



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

- (a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- (b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.
- (c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$

- (a) **(1 punto)** Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.
- (b) **(1 punto)** Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .
- (c) **(0.5 puntos)** Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 3 - (x-5)^2 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}.$$

- (a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.
- (b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.
- (c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x , ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1)=1$ y $f'(1)=2$, y $g(1)=-1$ y $g'(1)=2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que f tiene un máximo en $x=3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cos(4x^2 - 1)$$

Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

Pregunta 3. Opción B

(a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4\sin(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

(b) **(1 punto)** Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, calcula una expresión de g .

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2+t, -1-2t, 3+2t); \quad r_2(s) = (1+2s, 4-s, 4-2s)$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan

(b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.

(b) **(0.75 puntos)** Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6% de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95% mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

- (a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?
- (b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?
- (b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?
- (c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1) = 0.8413$, $F(2) = 0.9772$, $F(0.7) = 0.758$, $F(0.525) = 0.7$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

- (a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- (b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.
- (c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Ponemos esta información en una tabla.

	Hospedaje	Alimentación	Varios	TOTAL
Oriente (x)	30x	25x	25x	80x
Centro (y)	40y	20y	25y	85y
Occidente (z)	30z	40z	25z	95z
TOTAL	30x + 40y + 30z	25x + 20y + 40z	25x + 25y + 25z	80x + 85y + 95z

(a) En el hospedaje gasta 290 € $\rightarrow 30x + 40y + 30z = 290 \rightarrow 3x + 4y + 3z = 29$.

En alimentación gasta 290 € $\rightarrow 25x + 20y + 40z = 290 \rightarrow 5x + 4y + 8z = 58$.

En gastos varios gasta 225 € $\rightarrow 25x + 25y + 25z = 225 \rightarrow x + y + z = 9$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x + y + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 58 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

(b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x + y + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x = 9 - y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(9 - y - z) + 4y + 3z = 29 \\ 5(9 - y - z) + 4y + 8z = 58 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 27 - 3y - 3z + 4y + 3z = 29 \\ 45 - 5y - 5z + 4y + 8z = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ -y + 3z = 13 \end{cases} \Rightarrow -2 + 3z = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z = 15 \Rightarrow z = 5 \Rightarrow x = 9 - 2 - 5 = 2$$

Puede estar 2 días en la zona oriental, otros 2 días en la zona centro y 5 días en occidente.

(c) Si los días que pasa en oriente son 0 tenemos que $x = 0$. Sustituimos este valor en el sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \\ x + y + z = 9 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 3z = 29 \\ 4y + 8z = 58 \\ y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 3z = 29 \\ 4y + 8z = 58 \\ y = 9 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4(9 - z) + 3z = 29 \\ 4(9 - z) + 8z = 58 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 - 4z + 3z = 29 \\ 36 - 4z + 8z = 58 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -z = -7 \rightarrow z = 7 \\ 4z = 22 \rightarrow z = \frac{22}{4} = 5.5 \end{array} \right\}$$

La situación planteada no tiene solución, pues obtenemos dos valores distintos para “z” y además uno de ellos decimal. En el sistema que nos ha quedado tenemos más ecuaciones que incógnitas y las ecuaciones no son compatibles entre sí.

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$

- (a) **(1 punto)** Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.
 (b) **(1 punto)** Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .
 (c) **(0.5 puntos)** Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

- (a) La matriz B tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = -x - 2 - 2 + 4 + x + 1 = 1 \neq 0$$

El determinante de B vale siempre 1. La matriz B tiene inversa para cualquier valor de x .

- (b) Para $x = 0$ la matriz queda $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sabemos que tiene inversa. La calculamos.

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Sabemos que $\det(B) = 1$, por lo que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot 1 = \det(A)$.
 Se cumple la igualdad para cualquier valor de x .

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 3 - (x-5)^2 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}.$$

- (a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.
 (b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.
 (c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x , ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

(a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 3 - (4-5)^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 - (x-5)^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = 2$$

La función es continua en $x = 4$.

La función es continua en todo su dominio $[0, +\infty)$.

(b) La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -2(x-5) & \text{si } 4 < x \end{cases}.$

En el intervalo $[0, 4)$ la derivada es $f'(x) = \frac{1}{2} > 0$. La función es creciente en $[0, 4)$.

