2.2 [ 2,5 puntos]**

Dada la matriz  $A(a)$ :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- [0,6 puntos]** Calcula, razonadamente, el valor de  $a$  para que el determinante de  $A^2(a)$  valga 4.
- [1 punto]** Comprueba si la matriz  $A(a)$  es regular (invertible) para los valores de  $a$  obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso  $a = 2$ , calcula  $A^{-1}(a)$ .
- [0,9 puntos]** Determina la siguiente matriz  $M$  y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

**PROBLEMA 3**

**En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:  
APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2**

**APARTADO 3.1 [ 2,5 puntos]**

Las funciones  $E(x)$  y  $D(x)$  representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$

- [ 0,3 puntos]** ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?
- [ 0,6 puntos]** ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?
- [ 0,5 puntos]** ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?
- [ 0,3 puntos]** ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?
- [ 0,8 puntos]** Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos  $m^2$  ha pintado Deiene en total?

**APARTADO 3.2 [ 2,5 puntos]**

Sea la función  $f(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$

Sabemos que la recta  $y = -2$  es la recta tangente a la función  $f(x)$  en el punto  $x = 1$ .

- [ 1,25 puntos]** Calcula el valor de los parámetros  $a$  y  $b$ .
- [ 0,75 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x)$ , cuando  $a = b = -1$ .
- [ 0,5 puntos]** Para los valores  $a = b = -1$ , ¿tiene la función,  $f(x)$ , algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

**PROBLEMA 4**

**En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:  
APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2**

**APARTADO 4.1 [ 2,5 puntos]**

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

- [ 1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?
- [ 1,5 puntos]** Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

**APARTADO 4.2 [ 2,5 puntos]**

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %.

Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

- [ 0,75 puntos]** El segundo día.
- [ 1 puntos]** Solamente el segundo día.
- [ 0,75 puntos]** El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

**PROBLEMA 5**

**En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:  
APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2**

**APARTADO 5.1 [ 2,5 puntos]**

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Arquitectura Técnica sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Biomedical Engineering sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos.

En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

**APARTADO 5.2 [ 2,5 puntos]**

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria  $X$ , que sigue una distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $169 \text{ cm}^2$ .

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es  $175 \text{ cm}$ .

- a) [ 0,4 puntos] Indica cuál es la distribución de la media muestral,  $\bar{X}$ .
- b) [ 0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182  $\text{cm}$ ?
- c) [ 0,75 puntos] En la distribución de la media muestral,  $\bar{X}$ , obtén el intervalo característico para el 99 %.
- d) [ 0,6 puntos] Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2  $\text{cm}$ , con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?



$N(0, 1)$  kurbak  $-\infty$ -tik  $z$ -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva  $N(0, 1)$  desde  $-\infty$  hasta  $z$

|     | 0'00   | 0'01   | 0'02   | 0'03   | 0'04   | 0'05   | 0'06   | 0'07   | 0'08   | 0'09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0'0 | 0'5000 | 0'5040 | 0'5080 | 0'5120 | 0'5160 | 0'5199 | 0'5239 | 0'5279 | 0'5319 | 0'5359 |
| 0'1 | 0'5398 | 0'5438 | 0'5478 | 0'5517 | 0'5557 | 0'5596 | 0'5636 | 0'5675 | 0'5714 | 0'5753 |
| 0'2 | 0'5793 | 0'5832 | 0'5871 | 0'5910 | 0'5948 | 0'5987 | 0'6026 | 0'6064 | 0'6103 | 0'6141 |
| 0'3 | 0'6179 | 0'6217 | 0'6255 | 0'6293 | 0'6331 | 0'6368 | 0'6406 | 0'6443 | 0'6480 | 0'6517 |
| 0'4 | 0'6554 | 0'6591 | 0'6628 | 0'6664 | 0'6700 | 0'6736 | 0'6772 | 0'6808 | 0'6844 | 0'6879 |
| 0'5 | 0'6915 | 0'6950 | 0'6985 | 0'7019 | 0'7054 | 0'7088 | 0'7123 | 0'7157 | 0'7190 | 0'7224 |
| 0'6 | 0'7257 | 0'7291 | 0'7324 | 0'7357 | 0'7389 | 0'7422 | 0'7454 | 0'7486 | 0'7517 | 0'7549 |
| 0'7 | 0'7580 | 0'7611 | 0'7642 | 0'7673 | 0'7704 | 0'7734 | 0'7764 | 0'7794 | 0'7823 | 0'7852 |
| 0'8 | 0'7881 | 0'7910 | 0'7939 | 0'7967 | 0'7995 | 0'8023 | 0'8051 | 0'8078 | 0'8106 | 0'8133 |
| 0'9 | 0'8159 | 0'8186 | 0'8212 | 0'8238 | 0'8264 | 0'8289 | 0'8315 | 0'8340 | 0'8365 | 0'8389 |
| 1'0 | 0'8413 | 0'8438 | 0'8461 | 0'8485 | 0'8508 | 0'8531 | 0'8554 | 0'8577 | 0'8599 | 0'8621 |
| 1'1 | 0'8643 | 0'8665 | 0'8686 | 0'8708 | 0'8729 | 0'8749 | 0'8770 | 0'8790 | 0'8810 | 0'8830 |
| 1'2 | 0'8849 | 0'8869 | 0'8888 | 0'8907 | 0'8925 | 0'8944 | 0'8962 | 0'8980 | 0'8997 | 0'9015 |
| 1'3 | 0'9032 | 0'9049 | 0'9066 | 0'9082 | 0'9099 | 0'9115 | 0'9131 | 0'9147 | 0'9162 | 0'9177 |
| 1'4 | 0'9192 | 0'9207 | 0'9222 | 0'9236 | 0'9251 | 0'9265 | 0'9279 | 0'9292 | 0'9306 | 0'9319 |
| 1'5 | 0'9332 | 0'9345 | 0'9357 | 0'9370 | 0'9382 | 0'9394 | 0'9406 | 0'9418 | 0'9429 | 0'9441 |
| 1'6 | 0'9452 | 0'9463 | 0'9474 | 0'9484 | 0'9495 | 0'9505 | 0'9515 | 0'9525 | 0'9535 | 0'9545 |
| 1'7 | 0'9554 | 0'9564 | 0'9573 | 0'9582 | 0'9591 | 0'9599 | 0'9608 | 0'9616 | 0'9625 | 0'9633 |
| 1'8 | 0'9641 | 0'9649 | 0'9656 | 0'9664 | 0'9671 | 0'9678 | 0'9686 | 0'9693 | 0'9699 | 0'9706 |
| 1'9 | 0'9713 | 0'9719 | 0'9726 | 0'9732 | 0'9738 | 0'9744 | 0'9750 | 0'9756 | 0'9761 | 0'9767 |
| 2'0 | 0'9772 | 0'9778 | 0'9783 | 0'9788 | 0'9793 | 0'9798 | 0'9803 | 0'9808 | 0'9812 | 0'9817 |
| 2'1 | 0'9821 | 0'9826 | 0'9830 | 0'9834 | 0'9838 | 0'9842 | 0'9846 | 0'9850 | 0'9854 | 0'9857 |
| 2'2 | 0'9861 | 0'9864 | 0'9868 | 0'9871 | 0'9875 | 0'9878 | 0'9881 | 0'9884 | 0'9887 | 0'9890 |
| 2'3 | 0'9893 | 0'9896 | 0'9898 | 0'9901 | 0'9904 | 0'9906 | 0'9909 | 0'9911 | 0'9913 | 0'9916 |
| 2'4 | 0'9918 | 0'9920 | 0'9922 | 0'9925 | 0'9927 | 0'9929 | 0'9931 | 0'9932 | 0'9934 | 0'9936 |
| 2'5 | 0'9938 | 0'9940 | 0'9941 | 0'9943 | 0'9945 | 0'9946 | 0'9948 | 0'9949 | 0'9951 | 0'9952 |
| 2'6 | 0'9953 | 0'9955 | 0'9956 | 0'9957 | 0'9959 | 0'9960 | 0'9961 | 0'9962 | 0'9963 | 0'9964 |
| 2'7 | 0'9965 | 0'9966 | 0'9967 | 0'9968 | 0'9969 | 0'9970 | 0'9971 | 0'9972 | 0'9973 | 0'9974 |
| 2'8 | 0'9974 | 0'9975 | 0'9976 | 0'9977 | 0'9977 | 0'9978 | 0'9979 | 0'9979 | 0'9980 | 0'9981 |
| 2'9 | 0'9981 | 0'9982 | 0'9982 | 0'9983 | 0'9984 | 0'9984 | 0'9985 | 0'9985 | 0'9986 | 0'9986 |
| 3'0 | 0'9987 | 0'9987 | 0'9987 | 0'9988 | 0'9988 | 0'9989 | 0'9989 | 0'9989 | 0'9990 | 0'9990 |
| 3'1 | 0'9990 | 0'9991 | 0'9991 | 0'9991 | 0'9992 | 0'9992 | 0'9992 | 0'9992 | 0'9993 | 0'9993 |
| 3'2 | 0'9993 | 0'9993 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9995 | 0'9995 | 0'9995 |
| 3'3 | 0'9995 | 0'9995 | 0'9995 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9997 |
| 3'4 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9998 |
| 3'5 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 |
| 3'6 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 |
| 3'7 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 |
| 3'8 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 |
| 3'9 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 |

