



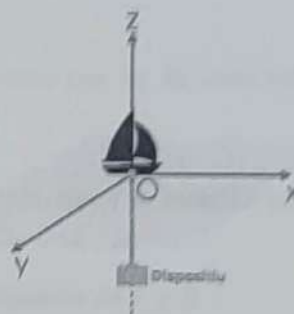
El examen consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar solo uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero.

Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2,5 pt).

Problema A1. — Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas.

El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



- a) [1 punto] Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O , sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (vean la figura). A continuación, este se desplazó 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0, \\ 35y + 12z = -3780, \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto en el que se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O como el centro de referencia (el origen de coordenadas).

- b) [0.5 puntos] Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?
- c) [1 punto] Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitorizando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda, \\ y = 10 + \lambda, \\ z = -380 + 10\lambda, \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?



Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren de una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos, se ha recopilado la siguiente información sobre el costo en materias primas:

$$\text{Producto 1: } 2x + y - z = 40 \text{ €,}$$

$$\text{Producto 2: } x - y + 2z = 90 \text{ €,}$$

$$\text{Producto 3: } x + 2y = 70 \text{ €,}$$

$$\text{Producto 4: } x - y + z = 50 \text{ €}.$$

- (a) [0.5 puntos] Describe qué significa la ecuación del producto 1.
- (b) [2 puntos] Con los datos disponibles, ¿es posible calcular el precio por kg de cada materia prima? Es decir, ¿calcular x , y , z ? Justifica tu respuesta.

Problema B2. — Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

- (a) [1 punto] Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de I y B .
- (b) [1.5 puntos] Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) a lo largo de un tramo de 500 metros es

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

donde $x \in [0, 500]$ representa la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

- (a) [1.5 puntos] Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado.
Indicación: se puede utilizar el teorema de Bolzano.
- (b) [1 punto] Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

Problema C2. — Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

- (a) [1 punto] Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.
- (b) [1.5 puntos] Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$.

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0.0005. Sabiendo que la probabilidad que la prueba dé positivo cuando la enfermedad está presente es del 99%, y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99%, responde:

- (a) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?
- (b) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

Problema D2. — En una universidad española, el 55% del alumnado son mujeres y el 45% son hombres. En esta universidad, el 13% de las mujeres estudian una carrera STEM, mientras que el 37% de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

- (a) [0.75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
- (b) [1 punto] Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- (c) [0.75 puntos] Sabiendo que el estudiante seleccionado NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?