En el intervalo $(4, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = -2(x-5)$. La derivada se anula para $x = 5$.

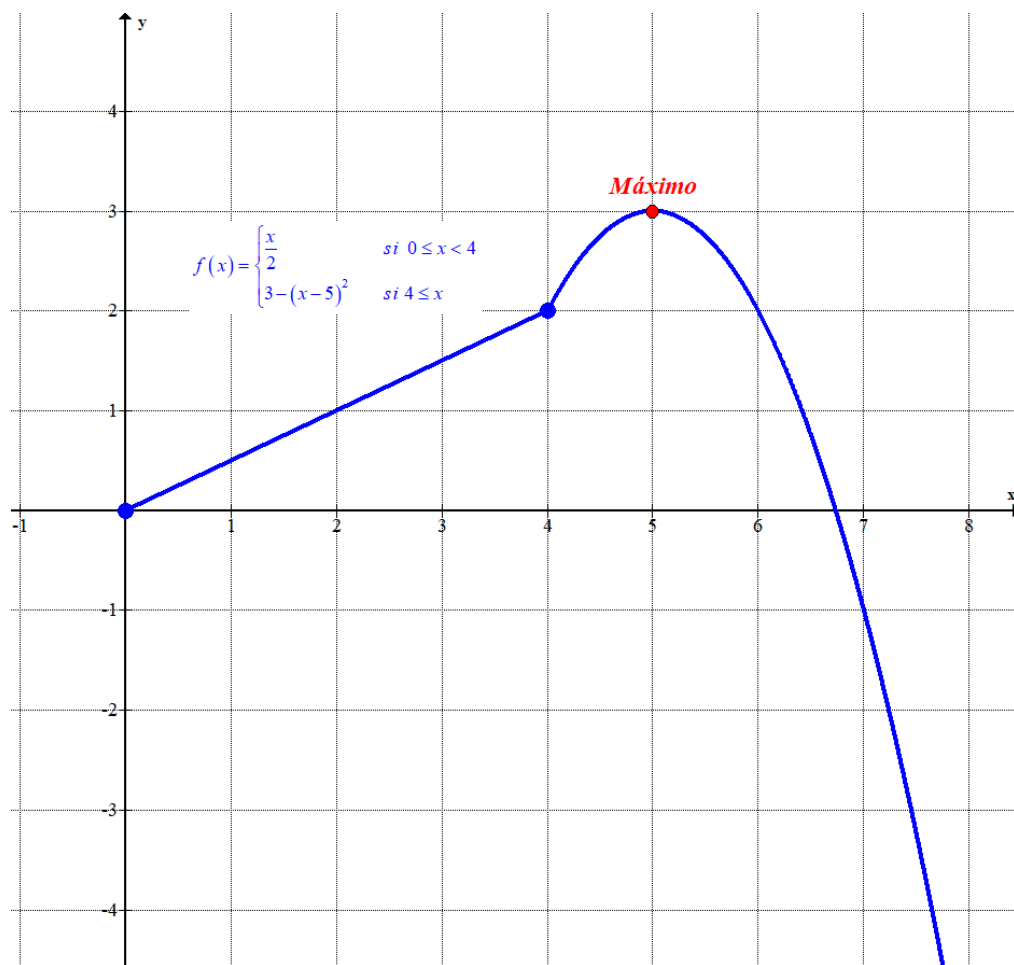
En el intervalo $(4, 5)$ la derivada es positiva y la función es creciente en $(4, 5)$. En el intervalo $(5, +\infty)$ la derivada es negativa y la función es decreciente en $(5, +\infty)$.

Resumiendo: La función es creciente en $[0, 5)$ y decreciente en $(5, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 5$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

$0 \leq x < 4$		$4 \leq x$	
x	$f(x) = \frac{x}{2}$	x	$f(x) = 3 - (x-5)^2$
0	0	4	2
1	0.5	5	3
2	1	6	2
3	1.5	7	-1



(c) Observando la gráfica comprobamos que el máximo absoluto de la función es 3 y nunca alcanza un valor superior a 3, por lo que nunca llegará a los 5 millones.