## Soluciones

### PROBLEMA 1 [ 2,5 puntos]

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

- [ 1,6 puntos]** ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?
- [ 0,3 puntos]** ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
- [ 0,6 puntos]** ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

- a) Llamamos “x” al número de metros lineales de tapiz tipo A e “y” al número de metros lineales de tapiz tipo B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

|                              | Hilo de seda | Hilo de plata | Hilo de oro | Ingresos      |
|------------------------------|--------------|---------------|-------------|---------------|
| <b>Metros de tapiz A (x)</b> | 100x         | 200x          |             | 2000x €       |
| <b>Metros de tapiz B (y)</b> | 200y         | 100y          | 100y        | 3000y €       |
| <b>TOTALES</b>               | 100x + 200y  | 200x + 100y   | 100y        | 2000x + 3000y |
| <b>DISPONIBILIDAD</b>        | 50 000 gr    | 40 000 gr     | 22500 gr    |               |

La función a maximizar son los ingresos  $I(x, y) = 2000x + 3000y$ .

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro”  $\rightarrow 100x + 200y \leq 50000$ ,  $200x + 100y \leq 40000$ ,  $100y \leq 22500$ .

Las cantidades deben ser positivas  $\rightarrow x \geq 0$ ;  $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 100x + 200y \leq 50000 \\ 200x + 100y \leq 40000 \\ 100y \leq 22500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.



