



**PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**  
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



|                                                                      |                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <b>CONVOCATÒRIA: JUNY 2025</b>                                       | <b>CONVOCATORIA: JUNIO 2025</b>                                      |
| <b>ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II</b> | <b>ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II</b> |

**BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3.** En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas.. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

**Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.**

**Apartado 1.** Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

**Problema 1. A.** Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

- ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? (3 puntos)
- ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

**Problema 1. B.** A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

*(Planteamiento correcto, 1,5 puntos - Resolución correcta 2 puntos)*

**Apartado 2.** Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

**Problema 2. A.** Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar la continuidad de la función en el intervalo [0,9]. (0,75 puntos)
- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo [0,9].

- (1,5 puntos)
- c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. (0,5 puntos)
- d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje  $OX$ , la recta de ecuación  $x=8$  y la recta de ecuación  $x=9$ . (0,75 puntos)

**Problema 2. B.** Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (0.5 puntos)

**Apartado 3.** Responda el único problema de este apartado.

**Problema 3.** En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

- a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. (1 punto)
- b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes. (1 punto)
- c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". (1 punto)

## Soluciones

**Problema 1. A.** Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

- a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? (3 puntos)  
 b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

a) Llamamos “x” al número de días de funcionamiento de la planta A e “y” al número de días de funcionamiento de la planta B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

|                   | Lotes P1 | Lotes P2 | Lotes P3 | Coste (miles) |
|-------------------|----------|----------|----------|---------------|
| Días planta A (x) | x        | 2x       | x        | 60x €         |
| Días planta B (y) | y        | y        | 5y       | 75y €         |
| TOTALES           | x + y    | 2x + y   | x + 5y   | 60x + 75y     |

La función a minimizar son los costes de funcionamiento de las dos fábricas, expresados en miles de euros:  $C(x, y) = 60x + 75y$ .

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3”  $\rightarrow x + y \geq 6$ ,

$2x + y \geq 8$ ,  $x + 5y \geq 10$ .

Las cantidades deben ser positivas  $\rightarrow x \geq 0$ ;  $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 6$$

