

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de realitzar expressant de forma raonada el procés seguit per resoldre-les, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. Es valorarà el grau d'acompliment amb un màxim de 0,25 punts cada exercici.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tindran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que puguin veure's afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent.
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corregeix-ne els que apareixen primer.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

Part A.

Problema A1. — Solució.

- a) Notem que el punt inicial del dispositiu, després de submergir-lo, és el $(0, 0, -315)$. Cercam un punt (a, b, c) tal que ha de pertànyer a la recta que ens donen i el mòdul del vector $(a - 0, b - 0, c + 315)$ ha de ser $37m$.
- Manera 1: Sabem que el dispositiu assoleix la profunditat desitjada, és a dir, $z = -350m$. A més, $a = 0$, per pertànyer a la recta. Llavors ens falta trobar b tal que $50b + 12 \cdot (-350) = -3780$,

d'on trobam que $b = 12$ i per tant, la posició que cercam és la $(0, 12, -350)$.

Manera 2: Hem d'imposar les dues condicions esmentades. És a dir, hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} a = 0, \\ 35b + 12c = -3780, \\ a^2 + b^2 + (c + 315)^2 = 37^2, \end{cases}$$

d'on s'obté el resultat desitjat.

- (b) Volem mantenir-lo a $-350m$ de profunditat, llavors el pla és $z = -350$ (x, y lliures).
- (c) Hem de calcular la intersecció entre el pla $z = -350$ i la recta proporcionada per l'enunciat. Per tant, cercam la intersecció de

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda, \\ y = 10 + \lambda, \\ z = -380 + 10\lambda, \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = \beta, \\ y = \gamma, \\ z = -350, \end{cases}$$

d'on tenim que

$$\begin{cases} \beta = 5 + 4\lambda, \\ \gamma = 10 + \lambda, \\ -350 = -380 + 10\lambda. \end{cases}$$

Resolent el sistema, tenim que aquest té solució (podrien xocar), la qual és $\lambda = 3$, $\gamma = 13$ i $\beta = 19$. Per tant, el dispositiu podria xocar amb l'objecte en el punt $(17, 13, -350)$. Punt que hauria d'evitar el dispositiu.

Criteris:

- (a) **[1 punt]** 0.5 punts per plantejar bé el problema a resoldre i 0.5 punts per executar-lo correctament. Es lleven 0.5 punts error de càlcul (màxim 1 error).
- (b) **[0.5 punts]** 0.5 punts si la resposta és correcta. Altrament 0.
- (c) **[1 punt]** 0.25 punts pel plantejament, 0.5 punts pel desenvolupament i 0.25 punts per la conclusió final correcta. Es lleven 0.2 punts per error de càlcul (màxim 2 errors).

Part B.

Problema B1. — Solució.

- (a) L'equació del producte 1 ens indica que, per construir el producte 1 es requereixen 2 kg de fusta i 1 kg de ferro. El cost d'aquest material supera en 40 € el cost d'1 kg de plàstic.
- (b) Notem que la informació que ens proporcionen de cada producte ens permet establir una relació entre els costos de cada kg de matèria primera, la qual ve donada pel sistema d'equacions $A\mathbf{x} = b$, on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{i } b = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el problema es podria resoldre veient que el $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 3$ (nombre d'incògnites) o simplement resolent el sistema que involucra les 3 primeres equacions i comprovar que satisfan la quarta.

Manera 1: Tenim que, prenent les 3 primeres equacions de la matriu A ,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

i, per tant, $\text{Rang}(A) = 3$.

Per altra part, calculant el determinant de la matriu ampliada $(A|b)$, es té que $|(A|b)| = 0$ i, per tant, $\text{Rang}(A|b) = 3$. Com que el sistema té 3 incògnites, podem concloure que és un sistema compatible determinat i, per tant, sí que es pot calcular el preu de cada kg de matèria primera.

Manera 2: Resolem el sistema que conté les 3 primeres equacions i comprovam que la quarta també es compleix.