$x + 2y = 500$

$2x + y = 400$

$y = 225$

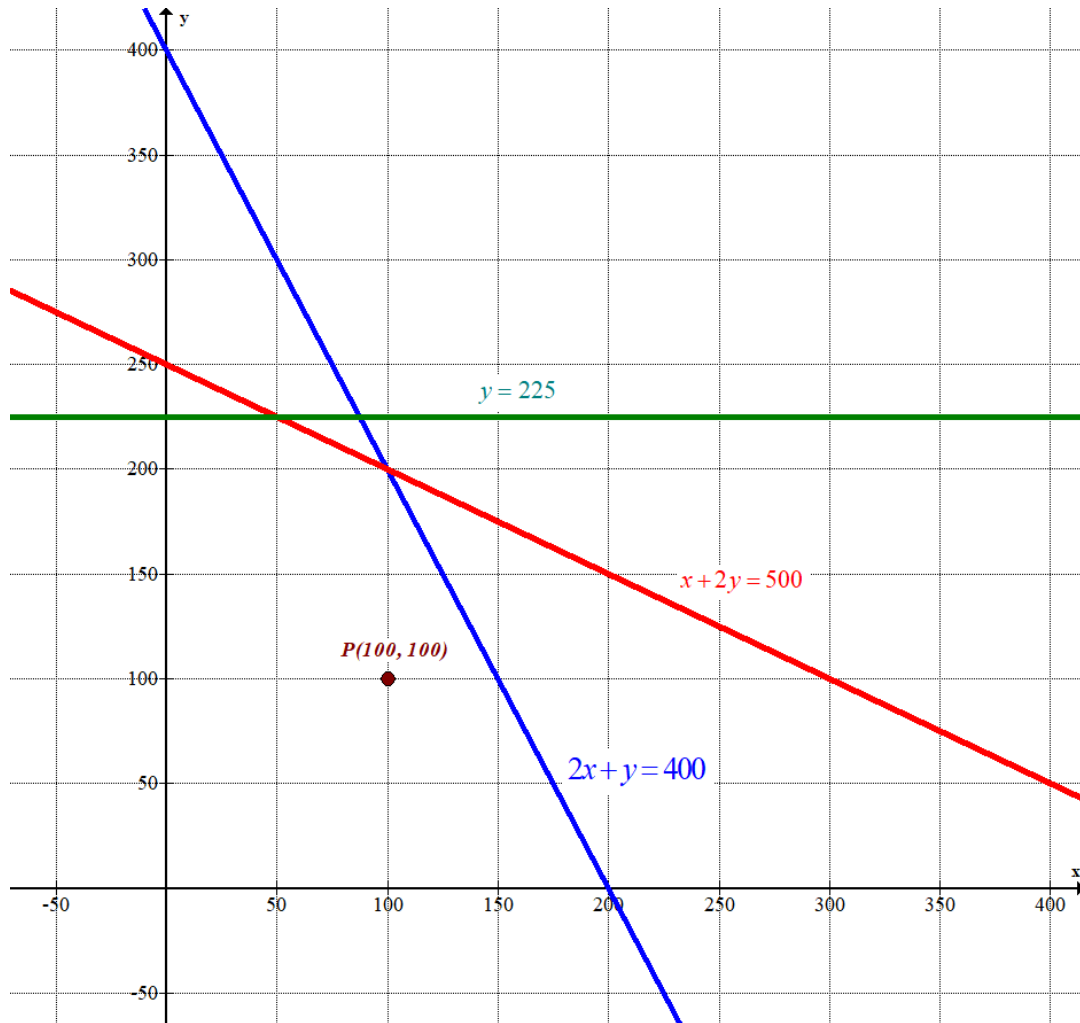
$x \geq 0; y \geq 0$

| $x$ | $y = \frac{500 - x}{2}$ |
|-----|-------------------------|
| 0   | 250                     |
| 50  | 225                     |
| 100 | 200                     |
| 500 | 0                       |

| $x$ | $y = 400 - 2x$ |
|-----|----------------|
| 0   | 400            |
| 100 | 200            |
| 150 | 100            |
| 200 | 0              |

| $x$ | $y = 225$ |
|-----|-----------|
| 0   | 225       |
| 50  | 225       |
| 100 | 225       |

Primer  
cuadrante



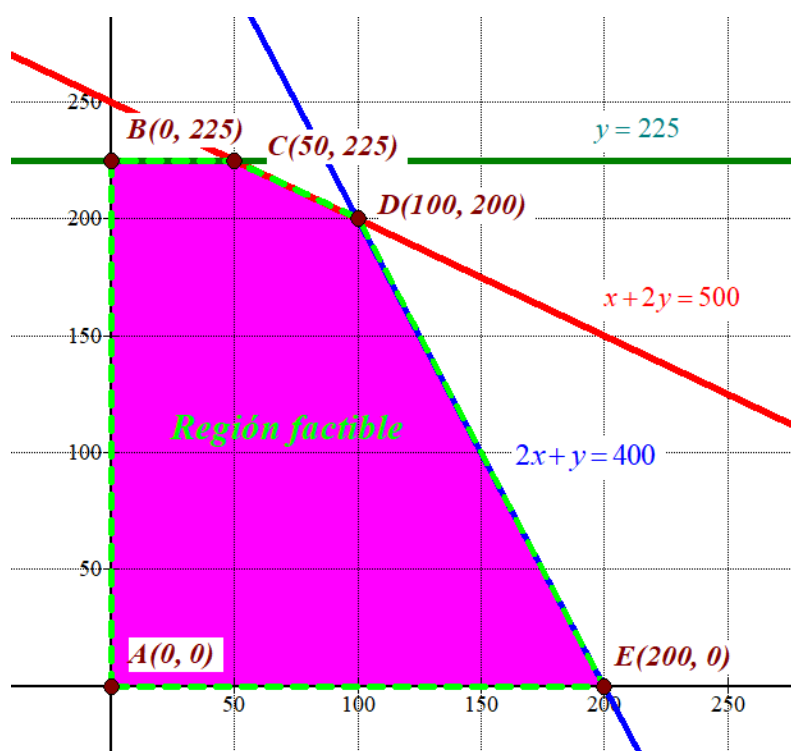
Como las restricciones son  $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$  la región factible es la región del primer

cuadrante situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto  $P(100, 100)$  perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 200 \leq 500 \\ 200 + 100 \leq 400 \\ 100 \leq 225 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función ingresos  $I(x, y) = 2000x + 3000y$  en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(0, 225) \rightarrow I(0, 225) = 2000 \cdot 0 + 3000 \cdot 225 = 675\,000$$

$$C(50, 225) \rightarrow I(50, 225) = 2000 \cdot 50 + 3000 \cdot 225 = 775\,000$$

$$D(100, 200) \rightarrow I(100, 200) = 2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 200 = 800\,000 \text{ Máximo}$$

$$E(200, 0) \rightarrow I(200, 0) = 2000 \cdot 200 + 3000 \cdot 0 = 400\,000$$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 800 000 € y se obtienen en el punto D(100, 200).

Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 100 metros lineales de tapiz tipo A y 200 metros de tapiz tipo B.

b) Los máximos ingresos que se pueden obtener tienen un valor de 800 000 €.

c) En confeccionar 100 tapices tipo A y 200 tapices tipo B se gastan:

$100 \cdot 100 + 200 \cdot 200 = 50\,000 \text{ g} = 50 \text{ kg}$  de hilo de seda,  $200 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 40\,000 \text{ g} = 40 \text{ kg}$  de hilo de plata y  $100 \cdot 200 = 20\,000 \text{ g} = 20 \text{ kg}$  de hilo de oro.

Disponemos de 50 kilos de hilo de seda y lo gastamos todo. Disponemos de 40 kilos de hilo de plata y lo gastamos todo. Disponemos de 22.5 kg de hilo de oro, nos quedan después de fabricar los tapices  $22.5 - 20 = 2.5 \text{ kg}$  de oro.



**APARTADO 2.1 [ 2,5 puntos]**

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente.

Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

a) [ 1 puntos] Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

b) [ 1,5 puntos] Resuelve el problema.

a) Llamamos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  al número de latas que hemos comprado del fabricante A, B y C respectivamente.

Obtenemos las ecuaciones partiendo de la información proporcionada en el problema.

“Compramos 20 latas”  $\rightarrow a + b + c = 20$ .

“Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg”  $\rightarrow 0.25a + 0.5b + c = 10$ .

“Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €”  $\rightarrow a + 1.8b + 3.3c = 35.6$ .

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ 0.25a + 0.5b + c = 10 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 20 - b - c \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 - b - c + 2b + 4c = 40 \\ 20 - b - c + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + 3c = 20 \\ 0.8b + 2.3c = 15.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 20 - 3c \\ 0.8b + 2.3c = 15.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.8(20 - 3c) + 2.3c = 15.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 2.4c + 2.3c = 15.6 \Rightarrow -0.1c = -0.4 \Rightarrow \boxed{c = \frac{0.4}{0.1} = 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 20 - 3 \cdot 4 = 8} \Rightarrow \boxed{a = 20 - 8 - 4 = 8}$$

Hemos comprado 8 latas del fabricante A, 8 del fabricante B y 4 del fabricante C.