$$2x + y = 8$$

$$x + 5y = 10$$

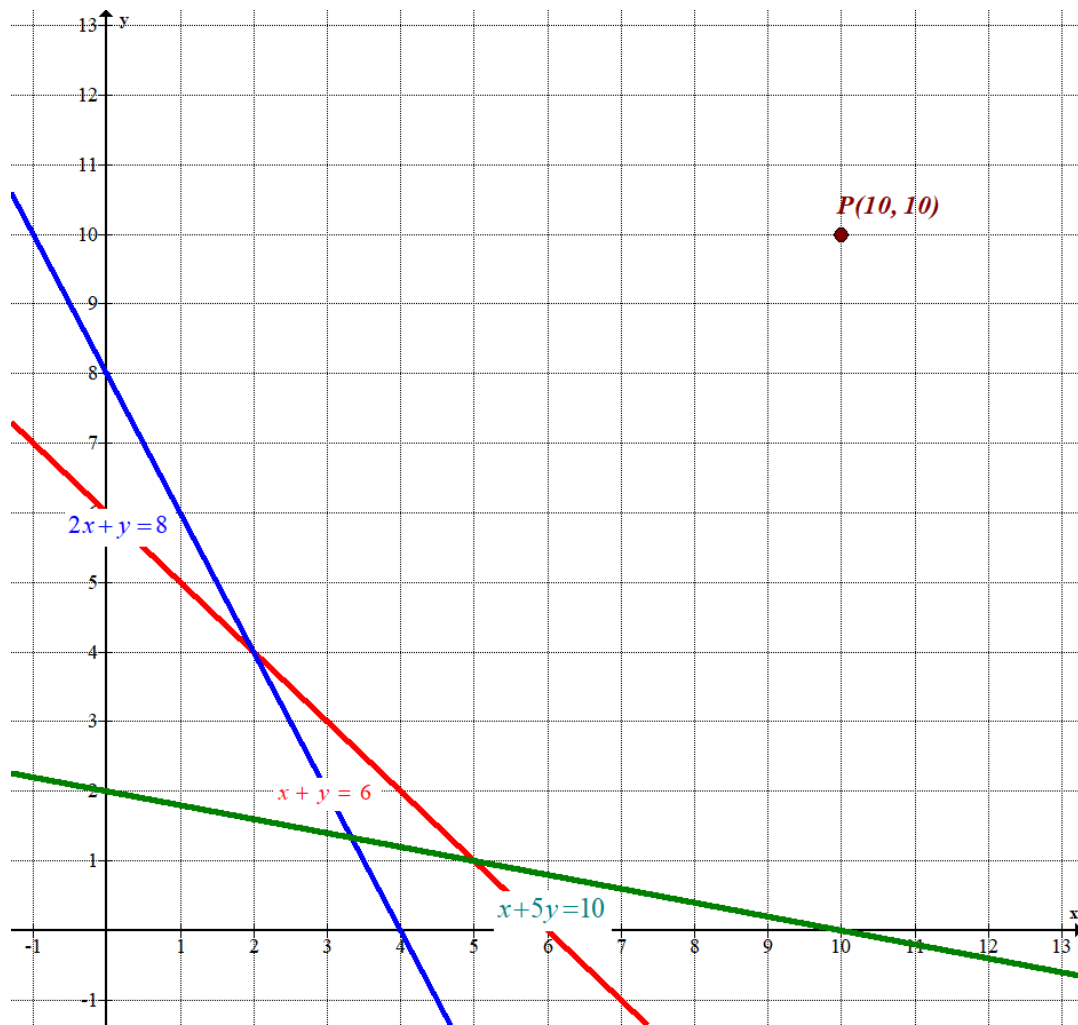
$$x \geq 0; y \geq 0$$

| x | y = 6 - x |
|---|-----------|
| 0 | 6         |
| 2 | 4         |
| 5 | 1         |
| 6 | 0         |

| x | y = 8 - 2x |
|---|------------|
| 0 | 8          |
| 2 | 4          |
| 3 | 2          |
| 4 | 0          |

| x  | y = $\frac{10 - x}{5}$ |
|----|------------------------|
| 0  | 2                      |
| 5  | 1                      |
| 10 | 0                      |

Primer  
cuadrante



Como las restricciones son

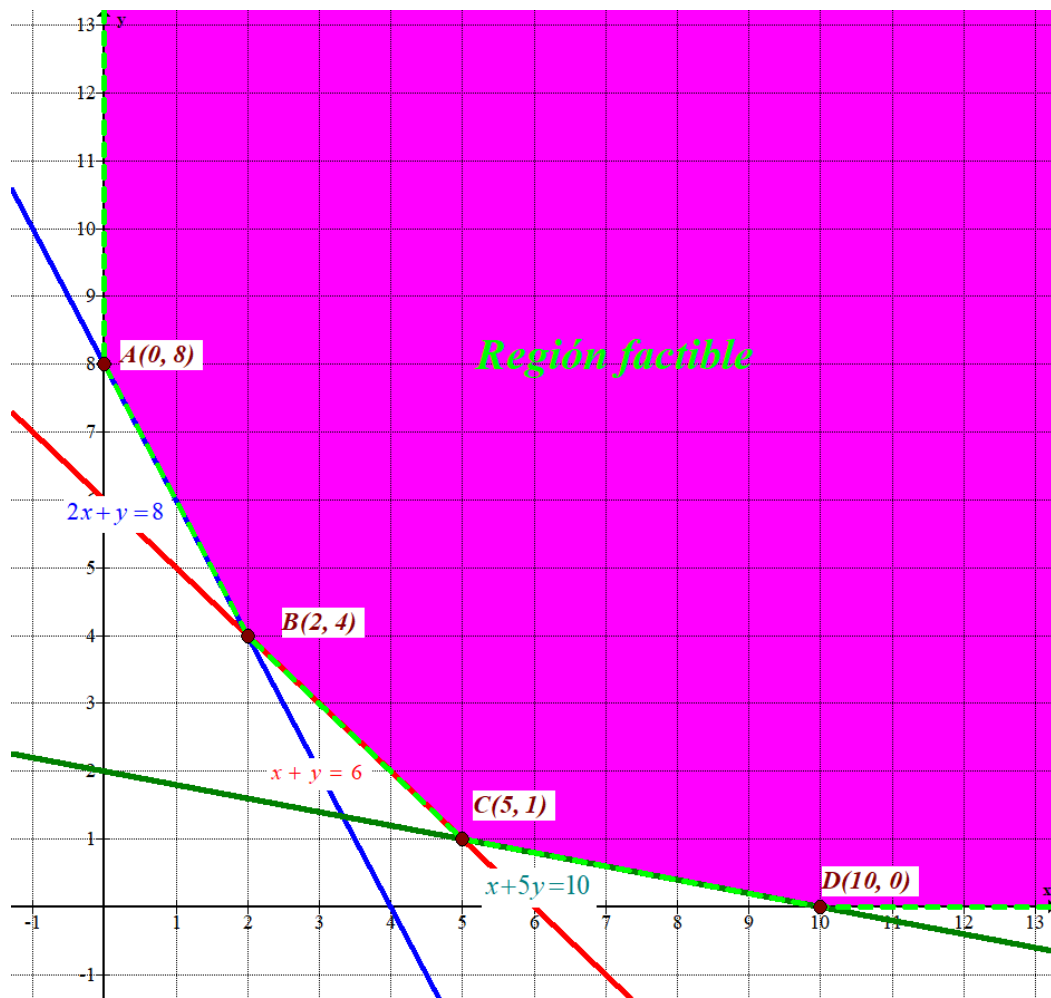
$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por encima de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto  $P(10, 10)$  perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \geq 6 \\ 20 + 10 \geq 8 \\ 10 + 50 \geq 10 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función costes  $C(x, y) = 60x + 75y$  en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(0, 8) \rightarrow C(0, 8) = 60 \cdot 0 + 75 \cdot 8 = 600$$