Resolent el sistema (per Cramer, Gauss, substitució...) s'obté que la solució d'aquest és $x = 30$, $y = 20$, $z = 40$. Substituint cada variable a la quarta equació del sistema, es té que, en efecte, $30 - 20 + 40 = 50$. Aleshores, $x = 30$, $y = 20$, $z = 40$ és la solució del sistema, la qual cosa ens indica que sí que és possible calcular el preu de cada matèria primera.

Criteris:

- (a) **[0.5 punts]** 0.5 punts si explica correctament tota l'equació, 0.25 punts si només n'explica 3 termes, 0 altrament.

A la resolució es proporciona una possible manera; podria ser diferent.

- (b) **[2 punts]**

Manera 1: 0.5 punts pel càlcul de $\text{Rang}(A)$, 1 punt pel càlcul de $\text{Rang}(A|b)$, 0.5 punts per concloure bé el resultat (s'ha d'indicar almanco que és un sistema compatible o que té solució).

Manera 2: 2 punts per resoldre correctament el sistema (si resolen el sub-sistema 3×3 , es lleven 0.5 punts si no es comprova que se satisfà la quarta equació).

Es lleven 0.2 punts per error de càlcul (màxim 3 errors).

Problema B2. — *Solució.*

- (a) Sabem que $AB + I = A$ i que A és invertible, és a dir, que existeix A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Aleshores, tenim que

$$A^{-1}(AB + I) = A^{-1}A \Leftrightarrow B + A^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1} = I - B.$$

- (b) Notem que de l'apartat (a) sabem que $A^{-1} = I - B$ o, el que és equivalent, $B = I - A^{-1}$. Per tant,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Per veure si és invertible o no necessitam calcular el seu determinant i veure si s'anul·la o no. Ara bé,

$$|B| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \neq 0.$$

Aleshores, sí que és invertible.

Criteris:

- (a) **[1 punt]** Es lleven 0.5 punts per error no significatiu [canvi d'algun signe o donar per assumit que existeix alguna inversa desconeguda].
- (b) **[1.5 punts]** 1 punt per calcular correctament B . Si ho resolen aïllant la B , 0.5 punts per aïllar correctament B i 0.5 punts per calcular la solució correcta. En qualsevol dels dos casos, llevam 0.2 punts per cada valor de B mal calculat (màxim 3 errors).
0.5 punts per veure, justificadament, que B és invertible. Si només indiquen que ho és però no ho comproven matemàticament o no ho justifiquen, es lleva tota la puntuació.

Part C.

Problema C1. — *Solució.*

- (a) Volem veure que existeix $x \in [0, 500]$ tal que $A(x) = 0$. Fem-ho aplicant el teorema de Bolzano. $A(x)$ és una funció contínua per ser un polinomi. A més, $A(0) = 200 > 0$, $A(500) = -1800 < 0$. Aleshores, pel teorema de Bolzano sabem que $\exists x \in [0, 500]$ tal que $A(x) = 0$, tal com volíem veure.
- (b) Com que és un polinomi de grau 3 (domini $\mathcal{D} = \mathbb{R}$), almenys hem de calcular on es troben els punts crítics i veure el creixement de la funció.
Punts crítics:

$$A'(x) = -0.0003x^2 + 0.1x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-0.1 \pm \sqrt{0.0052}}{-0.0006} = \frac{0.1 \pm \sqrt{0.0052}}{0.0006}$$

Tenim dos punts crítics

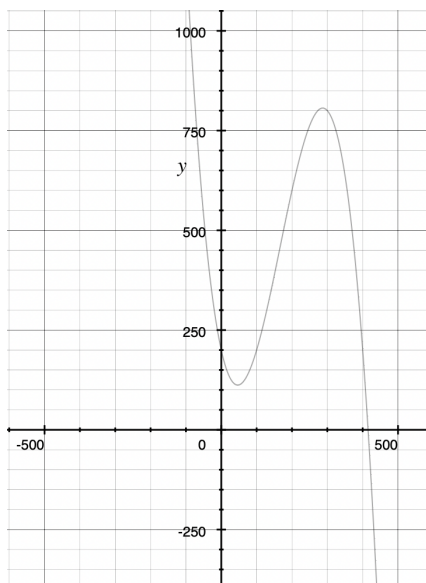
$$p_1 : \left(\frac{0.1 + \sqrt{0.0052}}{0.0006}, A\left(\frac{0.1 + \sqrt{0.0052}}{0.0006}\right) \right) = (286.8517, 806.4605);$$