**APARTADO 2.2 [ 2,5 puntos]**

Dada la matriz  $A(a)$ :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) [ 0,6 puntos] Calcula, razonadamente, el valor de  $a$  para que el determinante de  $A^2(a)$  valga 4.
- b) [ 1 punto] Comprueba si la matriz  $A(a)$  es regular (invertible) para los valores de  $a$  obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso  $a = 2$ , calcula  $A^{-1}(a)$ .
- c) [ 0,9 puntos] Determina la siguiente matriz  $M$  y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

a) Hallamos la expresión de la matriz  $A^2(a)$ .

$$A^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 1+1+1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de  $|A^2(a)|$ .

$$|A^2(a)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = a^2$$

Averiguamos cuando este determinante vale 4.

$$|A^2(a)| = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El determinante de  $A^2(a)$  vale 4 para  $a = -2$  y  $a = 2$ .

- b) Para que la matriz sea regular su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de  $A(a)$ .

$$|A(a)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \quad \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \right\} \Rightarrow a = 0$$

$$|A(a)| = 0$$

La matriz  $A(a)$  es invertible para cualquier valor de  $a$  distinto de 0. Por tanto, es invertible para los valores obtenidos en el apartado anterior ( $a = \pm 2$ ).

Calculamos la inversa de  $A(a)$  para  $a = 2$ .

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A(2)| = 2 \neq 0$$

$$A^{-1}(2) = \frac{\text{Adj}(A^T(2))}{|A(2)|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Determinamos la expresión de la matriz M.

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-1-1 & 1-1 & 2 \\ -2-1 & 2-1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos el valor de su determinante.

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

**APARTADO 3.1 [ 2,5 puntos]**

Las funciones  $E(x)$  y  $D(x)$  representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$

- a) [ 0,3 puntos] ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?  
 b) [ 0,6 puntos] ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?  
 c) [ 0,5 puntos] ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?  
 d) [ 0,3 puntos] ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?  
 e) [ 0,8 puntos] Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos  $m^2$  ha pintado Deiene en total?

a) Hallamos el valor de  $E(0)$  y  $D(0)$  y los comparamos.

$$\left. \begin{array}{l} E(0) = -0^2 + 19 \cdot 0 + 66 = 66 \\ D(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 + 150 = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow E(0) = 66 < 150 = D(0)$$

Deiene tiene mejor rendimiento inicial.

b) Hallamos los puntos críticos de  $E(x)$ .

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \Rightarrow E'(x) = -2x + 19$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 19 = 0 \Rightarrow 2x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{2} = 9.5 \notin [0, 8]$$

La derivada no se anula en el intervalo  $[0, 8]$ .

Si tomamos  $x=1$  la derivada vale  $E'(1) = -2 + 19 = 17 > 0$ . La derivada siempre es positiva en el intervalo  $[0, 8]$ . La función es creciente en todo el intervalo, por lo que el valor máximo de la función se obtiene para  $x=8$ . Como  $E(8) = -8^2 + 19 \cdot 8 + 66 = 154$ . El rendimiento máximo de Eneko se produce a las 8 horas y es de 154 metros cuadrados pintados por hora.

c) Hallamos los puntos críticos de  $D(x)$ .

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \Rightarrow D'(x) = -2x + 5$$

$$D'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \in [0, 8]$$

Sustituimos  $x=2.5$  en la segunda derivada.

$$D'(x) = -2x + 5 \Rightarrow D''(x) = -2 \Rightarrow D''(2.5) = -2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo relativo en  $x = 2.5$ .

Como  $D(2.5) = -2.5^2 + 5 \cdot 2.5 + 150 = 156.25$ . El rendimiento máximo de Deiene se produce a las 2.5 horas y es de 156.25 metros cuadrados pintados por hora.

d) Buscamos cuando  $D(x) = E(x)$ .

$$D(x) = E(x) \Rightarrow -x^2 + 5x + 150 = -x^2 + 19x + 66 \Rightarrow 84 = 14x \Rightarrow x = \frac{84}{14} = 6$$

Tienen el mismo rendimiento a las 6 horas.

e) Los metros cuadrados pintados por Deiene en las 8 horas es el valor de la integral definida de la función  $D(x)$  entre 0 y 8.

$$\begin{aligned} \int_0^8 D(x) dx &= \int_0^8 -x^2 + 5x + 150 dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 150x \right]_0^8 = \\ &= \left[ -\frac{8^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot 8^2 + 150 \cdot 8 \right] - \left[ -\frac{0^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot 0^2 + 150 \cdot 0 \right] = -\frac{8^3}{3} + 160 + 1200 \approx \boxed{1189.33} \end{aligned}$$

Deiene en toda la jornada ha pintado unos 1189.33 metros cuadrados aproximadamente.

**APARTADO 3.2 [ 2,5 puntos]**

Sea la función  $f(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$

Sabemos que la recta  $y = -2$  es la recta tangente a la función  $f(x)$  en el punto  $x = 1$ .

- a) [ 1,25 puntos] Calcula el valor de los parámetros  $a$  y  $b$ .  
 b) [ 0,75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x)$ , cuando  $a = b = -1$ .  
 c) [ 0,5 puntos] Para los valores  $a = b = -1$ , ¿tiene la función,  $f(x)$ , algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

- a) Si la tangente es  $y = -2$  significa que es horizontal y por tanto la función tiene un máximo o un mínimo en  $x = 1$ . Por lo que la derivada se anula para este valor  $\rightarrow f'(1) = 0$ .

Como la gráfica de la función y la recta tangente coinciden en  $x = 1$  entonces sabemos que  $f(1) = -2$ .

Usamos estas dos condiciones para obtener el valor de los parámetros  $a$  y  $b$ .

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot x - (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{2ax^2 - ax^2 - b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) = 0 &\Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 - b}{1^2} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ f(1) = -2 &\Rightarrow -2 = \frac{a \cdot 1^2 + b}{1} \Rightarrow a + b = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + a = -2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Los valores buscados son  $a = b = -1$ .

- b) Cuando  $a = b = -1$  la función queda  $f(x) = \frac{-x^2 - 1}{x}$  y su derivada es  $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$ .

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Como la función solo está definida en el intervalo  $(0, +\infty)$  solo consideramos el valor  $x = 1$  como punto crítico. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo  $(0, 1)$  tomamos  $x = 0.5$  y la derivada vale  $f'(0.5) = \frac{-0.5^2 + 1}{0.5^2} = 3 > 0$ .  
La función crece en  $(0, 1)$ .