$$B(2, 4) \rightarrow C(2, 4) = 60 \cdot 2 + 75 \cdot 4 = 420$$

$$C(5, 1) \rightarrow C(5, 1) = 60 \cdot 5 + 75 \cdot 1 = 375 \text{ Mínimo}$$

$$D(10, 0) \rightarrow C(10, 0) = 60 \cdot 10 + 75 \cdot 0 = 600$$

Los mínimos costes que se pueden obtener en la región factible son de 375 y se obtienen en el punto  $C(5, 1)$ .

Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B.

- b) Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B.

**Problema 1. B.** A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

Llamamos “x” al número de espectadores menores de 5 años que han pagado el 20 % de la entrada, “y” al número de espectadores con edad entre 5 y 16 años que han pagado el 50% de la entrada, y “z” al número de espectadores mayores de 16 años y que han pagado la entrada completa.

“A un espectáculo circense acuden 500 espectadores”  $\rightarrow x + y + z = 500$ .

“La recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años han pagado el 20% de 9 €, es decir,  $0.2 \cdot 9 = 1.8$  €, los que tienen entre 5 y 16 años han pagado el 50% de 9 €, es decir,  $0.5 \cdot 9 = 4.5$ , el resto ha pagado 9 €”  $\rightarrow 1.8x + 4.5y + 9z = 2115$ .

“El número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa”  $\rightarrow x = 2z$ .

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 1.8x + 4.5y + 9z = 2115 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 500 \\ 1.8 \cdot 2z + 4.5y + 9z = 2115 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 500 \\ 4.5y + 12.6z = 2115 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 500 - 3z \\ 4.5y + 12.6z = 2115 \end{array} \right\} \Rightarrow 4.5(500 - 3z) + 12.6z = 2115 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2250 - 13.5z + 12.6z = 2115 \Rightarrow -0.9z = -135 \Rightarrow \boxed{z = \frac{135}{0.9} = 150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 150 = 300} \\ \boxed{y = 500 - 3 \cdot 150 = 50} \end{array} \right.$$

Han pagado el 20 % de la entrada 300 espectadores, el 50% lo han pagado 50 espectadores y la entrada completa la han pagado 150 espectadores.

