

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

Criterios de calificación

- A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.
- B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.
- C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.
- D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).
- E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.
- F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.
- G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.
- H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)
- I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se

requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

- J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.
- K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.
- L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.
- M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.
- N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.
- O) Las faltas de ortografía se penalizan. A partir de la tercera falta de ortografía se penalizará con 0.1 puntos cada nueva falta ortográfica hasta un máximo de 1 punto sobre el total de la calificación del examen.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN
--

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- 0.5 a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta.
- 0.75 b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5 (mg/L)/h$.
- 0.75 c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración.
- 0.5 d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?

Solución:

a) Analizamos la continuidad de los diferentes tramos de la función.

- Primer tramo: $f(x)$ es polinómica, por tanto, continua.
- Segundo tramo: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$. Como $x \geq 2$, se tiene que $5x - 1 > 0$, por tanto la raíz y el cociente están bien definidos. Este segundo tramo también es continuo.

Analizamos la continuidad en el punto de cambio, $x = 2$.

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x), f(x) \text{ es continua en } x=2.$$

Se puede afirmar que el modelo es continuo.

b) La velocidad de crecimiento instantáneo es la derivada de $f(x)$ en $x=3$,

$$f'(x) = \frac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}} \text{ para } x > 2; \quad f'(3) = \frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.43 (mg/L)/h.$$

Por tanto, podemos afirmar que es cierto, la velocidad instantánea de crecimiento de la concentración residual a las 3 horas de suministrar el medicamento es mayor que $-0.5 (mg/L)/h$.

- c) Para saber si siempre disminuye analizamos el crecimiento de la función en cada uno de los tramos,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -45 & \text{si } x > 2 \\ 2(5x - 1)\sqrt{5x - 1} & \end{cases}$$

Como se observa en la expresión de la derivada, la derivada de la función es siempre negativa, por tanto, la concentración residual del Metabolix en sangre siempre disminuye.

Como la función siempre disminuye la concentración máxima se alcanza al inicio, y su valor es

$$f(0) = 11 \text{ mg/L}$$

La concentración del Metabolix en sangre es máxima justo en el momento que se administra el medicamento y es de 11mg/L

- d) Calculamos el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{5x - 1}} = 0$$

La concentración del Metabolix en sangre tiende a desaparecer cuando transcurre el tiempo.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- 1 a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} .
- 1.5 b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) La matriz M tiene inversa si y sólo si $|M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a + a - 3 = -1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz M siempre tiene inversa.

Calculamos la matriz inversa,

$$\text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 3-a & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}(M)^t = \begin{pmatrix} 2-a & 3-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{Adj}(M)^t = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial,

$$MA = B - MX; \quad MX = B - MA; \quad X = M^{-1}(B - MA)$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B - MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (usando el apartado a))}$$

Finalmente,

$$X = M^{-1}(B - MA) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución, } X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Notación matemática correcta

Otra forma: $MA = B - MX; \quad MX = B - MA; \quad X = M^{-1}(B - MA) = M^{-1}B - A$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución, } X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Notación matemática correcta

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- 1.25 a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k .
- 1.25 b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

Solución:

- a) El rango máximo de la matriz A es 3 y eso ocurre cuando su determinante sea distinto de cero,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 + 8k - 20 + 8k = 5k^2 + 16k + 12$$

$$5k^2 + 16k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -2, \quad k = -\frac{6}{5}$$

- Si $k \neq -2$ y $k \neq -\frac{6}{5}$, el $\text{rang}(A) = 3$
- Si $k = -2$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Tomando el menor

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2 \neq 0$$

Obtenemos que el $\text{rang}(A) = 2$.

- Si $k = -\frac{6}{5}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -\frac{6}{5} & 1 \\ -4 & 4 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Tomando el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$

Obtenemos que el $\text{rang}(A) = 2$.

- b) Calculamos A^2 ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $2A - I$,

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix},$$

Y se comprueba la igualdad.

Por otro lado,

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

Uso correcto de la notación matemática

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

0.25 a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$

1 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

1.25 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2

Solución:

a) Verificamos si $P \in r_1$

$$P = (2, -1, 1) \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2 + 3(-1) - 3 \cdot 1 = 8 - 3 - 3 = 2 \\ 2 \cdot 2 - 3(-1) - 6 \cdot 1 = 4 + 3 - 6 = 1 \end{cases} \rightarrow P(2, -1, 1) \in r_1$$

Comprobamos a continuación que el punto P no está en la recta r_2

$$P = (2, -1, 1) \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3} \rightarrow \frac{2+3}{2} \stackrel{?}{=} 2 - (-1) \stackrel{?}{=} \frac{1+4}{3} \rightarrow \frac{5}{2} \neq 3 \neq \frac{5}{3} \rightarrow P(2, -1, 1) \notin r_2$$

b) Hallemos en primer lugar el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

$$r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3} \rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - 3 \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3\lambda - 4 \end{cases}$$

$$r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(2\lambda - 3) + 3(2 - \lambda) - 3(3\lambda - 4) = 2 \\ 2(2\lambda - 3) - 3(2 - \lambda) - 6(3\lambda - 4) = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 8\lambda - 12 + 6 - 3\lambda - 9\lambda + 12 = 2 \\ 4\lambda - 6 - 6 + 3\lambda - 18\lambda + 24 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4\lambda + 6 = 2 \\ -11\lambda + 12 = 1 \end{cases} \rightarrow \lambda = 1$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 3 \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3\lambda - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 1 - 3 \\ y = 2 - 1 \\ z = 3 \cdot 1 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow Q = (-1, 1, -1)$$