$$p_2 : \left(\frac{0.1 - \sqrt{0.0052}}{0.0006}, A\left(\frac{0.1 - \sqrt{0.0052}}{0.0006}\right) \right) = (46.4816, 112.0580).$$

Estudiant el creixement i decreixement tenim que

$$A'(40) < 0, A'(50) > 0, A'(500) < 0,$$

per la qual cosa p_1 és un mínim i p_2 és un màxim. Si ho representam, es veu que només es pot creuar una vegada l'eix OY i, per tant, $A(x)$ només s'anul·la una vegada.



Criteris:

- (a) **[1.5 punts]** 0.5 punts per comprovar cada una de les hipòtesis del teorema de Bolzano (continuitat i canvis de signe). 0.5 punts per aplicar el teorema i proporcionar la conclusió. Nota: s'ha d'explicar perquè la funció és contínua. No basta en dir que ho és (−0.25 punts si no ho fan).
- (b) **[1 punt]** 0.25 punts per resoldre $A'(x) = 0$. 0.25 punts per proporcionar els dos punts crítics. 0.25 punts per calcular els intervals de creixement o veure el caràcter del punt crític. 0.25 punts per contestar que el punt sí que és únic i justificar-ho.

Notem que ambdós apartats es poden resoldre directament fent (b). Si és el cas i el desenvolupament és correcte i justificat, es proporciona tota la puntuació del problema.

Problema C2. — *Solució.*

- (a) Notem que el $\ln(2x)$ només està definit quan $2x > 0$, i, per tant, $x > 0$. Així mateix, de $\frac{1}{x}$ tenim que x tampoc no pot ser 0. Aleshores, el domini és $\mathcal{D} = (0, +\infty)$.
Calculem ara el comportament als extrems.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(2x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} \stackrel{\text{Hòpital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

- (b) Notem que, $f(x) = 0$ si i només si $\ln(2x) = 0$ i, per tant, $2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$. Aleshores, com que la funció no s'anul·la per a $x \in [\frac{1}{2}, 5]$, podem calcular directament $\int_{\frac{1}{2}}^5 f(x) dx$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^5 \frac{1}{x} \ln(2x) dx = \frac{1}{2} (\ln(2x))^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^5 = \frac{1}{2} ((\ln(10))^2 - (\ln(1))^2) = \frac{1}{2} (\ln(10))^2 u^2 \approx 2.65 u^2.$$

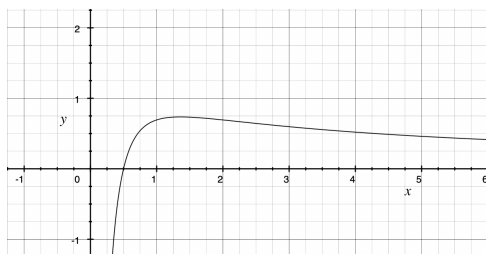
Notem que, si no se cerquen els punts on s'anul·la la funció, una altra manera per saber els extrems de la integral és representar la funció i veure quina és la regió que ens demanen. Per això ens faltaria calcular els màxims i mínims (calcular la derivada i veure quan s'anul·la). Així doncs,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(2x) + \frac{1}{x} \frac{1}{2x} 2 = -\frac{1}{x^2} \ln(2x) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln(2x)),$$

la qual s'anul·la si i només si $1 - \ln(2x) = 0$ i, per tant, $\ln(2x) = 1$, d'on s'obté $x = \frac{1}{2}e^1$. Aleshores, l'únic punt crític és

$$\left(\frac{1}{2}e^1, 2e^{-1}\right) \approx (1.36, 0.74).$$

Com que $f'(1) > 0$ i $f'(2) < 0$, tenim que el punt crític és un màxim i ja podríem representar la funció.