**Problema 2, A.** Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo  $[0,9]$ . (0,75 puntos)  
 b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo  $[0,9]$ . (1,5 puntos)  
 c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. (0,5 puntos)  
 d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje  $OX$ , la recta de ecuación  $x=8$  y la recta de ecuación  $x=9$ . (0,75 puntos)

- a) La función en el intervalo  $[0,4)$  tiene la expresión  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ . Es una función continua pues el denominador se anula para  $x=-1$  que no pertenece al intervalo de definición. La función en el intervalo  $(4,8)$  tiene la expresión  $f(x) = 2x+4$ . Es una función continua pues es una función lineal. La función en el intervalo  $(8,9)$  tiene la expresión  $f(x) = 3x+60-x^2$ . Es una función continua pues es una función polinómica. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 2 \cdot 4 + 4 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x + 4 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} = 3.4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 12 \neq 3.4 = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} f(8) &= 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 60 - x^2 = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} 2x + 4 = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(8) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20$$

La función no es continua en  $x=4$  y es continua en  $x=8$ .

La función es continua en  $[0,4) \cup (4,9]$ .

- b) Analizamos la evolución de la función en cada intervalo.

La función en el intervalo  $[0,4)$  tiene la expresión  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ . Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-1-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} = 0.41 \in [0, 4) \\ -1 - \sqrt{2} = -2.41 \notin [0, 4) \end{cases}$$

- En el intervalo  $[0, -1 + \sqrt{2})$  tomamos  $x = 0.1$  y la derivada vale

$$f'(0.1) = \frac{2 \cdot 0.1 - 1}{(1 + 0.1)^2} = \frac{-80}{121} < 0. \text{ La función decrece en } [0, -1 + \sqrt{2}).$$

- En el intervalo  $(-1 + \sqrt{2}, 4)$  tomamos  $x = 1$  y la derivada vale  $f'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{4} > 0$

. La función crece en  $(-1 + \sqrt{2}, 4)$ .

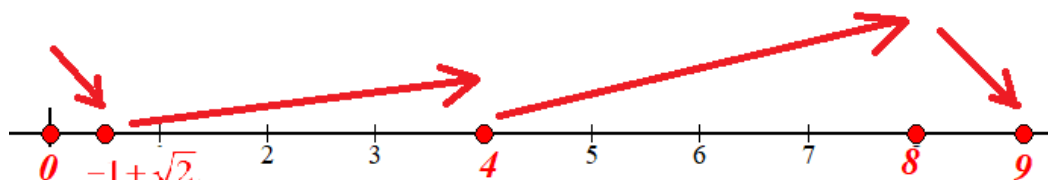
La función en el intervalo  $(4, 8)$  tiene la expresión  $f(x) = 2x + 4$  y su derivada es  $f'(x) = 2 > 0$ . La función es creciente en  $(4, 8)$ .

La función en el intervalo  $(8, 9)$  tiene la expresión  $f(x) = 3x + 60 - x^2$  y su derivada es  $f'(x) = 3 - 2x$ . Esta derivada se anula para  $x = \frac{3}{2} = 1.5 \notin (8, 9)$ . La derivada no cambia de signo en el intervalo  $(8, 9)$ .

Como  $f'(8.5) = 3 - 2 \cdot 8.5 = -14 < 0$  la función es decreciente en  $(8, 9)$ .

La función es decreciente en  $[0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9)$  y creciente en  $(-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



- c) Por el estudio anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en  $x = -1 + \sqrt{2}$  y un máximo local en  $x = 8$ .

Como  $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + (-1 + \sqrt{2})^2}{1 - 1 + \sqrt{2}} = -2 + 2\sqrt{2}$  y  $f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$  las coordenadas del mínimo local son  $(-1 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$  y las del máximo local son  $(8, 20)$ .

- d) En el intervalo  $(8, 9)$  la función tiene la expresión  $f(x) = 3x + 60 - x^2$ .

Comprobamos si la función corta el eje OX.