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1)=1$ y $f'(1)=2$, y $g(1)=-1$ y $g'(1)=2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que f tiene un máximo en $x=3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

(a) Calculamos el valor de $h(1)$.

$$h(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Calculamos el valor de $h'(1)$, calculando primero la derivada de la función $h(x)$.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$h'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2(-1) - 2 \cdot 1}{(-1)^2} = \frac{-4}{1} = \boxed{-4}$$

(b) Si la función f tiene un máximo en $x=3$ entonces se anula la derivada para este valor:
 $f'(3) = 0$.

Si $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto la derivada se anula para $x=3$. Obtenemos la derivada y aplicamos la propiedad.

$$k(x) = (x-2)^2 f(x) \Rightarrow k'(x) = 2(x-2) f(x) + (x-2)^2 f'(x)$$

$$k'(3) = 0 \Rightarrow 2(3-2) f(3) + (3-2)^2 f'(3) = 0 \Rightarrow 2 f(3) + f'(3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ f'(3) = 0 \} \Rightarrow 2 f(3) = 0 \Rightarrow \boxed{f(3) = 0}$$

Hemos obtenido que $f(3) = 0$.

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cos(4x^2 - 1)$$

Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

(a) Hallamos la primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x \cos(4x^2 - 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 4x^2 - 1 = t \rightarrow 8x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{8x} \end{array} \right\} =$$

$$= \int x \cos(t) \frac{dt}{8x} = \frac{1}{8} \int \cos(t) dt = \frac{1}{8} \operatorname{sen} t = \boxed{\frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + K}$$

Aplicamos la condición $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ para determinar el valor de K .

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + K \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{8} \operatorname{sen}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) + K \Rightarrow 1 = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(0) + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 1 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + 1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + 1$.

(b) Como la derivada de la función $F(x)$ es $f(x)$ estudiamos si la función $f(x)$ se anula para $x = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2} \neq 0$$

La derivada de $F(x)$ no se anula para $x = \frac{1}{2}$ y la función no tiene un extremo para ese valor.

Pregunta 3. Opción B

- (a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.
- (b) **(1 punto)** Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$, calcula una expresión de g .

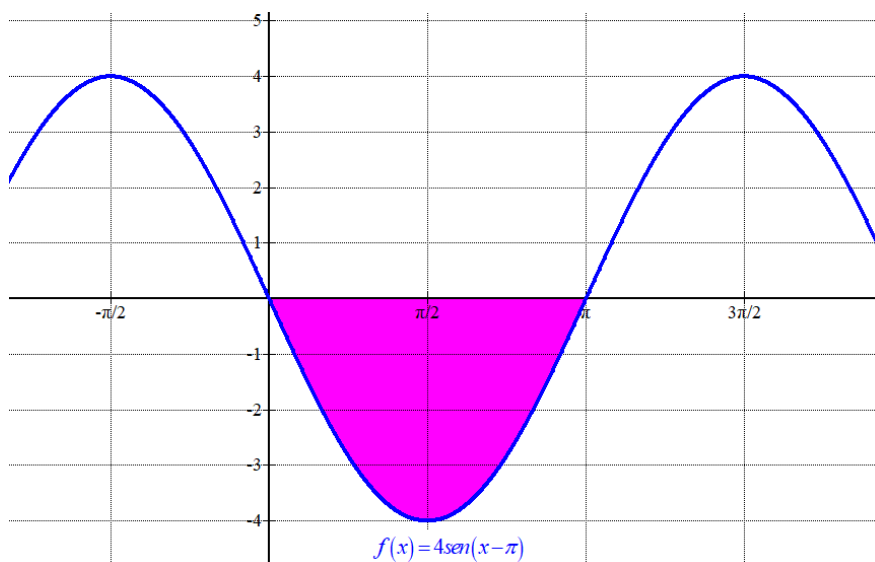
(a) Obtenemos los puntos de corte de $f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi)$ e $y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4\operatorname{sen}(x - \pi) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x - \pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \notin [0, \pi] \\ \dots \end{cases}$$

El área es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y π de la función.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi 4\operatorname{sen}(x - \pi) dx = \left[-4\cos(x - \pi) \right]_0^\pi = \\ &= \left[-4\cos(\pi - \pi) \right] - \left[-4\cos(0 - \pi) \right] = -4\cos(0) + 4\cos(-\pi) = -4 - 4 = -8 \end{aligned}$$

El área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$ tiene un valor de 8 unidades cuadradas.