- En el intervalo  $(1, +\infty)$  tomamos  $x = 2$  y la derivada vale  $f'(2) = \frac{-2^2 + 1}{2^2} = \frac{-3}{4} < 0$ .

La función decrece en  $(1, +\infty)$ .

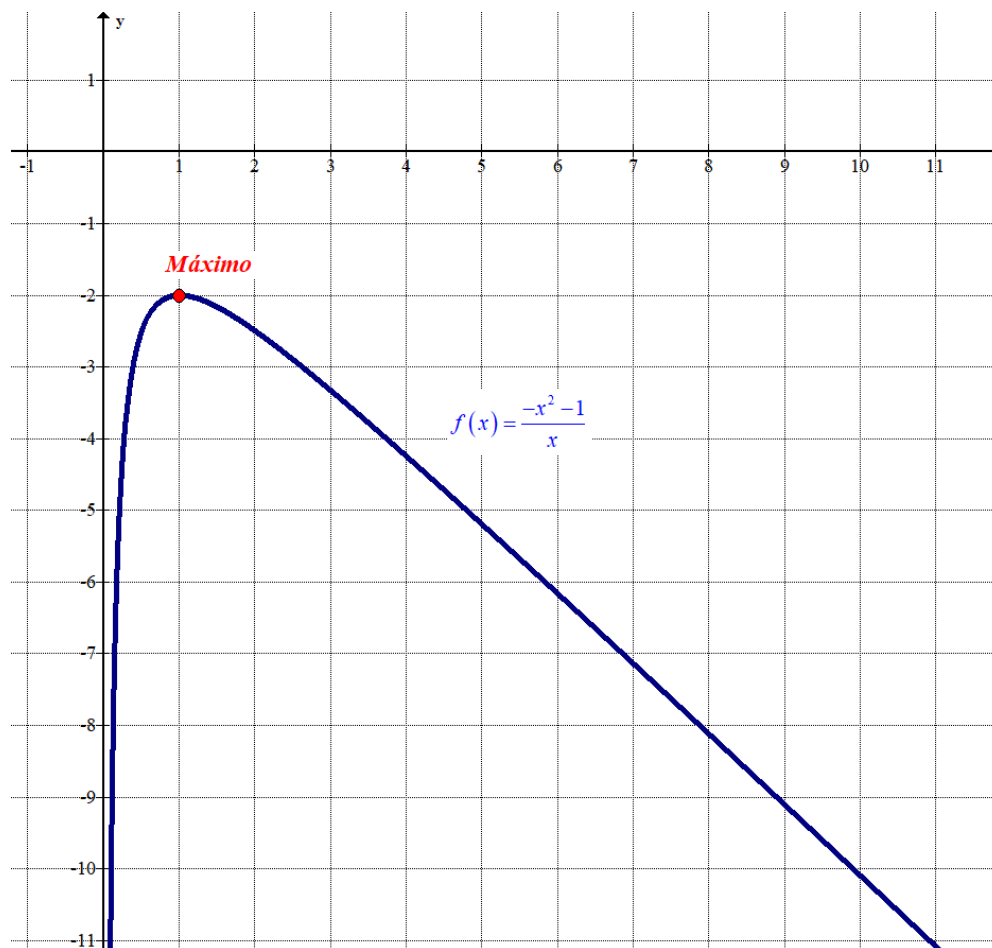
La función crece en  $(0, 1)$  y decrece en  $(1, +\infty)$ .



- c) Por lo visto en el apartado anterior sabemos que la función crece antes de  $x=1$  y decrece después, por lo que la función tiene un máximo relativo en  $x=1$ .

Como  $f(1) = \frac{-1^2 - 1}{1} = -2$  las coordenadas del máximo relativo son  $(1, -2)$ .

La función no tiene ningún mínimo relativo.



**APARTADO 4.1 [ 2,5 puntos]**

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

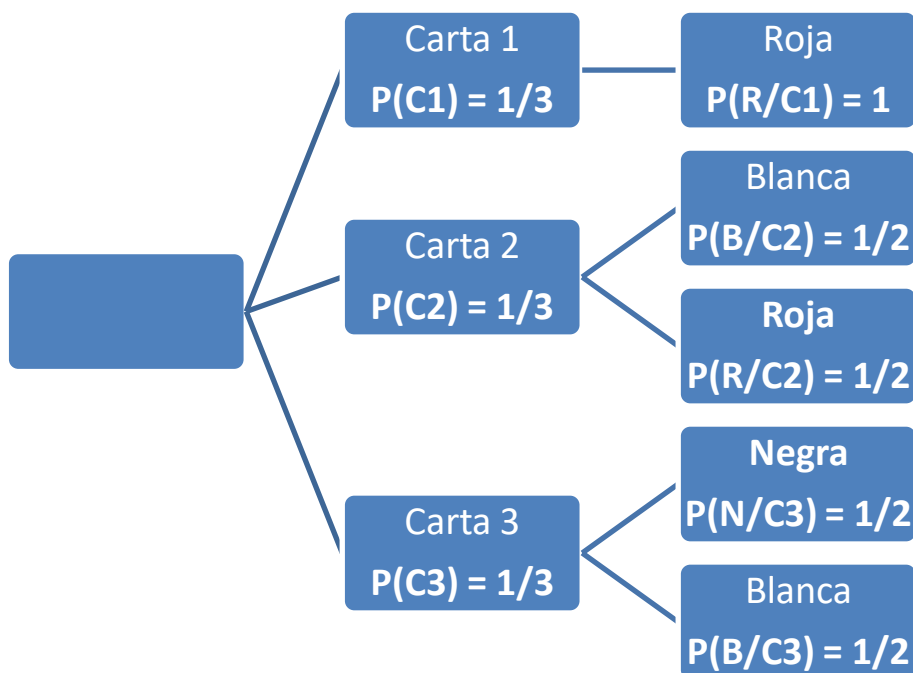
Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) [ 1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

b) [ 1,5 puntos] Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

a) Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos carta 1 a la carta con dos caras rojas, carta 2 a la que tiene una cara blanca y otra roja, por último, llamamos carta 3 a la que tiene una cara negra y otra blanca.

También llamamos R, B y N a obtener una cara roja, blanca o negra.



Debemos calcular  $P(R)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(C1)P(R/C1) + P(C2)P(R/C2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

b) La carta que tiene una cara blanca y otra roja es la carta 2. Nos piden calcular  $P(C2/B)$ .

Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C2/B) = \frac{P(C2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C2)P(B/C2)}{P(C2)P(B/C2) + P(C3)P(B/C3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

**APARTADO 4.2 [ 2,5 puntos]**

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %.

Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

- a) [ 0,75 puntos] El segundo día.
- b) [ 1 puntos] Solamente el segundo día.
- c) [ 0,75 puntos] El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

Realizamos una tabla de contingencia.

|                     | Estudia el día 2 | No estudia el día 2 |      |
|---------------------|------------------|---------------------|------|
| Estudia el día 1    | 10%              | 10%                 |      |
| No estudia el día 1 |                  | 25%                 |      |
|                     |                  |                     | 100% |

Completamos la tabla.

|                     | Estudia el día 2 | No estudia el día 2 |            |
|---------------------|------------------|---------------------|------------|
| Estudia el día 1    | 10%              | 10%                 | <b>20%</b> |
| No estudia el día 1 | <b>55%</b>       | 25%                 | <b>80%</b> |
|                     | <b>65%</b>       | <b>35%</b>          | 100%       |

- a) La probabilidad de que estudie el día 2 es del 65%.
- b) La probabilidad de estudiar sólo el segundo día es la probabilidad de no estudiar el día 1 y estudiar el día 2. Esta probabilidad es del 55%.
- c) No ha estudiado el día 1 con una probabilidad de 80% y ha estudiado el día 2 y no ha estudiado el día 1 con una probabilidad de 55%. La probabilidad de estudiar el día 2, sabiendo que no ha estudiado el día 1 vale  $\frac{55}{80} = \frac{11}{16} = 0.6875 = 68.75\%$ .

**APARTADO 5.1 [ 2,5 puntos]**

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Arquitectura Técnica sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Biomedical Engineering sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos. En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

$X$  = la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Arquitectura Técnica.  $X = N(6.8, 0.6)$

$Y$  = la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el Grado en Biomedical Engineering.  $Y = N(7, 0.5)$

Calculamos el valor de “a” tal que  $P(X \geq a) = 0.25$ .

$$P(X \geq a) = 0.25 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-6.8}{0.6}\right) = 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-6.8}{0.6} = \frac{0.67+0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow a-6.8 = 0.405 \Rightarrow \boxed{a = 7.205}$$

|     | 0'00   | 0'01   | 0'02   | 0'03   | 0'04   | 0'05   | 0'06   | 0'07   | 0'08   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0'0 | 0'5000 | 0'5040 | 0'5080 | 0'5120 | 0'5160 | 0'5199 | 0'5239 | 0'5279 | 0'5319 |
| 0'1 | 0'5398 | 0'5438 | 0'5478 | 0'5517 | 0'5557 | 0'5596 | 0'5636 | 0'5675 | 0'5714 |
| 0'2 | 0'5793 | 0'5832 | 0'5871 | 0'5910 | 0'5948 | 0'5987 | 0'6026 | 0'6064 | 0'6103 |
| 0'3 | 0'6179 | 0'6217 | 0'6255 | 0'6293 | 0'6331 | 0'6368 | 0'6406 | 0'6443 | 0'6480 |
| 0'4 | 0'6554 | 0'6591 | 0'6628 | 0'6664 | 0'6700 | 0'6736 | 0'6772 | 0'6808 | 0'6844 |
| 0'5 | 0'6915 | 0'6950 | 0'6985 | 0'7019 | 0'7054 | 0'7088 | 0'7123 | 0'7157 | 0'7190 |
| 0'6 | 0'7257 | 0'7291 | 0'7324 | 0'7357 | 0'7389 | 0'7422 | 0'7454 | 0'7486 | 0'7517 |

La nota de corte en Arquitectura Técnica será de 7.205. Las dos tienen una nota superior a esta nota de corte y tienen opción de acceso a este grado.

Calculamos el valor de “b” tal que  $P(Y \geq b) = 0.25$ .

$$P(Y \geq b) = 0.25 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{b-7}{0.5}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b-7}{0.5}\right) = 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b-7}{0.5} = 0.675 \Rightarrow b-7 = 0.3375 \Rightarrow \boxed{b = 7.3375}$$

La nota de corte en Biomedical Engineering será de 7.3375. Solo Teresa tiene una nota superior (7.45) y puede entrar, pero Yolanda no puede entrar al ser su nota (7.25) inferior a esta nota de corte.

Teresa tiene opción de acceso a los dos grados y Yolanda solo tiene opción de acceso al grado de Arquitectura Técnica.

**APARTADO 5.2 [ 2,5 puntos]**

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria  $X$ , que sigue una distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $169 \text{ cm}^2$ .

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es  $175 \text{ cm}$ .

- a) [ 0,4 puntos] Indica cuál es la distribución de la media muestral,  $\bar{X}$ .
- b) [ 0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182  $\text{cm}$ ?
- c) [ 0,75 puntos] En la distribución de la media muestral,  $\bar{X}$ , obtén el intervalo característico para el 99 %.
- d) [ 0,6 puntos] Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2  $\text{cm}$ , con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?

- a)  $X$  = La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento. Como la varianza es 169 la desviación típica es  $\sqrt{169} = 13 \text{ cm}$ .

$$X = N(175, 13)$$

La distribución de la media muestral es una normal con la misma media y con desviación

$$\text{típica } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{13}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9} \approx 1.44.$$

$$\bar{X}_{81} = N\left(175, \frac{13}{9}\right)$$

- b) Debemos calcular  $P(172 \leq \bar{X}_{81} \leq 182)$ .

$$P(172 \leq \bar{X}_{81} \leq 182) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{172-175}{13/9} \leq Z \leq \frac{182-175}{13/9}\right) =$$

$$= P(-2.08 \leq Z \leq 4.85) = P(Z \leq 4.85) - P(Z \leq -2.08) = P(Z \leq 4.85) - P(Z \geq 2.08) =$$

$$= P(Z \leq 4.85) - [1 - P(Z \leq 2.08)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - [1 - 0.9812] = \boxed{0.9812}$$