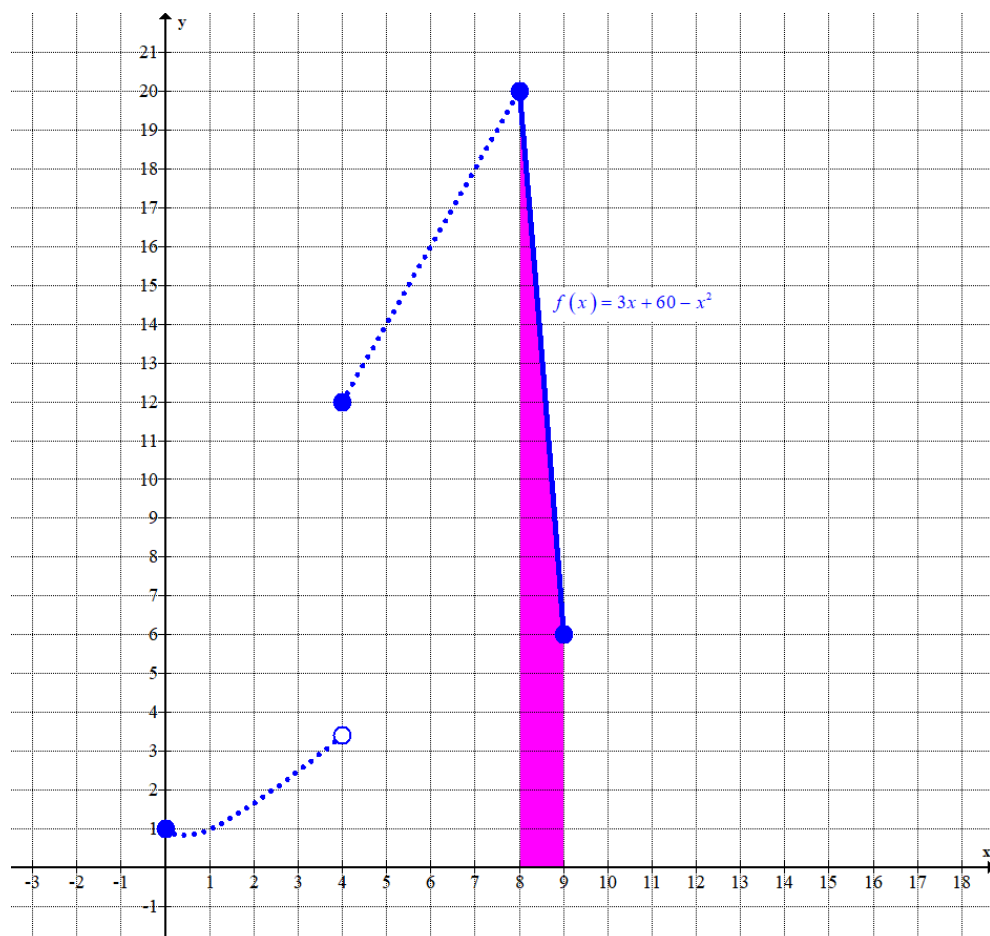
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3x + 60 - x^2 \\ \text{eje OX} &\rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + 3x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)60}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{249}}{-2} = \begin{cases} \frac{-3 + \sqrt{249}}{-2} = -6.3 \notin (8,9) \\ \frac{-3 - \sqrt{249}}{-2} = 9.39 \notin (8,9) \end{cases}$$

La función no corta el eje OX en el intervalo (8, 9), por lo que el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación  $x=8$  y la recta de ecuación  $x=9$  es el valor absoluto de la integral definida entre 8 y 9 de la función.

$$\begin{aligned} \int_8^9 f(x) dx &= \int_8^9 3x + 60 - x^2 dx = \left[ \frac{3}{2}x^2 + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = \\ &= \left[ \frac{3}{2}9^2 + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} \right] - \left[ \frac{3}{2}8^2 + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3} \right] = \\ &= \frac{243}{2} + 540 - 243 - 96 - 480 + \frac{512}{3} = \boxed{\frac{79}{6} \approx 13.1667} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de  $\frac{79}{6} \approx 13.1667$  unidades cuadradas.



**Problema 2. B.** Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 2x - 8 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \boxed{4=x} \\ \frac{2-6}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

Dominio  $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

Punto de corte con el eje OY:

$$\left. f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{A\left(0, \frac{9}{2}\right)}$$

eje OY  $\rightarrow x = 0$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left. f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \right\} \Rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

eje OX  $\rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} B(-3, 0) \\ C(3, 0) \end{matrix}}$$

Los puntos de corte con los ejes son:  $A\left(0, \frac{9}{2}\right)$ ,  $B(-3, 0)$  y  $C(3, 0)$ .

b) **Asíntota vertical.**  $x = a$

¿ $x = -2$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4(-2)^2 - 36}{(-2)^2 - 2(-2) - 8} = \frac{-20}{0} = \infty$$

$x = -2$  es asíntota vertical.