(b) Si una primitiva de g es $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ entonces la derivada de $f(x)$ es la función g .

$$g(x) = f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x)) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2+t, -1-2t, 3+2t); \quad r_2(s) = (1+2s, 4-s, 4-2s)$$

Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan
 (b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

- (a) Estudiamos la posición relativa de las dos rectas. Obtenemos primero un punto y un vector de cada recta (puente).

$$r_1(t) = (2+t, -1-2t, 3+2t) \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(2, -1, 3) \\ \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \end{cases}$$

$$r_2(s) = (1+2s, 4-s, 4-2s) \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1+2s \\ y = 4-s \\ z = 4-2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1, 4, 4) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que los puentes no son paralelos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$$

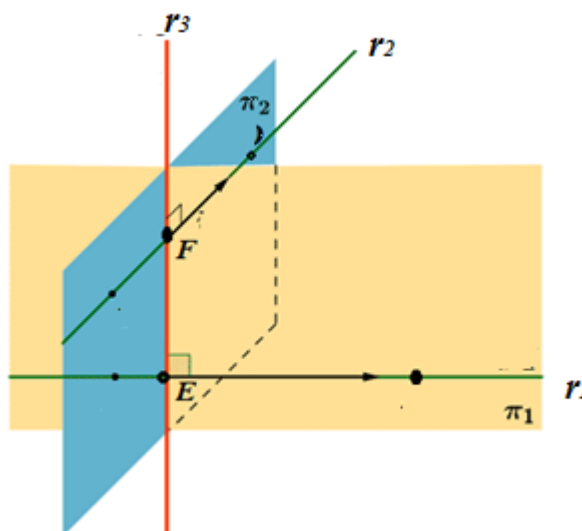
Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} Q_2(1, 4, 4) \\ P_1(2, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 4, 4) - (2, -1, 3) = (-1, 5, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-1, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 20 - 2 + 10 = -13 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas (puentes) se cruzan.

- (b) El pasadizo que los une es la recta r_3 que corta ambas rectas perpendicularmente. Ese es el camino con menor distancia que une los dos puentes.



El vector director de la recta r_3 es el producto vectorial $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 4j - k + 4k + 2j + 2i = (6, 6, 3)$$

Tomamos como vector director de la recta r_3 el vector $\vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{u}_1 \times \vec{v}_2) = \frac{1}{3}(6, 6, 3) = (2, 2, 1)$.

Determinamos el plano π_1 que contiene la recta r_1 y que también tiene como otro vector director $\vec{w} = (2, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_1 = (1, -2, 2) \\ P_1(2, -1, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-2) + (y+1) - 4(z-3) - 2(z-3) - 4(y+1) + 2(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-2) - 3(y+1) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow 2(x-2) - (y+1) - 2(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - y - 1 - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 2x - y - 2z + 1 = 0}$$

Determinamos el plano π_2 que contiene la recta r_2 y que también tiene como otro vector director $\vec{w} = (2, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (2, 2, 1) \\ \vec{v}_2 = (2, -1, -2) \\ Q_2(1, 4, 4) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1) + 2(y-4) - 2(z-4) - 4(z-4) + 4(y-4) + (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1) + 6(y-4) - 6(z-4) = 0 \Rightarrow (x-1) - 2(y-4) + 2(z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1-2y+8+2z-8=0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : x-2y+2z-1=0}$$

El punto E es el punto de corte de la recta r_1 con el plano π_2 .

$$r_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \end{cases} \Rightarrow 2+t-2(-1-2t)+2(3+2t)-1=0 \Rightarrow$$

$$\pi_2 : x-2y+2z-1=0$$

$$\Rightarrow 2+t+2+4t+6+4t-1=0 \Rightarrow 9t+9=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2-1=1 \\ y = -1-2(-1)=1 \\ z = 3+2(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(1,1,1)}$$

El punto F es el punto de corte de la recta r_2 con el plano π_1 .

$$r_2 : \begin{cases} x = 1+2s \\ y = 4-s \\ z = 4-2s \end{cases} \Rightarrow 2(1+2s)-4+s-2(4-2s)+1=0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 : 2x-y-2z+1=0$$

$$\Rightarrow 2+4s-4+s-8+4s+1=0 \Rightarrow 9s-9=0 \Rightarrow s=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2=3 \\ y = 4-1=3 \\ z = 4-2=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(3,3,2)}$$

Los puntos de inicio y final del pasadizo son $E(1,1,1)$ y $F(3,3,2)$.