|     | 0'00   | 0'01   | 0'02   | 0'03   | 0'04   | 0'05   | 0'06   | 0'07   | 0'08   | 0'09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|
| 0'0 | 0'5000 | 0'5040 | 0'5080 | 0'5120 | 0'5160 | 0'5199 | 0'5239 | 0'5279 | 0'5319 | 0'   |
| 0'1 | 0'5398 | 0'5438 | 0'5478 | 0'5517 | 0'5557 | 0'5596 | 0'5636 | 0'5675 | 0'5714 | 0'   |
| 0'2 | 0'5793 | 0'5832 | 0'5871 | 0'5910 | 0'5948 | 0'5987 | 0'6026 | 0'6064 | 0'6103 | 0'   |
| 0'3 | 0'6179 | 0'6217 | 0'6255 | 0'6293 | 0'6331 | 0'6368 | 0'6406 | 0'6443 | 0'6480 | 0'   |
| 0'4 | 0'6554 | 0'6591 | 0'6628 | 0'6664 | 0'6700 | 0'6736 | 0'6772 | 0'6808 | 0'6844 | 0'   |
| 0'5 | 0'6915 | 0'6950 | 0'6985 | 0'7019 | 0'7054 | 0'7088 | 0'7123 | 0'7157 | 0'7190 | 0'   |
| 0'6 | 0'7257 | 0'7291 | 0'7324 | 0'7357 | 0'7389 | 0'7422 | 0'7454 | 0'7486 | 0'7517 | 0'   |
| 0'7 | 0'7580 | 0'7611 | 0'7642 | 0'7673 | 0'7704 | 0'7734 | 0'7764 | 0'7794 | 0'7823 | 0'   |
| 0'8 | 0'7881 | 0'7910 | 0'7939 | 0'7967 | 0'7995 | 0'8023 | 0'8051 | 0'8078 | 0'8106 | 0'   |
| 0'9 | 0'8159 | 0'8186 | 0'8212 | 0'8238 | 0'8264 | 0'8289 | 0'8315 | 0'8340 | 0'8365 | 0'   |
| 1'0 | 0'8413 | 0'8438 | 0'8461 | 0'8485 | 0'8508 | 0'8531 | 0'8554 | 0'8577 | 0'8599 | 0'   |
| 1'1 | 0'8643 | 0'8665 | 0'8686 | 0'8708 | 0'8729 | 0'8749 | 0'8770 | 0'8790 | 0'8810 | 0'   |
| 1'2 | 0'8849 | 0'8869 | 0'8888 | 0'8907 | 0'8925 | 0'8944 | 0'8962 | 0'8980 | 0'8997 | 0'   |
| 1'3 | 0'9032 | 0'9049 | 0'9066 | 0'9082 | 0'9099 | 0'9115 | 0'9131 | 0'9147 | 0'9162 | 0'   |
| 1'4 | 0'9192 | 0'9207 | 0'9222 | 0'9236 | 0'9251 | 0'9265 | 0'9279 | 0'9292 | 0'9306 | 0'   |
| 1'5 | 0'9332 | 0'9345 | 0'9357 | 0'9370 | 0'9382 | 0'9394 | 0'9406 | 0'9418 | 0'9429 | 0'   |
| 1'6 | 0'9452 | 0'9463 | 0'9474 | 0'9484 | 0'9495 | 0'9505 | 0'9515 | 0'9525 | 0'9535 | 0'   |
| 1'7 | 0'9554 | 0'9564 | 0'9573 | 0'9582 | 0'9591 | 0'9599 | 0'9608 | 0'9616 | 0'9625 | 0'   |
| 1'8 | 0'9641 | 0'9649 | 0'9656 | 0'9664 | 0'9671 | 0'9678 | 0'9686 | 0'9693 | 0'9699 | 0'   |
| 1'9 | 0'9713 | 0'9719 | 0'9726 | 0'9732 | 0'9738 | 0'9744 | 0'9750 | 0'9756 | 0'9761 | 0'   |
| 2'0 | 0'9772 | 0'9778 | 0'9783 | 0'9788 | 0'9793 | 0'9798 | 0'9803 | 0'9808 | 0'9812 | 0'   |

c) Buscamos el valor del error = e tal que  $P(175 - e \leq \overline{X}_{81} \leq 175 + e) = 0.99$ .

$$P(175 - e \leq \overline{X}_{81} \leq 175 + e) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-e}{13/9} \leq Z \leq \frac{e}{13/9}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - P\left(Z \leq \frac{-e}{13/9}\right) = P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - P\left(Z \geq \frac{e}{13/9}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - 1$$

$$P(175 - e \leq \overline{X}_{81} \leq 175 + e) = 0.99 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) - 1 = 0.99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) = 1.99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{13/9}\right) = \frac{1.99}{2} = 0.995 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e}{13/9} = 2.575 \Rightarrow \boxed{\text{Error} = 2.575 \cdot \frac{13}{9} \approx 3.72}$$

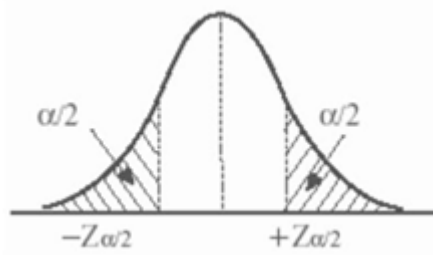
|     | 0'00   | 0'01   | 0'02   | 0'03   | 0'04   | 0'05   | 0'06   | 0'07   | 0'08   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0'0 | 0'5000 | 0'5040 | 0'5080 | 0'5120 | 0'5160 | 0'5199 | 0'5239 | 0'5279 | 0'5319 |
| 0'1 | 0'5398 | 0'5438 | 0'5478 | 0'5517 | 0'5557 | 0'5596 | 0'5636 | 0'5675 | 0'5714 |
| 0'2 | 0'5793 | 0'5832 | 0'5871 | 0'5910 | 0'5948 | 0'5987 | 0'6026 | 0'6064 | 0'6103 |
| 0'3 | 0'6179 | 0'6217 | 0'6255 | 0'6293 | 0'6331 | 0'6368 | 0'6406 | 0'6443 | 0'6480 |
| 0'4 | 0'6554 | 0'6591 | 0'6628 | 0'6664 | 0'6700 | 0'6736 | 0'6772 | 0'6808 | 0'6844 |
| 0'5 | 0'6915 | 0'6950 | 0'6985 | 0'7019 | 0'7054 | 0'7088 | 0'7123 | 0'7157 | 0'7190 |
| 0'6 | 0'7257 | 0'7291 | 0'7324 | 0'7357 | 0'7389 | 0'7422 | 0'7454 | 0'7486 | 0'7517 |
| 0'7 | 0'7580 | 0'7611 | 0'7642 | 0'7673 | 0'7704 | 0'7734 | 0'7764 | 0'7794 | 0'7823 |
| 0'8 | 0'7881 | 0'7910 | 0'7939 | 0'7967 | 0'7995 | 0'8023 | 0'8051 | 0'8078 | 0'8106 |
| 0'9 | 0'8159 | 0'8186 | 0'8212 | 0'8238 | 0'8264 | 0'8289 | 0'8315 | 0'8340 | 0'8365 |
| 1'0 | 0'8413 | 0'8438 | 0'8461 | 0'8485 | 0'8508 | 0'8531 | 0'8554 | 0'8577 | 0'8599 |
| 1'1 | 0'8643 | 0'8665 | 0'8686 | 0'8708 | 0'8729 | 0'8749 | 0'8770 | 0'8790 | 0'8810 |
| 1'2 | 0'8849 | 0'8869 | 0'8888 | 0'8907 | 0'8925 | 0'8944 | 0'8962 | 0'8980 | 0'8997 |
| 1'3 | 0'9032 | 0'9049 | 0'9066 | 0'9082 | 0'9099 | 0'9115 | 0'9131 | 0'9147 | 0'9162 |
| 1'4 | 0'9192 | 0'9207 | 0'9222 | 0'9236 | 0'9251 | 0'9265 | 0'9279 | 0'9292 | 0'9306 |
| 1'5 | 0'9332 | 0'9345 | 0'9357 | 0'9370 | 0'9382 | 0'9394 | 0'9406 | 0'9418 | 0'9429 |
| 1'6 | 0'9452 | 0'9463 | 0'9474 | 0'9484 | 0'9495 | 0'9505 | 0'9515 | 0'9525 | 0'9535 |
| 1'7 | 0'9554 | 0'9564 | 0'9573 | 0'9582 | 0'9591 | 0'9599 | 0'9608 | 0'9616 | 0'9625 |
| 1'8 | 0'9641 | 0'9649 | 0'9656 | 0'9664 | 0'9671 | 0'9678 | 0'9686 | 0'9693 | 0'9699 |
| 1'9 | 0'9713 | 0'9719 | 0'9726 | 0'9732 | 0'9738 | 0'9744 | 0'9750 | 0'9756 | 0'9761 |
| 2'0 | 0'9772 | 0'9778 | 0'9783 | 0'9788 | 0'9793 | 0'9798 | 0'9803 | 0'9808 | 0'9812 |
| 2'1 | 0'9821 | 0'9826 | 0'9830 | 0'9834 | 0'9838 | 0'9842 | 0'9846 | 0'9850 | 0'9854 |
| 2'2 | 0'9861 | 0'9864 | 0'9868 | 0'9871 | 0'9875 | 0'9878 | 0'9881 | 0'9884 | 0'9887 |
| 2'3 | 0'9893 | 0'9896 | 0'9898 | 0'9901 | 0'9904 | 0'9906 | 0'9909 | 0'9911 | 0'9913 |
| 2'4 | 0'9918 | 0'9920 | 0'9922 | 0'9925 | 0'9927 | 0'9929 | 0'9931 | 0'9932 | 0'9934 |
| 2'5 | 0'9938 | 0'9940 | 0'9941 | 0'9943 | 0'9945 | 0'9946 | 0'9948 | 0'9949 | 0'9951 |