¿ $x = 4$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4 \cdot 4^2 - 36}{4^2 - 2 \cdot 4 - 8} = \frac{28}{0} = \infty$$

$x = 4$  es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$y = 4$  es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x(x^2 - 2x - 8) - (2x - 2)(4x^2 - 36)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \\ &= \frac{\cancel{8x^3} - 16x^2 - 64x - \cancel{8x^3} + 72x + 8x^2 - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-8(x^2 - x + 9)}{(x^2 - 2x - 8)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8(x^2 - x + 9)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-35}}{2} = \text{No existe}$$

La derivada nunca se anula por lo que estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de  $-2$  y  $4$  (excluidos del dominio).

- En el intervalo  $(-\infty, -2)$  tomamos  $x = -4$  y la derivada vale

$$f'(-4) = \frac{-8((-4)^2 - (-4) + 9)}{((-4)^2 - 2(-4) - 8)^2} = \frac{-28}{32} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo  $(-2, 4)$  tomamos  $x = 0$  y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-8(0^2 - 0 + 9)}{(0^2 - 2 \cdot 0 - 8)^2} = \frac{-9}{8} < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 4).$$

- En el intervalo  $(4, +\infty)$  tomamos  $x = 5$  y la derivada vale

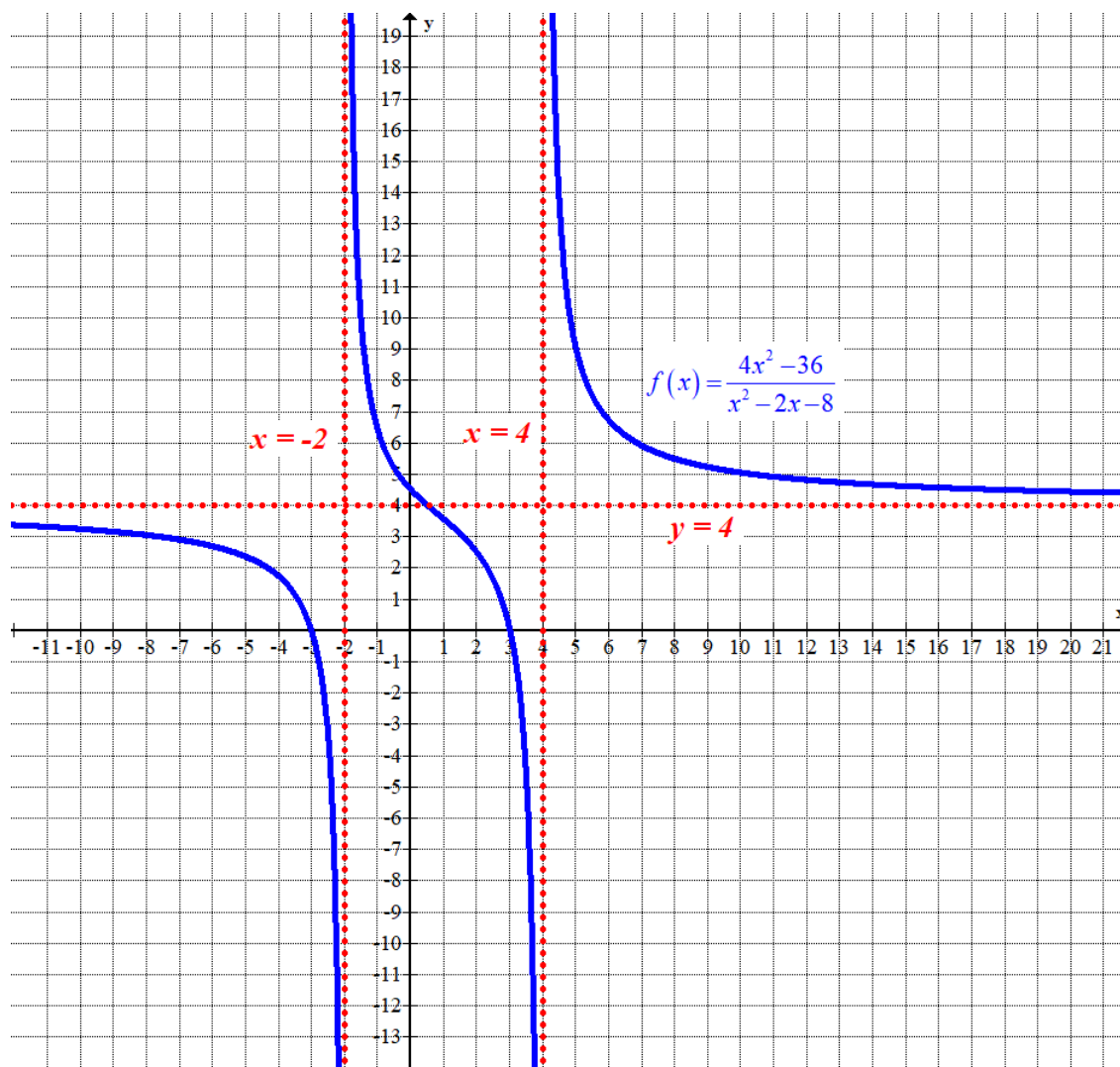
$$f'(5) = \frac{-8(5^2 - 5 + 9)}{(5^2 - 2 \cdot 5 - 8)^2} = \frac{-232}{49} < 0. \text{ La función decrece en } (4, +\infty).$$