La longitud del pasadizo es el módulo del vector que une los puntos de inicio y final del mismo.

$$\begin{matrix} E(1,1,1) \\ F(3,3,2) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = (3,3,2) - (1,1,1) = (2,2,1)$$

$$Longitud = d(E, F) = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

La longitud del pasadizo es de 3 unidades.

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: A(1, 2, 3), B(-2, 1, 4), C(3, 0, 5) y D(0, -1, 2). Se pide:

(a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.

(b) **(0.75 puntos)** Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

(a) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 3) \\ B(-2, 1, 4) \\ C(3, 0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 4) - (1, 2, 3) = (-3, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3, 0, 5) - (1, 2, 3) = (2, -2, 2) \\ C(3, 0, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-5 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 6 + 2y + 6z - 30 + 2z - 10 + 6y + 2x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y + 8z - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y + z - 5 = 0}$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: y + z - 5 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: y + z - 5 = 0 \\ D(0, -1, 2) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 2 - 5 = 0?$$

El punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. Los puntos A, B, C y D no pertenecen al mismo plano.

(b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 2j + 6k + 2k + 6j + 2i = (0, 8, 8)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 8^2 + 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{128}}{2} = \boxed{4\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo de vértices A, B y C tiene un valor de $4\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

(c) El volumen del tetraedro formado por los 4 puntos es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, 2) \\ \overrightarrow{AD} = (0, -1, 2) - (1, 2, 3) = (-1, -3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 + 2 - 6 - 2 - 2 - 18 = -32$$

El volumen del tetraedro formado por los 4 puntos tiene un valor de $32/6 = 16/3$ unidades cúbicas.

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6% de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95% mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

- (a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?
- (b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

- (a) La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 0.06. La variable X que cuenta el número de piezas defectuosas de un grupo de 10 piezas elegidas al azar es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.06$. $X = B(10, 0.06)$.

Debemos calcular $P(X \geq 1)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 10) = 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.06^0 \cdot 0.94^{10} = 1 - 0.94^{10} = \boxed{0.4614} \end{aligned}$$

La probabilidad de que al elegir 10 piezas al azar al menos una de ellas sea defectuosa es de 0.4614.

- (b) Llamamos D a “la pieza es defectuosa” y F “el sistema prueba/fallo da fallo”. Calculamos la probabilidad de que una pieza elegida al azar no nos dé fallo: $P(\bar{F})$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\bar{F}) &= P(D)P(\bar{F} / D) + P(\bar{D})P(\bar{F} / \bar{D}) = \\ &= 0.06 \cdot (1 - 0.95) + (1 - 0.06) \cdot (1 - 0.04) = \boxed{0.9054} \end{aligned}$$

La probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo es de 0.9054.

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?
- (b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?
- (c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1) = 0.8413$, $F(2) = 0.9772$, $F(0.7) = 0.758$, $F(0.525) = 0.7$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

- (a) X = el tiempo en minutos que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente. $X = N(30, 5)$.

Debemos calcular $P(25 \leq X \leq 30)$.

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 30) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{25-30}{5} \leq Z \leq \frac{30-30}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0) = \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= \{\text{Miramos en la lista} \rightarrow F(1) = 0.8413\} = 0.5 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.3413} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un cliente tarde en resolver su problema entre 25 y 30 minutos es de 0.3413.

- (b) Calculamos $P(X > 20)$.

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{20-30}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = \\ &= \{F(2) = 0.9772\} = \boxed{0.9772} \end{aligned}$$

La probabilidad de que cambie de empresa es de 0.9772.

- (c) Tenemos que tras los cambios $P(X \leq 20) = 0.7$.

La ley que sigue la distribución es $X = N(\mu, 5)$. Determinamos el valor de la media.

$$\begin{aligned} P(X \leq 20) = 0.7 &\Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{20-\mu}{5}\right) = 0.7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ F(0.525) = 0.7 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{20-\mu}{5} &= 0.525 \Rightarrow 20 - \mu = 2.625 \Rightarrow \boxed{\mu = 20 - 2.625 = 17.375} \end{aligned}$$

Tras los cambios el tiempo medio de espera es de 17.375 minutos, menor que el tiempo medio anterior (30 minutos). La situación ha mejorado.