El intervalo característico para el 99% es:

$$(\mu - \text{Error}, \mu + \text{Error}) = (175 - 3.72, 175 + 3.72) = (171.28, 178.72)$$

d) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 94% el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



|     | 0'00   | 0'01   | 0'02   | 0'03   | 0'04   | 0'05   | 0'06   | 0'07   | 0'08   |   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| 0'0 | 0'5000 | 0'5040 | 0'5080 | 0'5120 | 0'5160 | 0'5199 | 0'5239 | 0'5279 | 0'5319 | 0 |
| 0'1 | 0'5398 | 0'5438 | 0'5478 | 0'5517 | 0'5557 | 0'5596 | 0'5636 | 0'5675 | 0'5714 | 0 |
| 0'2 | 0'5793 | 0'5832 | 0'5871 | 0'5910 | 0'5948 | 0'5987 | 0'6026 | 0'6064 | 0'6103 | 0 |
| 0'3 | 0'6179 | 0'6217 | 0'6255 | 0'6293 | 0'6331 | 0'6368 | 0'6406 | 0'6443 | 0'6480 | 0 |
| 0'4 | 0'6554 | 0'6591 | 0'6628 | 0'6664 | 0'6700 | 0'6736 | 0'6772 | 0'6808 | 0'6844 | 0 |
| 0'5 | 0'6915 | 0'6950 | 0'6985 | 0'7019 | 0'7054 | 0'7088 | 0'7123 | 0'7157 | 0'7190 | 0 |
| 0'6 | 0'7257 | 0'7291 | 0'7324 | 0'7357 | 0'7389 | 0'7422 | 0'7454 | 0'7486 | 0'7517 | 0 |
| 0'7 | 0'7580 | 0'7611 | 0'7642 | 0'7673 | 0'7704 | 0'7734 | 0'7764 | 0'7794 | 0'7823 | 0 |
| 0'8 | 0'7881 | 0'7910 | 0'7939 | 0'7967 | 0'7995 | 0'8023 | 0'8051 | 0'8078 | 0'8106 | 0 |
| 0'9 | 0'8159 | 0'8186 | 0'8212 | 0'8238 | 0'8264 | 0'8289 | 0'8315 | 0'8340 | 0'8365 | 0 |
| 1'0 | 0'8413 | 0'8438 | 0'8461 | 0'8485 | 0'8508 | 0'8531 | 0'8554 | 0'8577 | 0'8599 | 0 |
| 1'1 | 0'8643 | 0'8665 | 0'8686 | 0'8708 | 0'8729 | 0'8749 | 0'8770 | 0'8790 | 0'8810 | 0 |
| 1'2 | 0'8849 | 0'8869 | 0'8888 | 0'8907 | 0'8925 | 0'8944 | 0'8962 | 0'8980 | 0'8997 | 0 |
| 1'3 | 0'9032 | 0'9049 | 0'9066 | 0'9082 | 0'9099 | 0'9115 | 0'9131 | 0'9147 | 0'9162 | 0 |
| 1'4 | 0'9192 | 0'9207 | 0'9222 | 0'9236 | 0'9251 | 0'9265 | 0'9279 | 0'9292 | 0'9306 | 0 |
| 1'5 | 0'9332 | 0'9345 | 0'9357 | 0'9370 | 0'9382 | 0'9394 | 0'9406 | 0'9418 | 0'9429 | 0 |
| 1'6 | 0'9452 | 0'9463 | 0'9474 | 0'9484 | 0'9495 | 0'9505 | 0'9515 | 0'9525 | 0'9535 | 0 |
| 1'7 | 0'9554 | 0'9564 | 0'9573 | 0'9582 | 0'9591 | 0'9599 | 0'9608 | 0'9616 | 0'9625 | 0 |
| 1'8 | 0'9644 | 0'9654 | 0'9663 | 0'9671 | 0'9679 | 0'9687 | 0'9695 | 0'9703 | 0'9711 | 0 |

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error < 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 1.88 \cdot \frac{13}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 1.88 \cdot 13 < 2\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1.88 \cdot 13}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow \left( \frac{1.88 \cdot 13}{2} \right)^2 < n \Rightarrow \boxed{n > 149.33}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 150 personas.