La función decrece en todo su dominio.

Al ser siempre decreciente no presenta ni máximos ni mínimos locales.

d) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

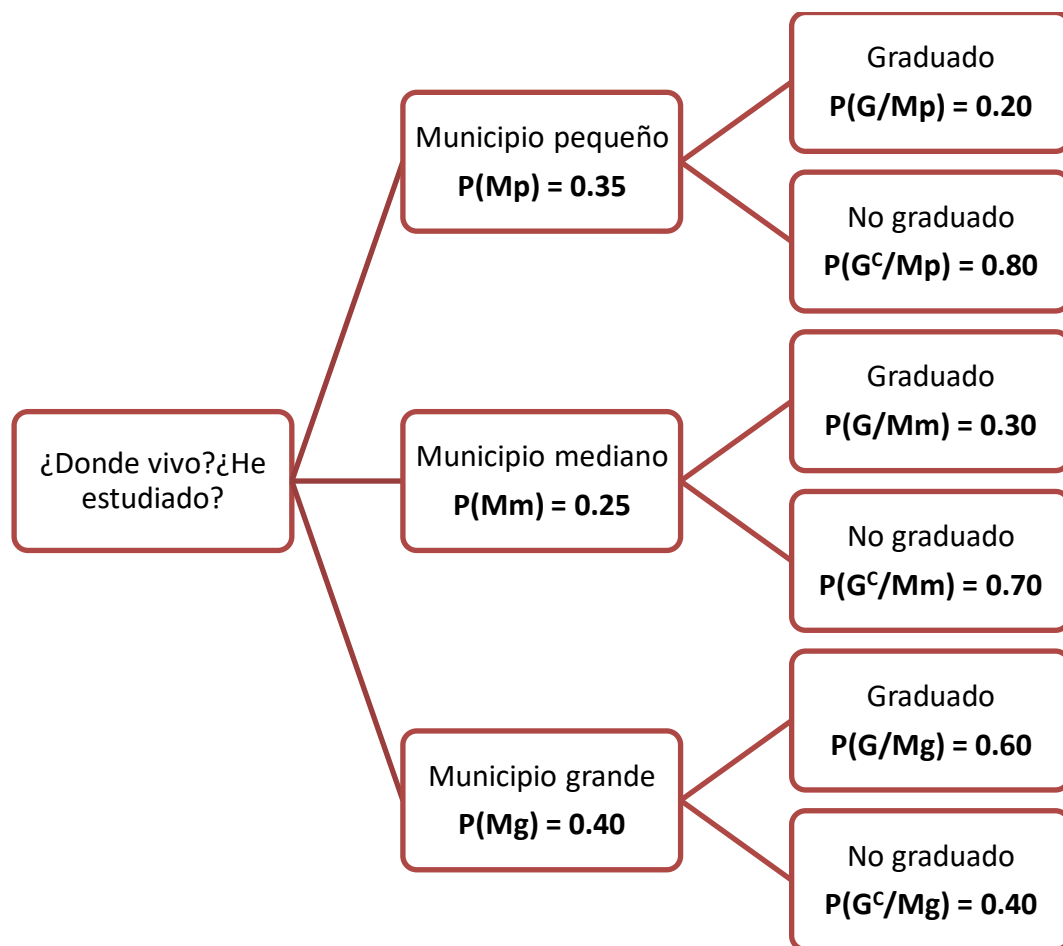
| $x$ | $f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$ |
|-----|-----------------------------------------|
| -4  | 1.75                                    |
| -3  | 0                                       |
| 0   | 4.5                                     |
| 2   | 2.5                                     |
| 5   | 9.14                                    |
| 6   | 6.75                                    |