Criteris:

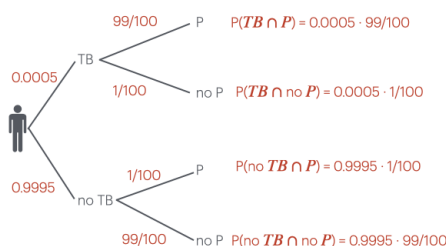
- (a) **[1 punt]** 0.25 punts pel càlcul del domini, 0.25 punts per calcular el $\lim_{x \rightarrow 0}$ i 0.5 punts per calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty}$.

- (b) [1.5 punts] 0.5 punts per plantejar bé la integral a resoldre. 0.5 punts per integrar correctament. 0.5 punts per donar el resultat correcte amb les unitats. Es lleva -0.2 punts si no indiquen les unitats.

Part D.

Problema D1. — *Solució.* Sigui TB l'esdeveniment “tenir tuberculosi” i P l'esdeveniment “donar positiu”. De l'enunciat sabem que

$$P(TB) = 0.0005, \quad P(P|TB) = 0.99, \quad P(\text{no } P|\text{no } TB) = 0.99.$$



Aleshores,

(a) $P(P|\text{no } TB) = 0,01$.

(b)
$$P(TB|\text{no } P) = \frac{P(TB \cap \text{no } P)}{P(\text{no } P)} = \frac{0,0005 \cdot 0,01}{0,0005 \cdot 0,01 + 0,9995 \cdot 0,99} = \frac{0,000005}{0,98951} \approx 5,053 \cdot 10^{-6}.$$

Criteris:

- (a) [1.25 punts] 0.5 punts si el plantejament és correcte, 0.25 punts pel llenguatge matemàtic emprat, 0.5 punts si la resposta és correcta.
- (b) [1.25 punts] 0.5 punts si el plantejament és correcte, 0.25 punts pel llenguatge matemàtic emprat, 0.5 punts si la resposta és correcta.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació: 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0, 1]$).

Problema D2. — *Solució.* Indiquem sobre una taula les dades que ens proporciona l'enunciat.

	STEM	No STEM	Total
Dona	13% de 55 $\approx$ 7	87% de 55 $\approx$ 48	55
Home	37% de 45 $\approx$ 17	63% de 45 $\approx$ 28	45
Total	24	76	100

Aleshores,

$$(a) \ P(\text{STEM}) = \frac{0.13 \cdot 55 + 0.37 \cdot 45}{100} = 0.238.$$

$$(b) \ P(\text{dona}|\text{STEM}) = \frac{0.13 \cdot 55}{0.13 \cdot 55 + 0.37 \cdot 45} = \frac{7.15}{23.8} = 0.3.$$

$$(c) \ P(\text{dona}|\text{No STEM}) = \frac{0.87 \cdot 55}{0.87 \cdot 55 + 0.63 \cdot 45} = \frac{47.85}{76.2} = 0.63.$$

Criteris:

- (a) **[0.75 punts]** 0.25 punts pel plantejament, 0.25 punts pel formalisme i 0.25 punts per la solució correcta. Si ho han calculat com a $P(\text{STEM}) = \frac{24}{100} = 0.24$, també s'accepta com a vàlid.
- (b) **[1 punt]** 0.25 punts pel plantejament, 0.25 punts pel formalisme i 0.5 punts per la solució correcta. Si ho han calculat com a $P(\text{dona}|\text{STEM}) = \frac{7}{24} = 0.29$, també s'accepta com a vàlid.
- (c) **[0.75 punts]** 0.25 punts pel plantejament, 0.25 punts pel formalisme i 0.25 punts per la solució correcta. Si ho han calculat com a $P(\text{dona}|\text{no STEM}) = \frac{48}{76} = 0.63$, també s'accepta com a vàlid.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació: 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0, 1]$).