**Problema 3.** En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

- a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. (1 punto)
- b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes. (1 punto)
- c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". (1 punto)

Construimos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular  $P(G)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(Mp)P(G/Mp) + P(Mm)P(G/Mm) + P(Mg)P(G/Mg) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.6 = \boxed{0.385}$$

- b) Nos piden calcular  $P(Mp^c / G)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Mp^c / G) = 1 - P(Mp / G) = 1 - \frac{P(Mp \cap G)}{P(G)} = 1 - \frac{P(Mp)P(G / Mp)}{P(G)} =$$

$$= 1 - \frac{0.35 \cdot 0.2}{0.385} = \boxed{\frac{9}{11} \approx 0.8182}$$

Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes es de  $\frac{9}{11} \approx 0.8182$ .

- c) El suceso "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" es el suceso  $Mg^c = Mm \cup Mp$ .

El suceso "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes" es el suceso  $G \cup Mp^c = G \cup Mm \cup Mg$ .

La intersección de los dos sucesos es  $(Mm \cup Mp) \cap (G \cup Mm \cup Mg) = Mm \cup (Mp \cap G)$ .

La intersección es el suceso "el seleccionado es de un pueblo mediano o es de un pueblo pequeño y está graduado".

$$P(Mm \cup (Mp \cap G)) = P(Mm) + P(Mp \cap G) = P(Mm) + P(Mp)P(G / Mp) =$$

$$= 0.25 + 0.35 \cdot 0.2 = 0.32$$

La probabilidad pedida tiene un valor de 0.32.

OTRA FORMA DE RESOLVER el apartado c)

Representamos el suceso "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" de color rojo.

|                                           | Graduado | No graduado |      |
|-------------------------------------------|----------|-------------|------|
| Pueblo habitantes < 10000                 |          |             | 35%  |
| Pueblo $10001 \leq \text{hab} \leq 50000$ |          |             | 25%  |
| Pueblo $50000 < \text{habitantes}$        |          |             |      |
|                                           |          |             | 100% |

Representamos el suceso "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes" de color azul.

|                                           | Graduado | No graduado |      |
|-------------------------------------------|----------|-------------|------|
| Pueblo habitantes < 10000                 |          |             |      |
| Pueblo $10001 \leq \text{hab} \leq 50000$ |          |             | 25%  |
| Pueblo $50000 < \text{habitantes}$        |          |             | 40%  |
|                                           |          |             | 100% |

La intersección de los sucesos lo coloreamos de rosa.

|                                           | Graduado                                | No graduado |      |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------|------|
| Pueblo habitantes < 10000                 | <b><math>0.20 \cdot 35 = 7\%</math></b> |             | 35%  |
| Pueblo $10001 \leq \text{hab} \leq 50000$ |                                         |             | 25%  |
| Pueblo $50000 < \text{habitantes}$        |                                         |             | 40%  |
|                                           |                                         |             | 100% |

La probabilidad de la intersección de los dos sucesos es  $7\% + 25\% = 32\%$ .

La La probabilidad de la intersección de los dos sucesos es 0.32.