Hallemos, ahora, la distancia entre los puntos $P = (2, -1, 1)$ y $Q = (-1, 1, -1)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17} = 4.12 \text{ u}$$

$d(P, Q) = \sqrt{17} = 4.12 \text{ u}$
--

c)

$$\vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -27\vec{i} + 18\vec{j} - 18\vec{k} = (-27, +18, -18) \equiv (3, -2, 2)$$

$$\vec{v}_{r_2} = (2, -1, 3)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2}|}{|\vec{v}_{r_1}| \cdot |\vec{v}_{r_2}|} = \frac{|(3, -2, 2) \cdot (2, -1, 3)|}{\sqrt{9 + 4 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{|14|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{14}} = 0.9074 \rightarrow$$

$\alpha = \cos^{-1}(0.9074) = 24.83^\circ = 24^\circ 50' 24''$
--

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2); \pi: -x + 2y + z + 1 = 0; \quad r: \begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

- 1 a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r
 1.5 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π

Solución:

- a) Veamos si recta y plano se intersecan, para ello vamos a expresar la recta r en paramétricas y sustituiremos en la ecuación del plano.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k} = (12, 8, 4) \equiv (3, 2, 1)$$

Averiguamos un punto de la recta: $\begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Hacemos $z = 0$, entonces $y = -5$, y con estos datos sustituimos en la primera ecuación y el valor de $x = \frac{7-35}{4} = -7$

El punto será $P(-7, -5, 0)$

$$r: \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\pi: -(-7 + 3\lambda) + 2(-5 + 2\lambda) + \lambda + 1 = 0 \\ -2 + 2\lambda = 0; \lambda = 1;$$

Por tanto, recta y plano se intersecan en el punto $Q(-4, -3, 1)$

- b) Para hallar el punto simétrico de A respecto del plano π , construimos la recta perpendicular al plano que pase por A , hallamos la intersección con el plano π y dicho punto será el punto medio entre A y su simétrico A' .
 Como la recta es perpendicular al plano, su vector director será el vector normal del plano, por tanto la ecuación en paramétricas de dicha recta es

$$s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano

$$-1 + \lambda + 4\lambda + 2 + \lambda + 1 = 0; \lambda = \frac{-1}{3}.$$

Con lo que el punto de intersección, punto medio de A y su simétrico es,

$$P_M = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Y el vector $\overrightarrow{AP_M} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, con lo que el punto simétrico de A es

$$A' = A + 2\overrightarrow{AP_M} = \left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

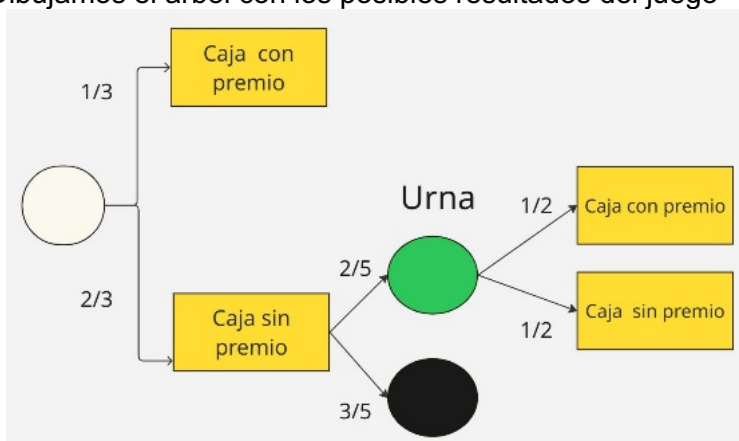
En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer al azar una bola de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

- 0.5 a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.
- ¹ b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.
- ¹ c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

Solución:

a) Dibujamos el árbol con los posibles resultados del juego



b) Definimos los siguientes sucesos:

- G_1 ='elegir la caja premiada en el primer intento'
- NG_1 ='elegir una de las cajas no premiadas en el primer intento'
- G_2 ='elegir la caja premiada en el 2º intento'
- NG_2 ='elegir una de las cajas no premiadas en el 2º intento'
- V ='sacar bola verde'
- N ='sacar bola negra'

La probabilidad de que obtener premio se calcula aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P('ganar premio') &= P(G_1) + P(NG_1) \cdot P\left(\frac{V}{NG_1}\right) \cdot P(G_2|NG_1 \cap V) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

La probabilidad de ganar premio es $\frac{7}{15} \approx 0.47$

c) Utilizamos el teorema del Bayes para el cálculo de esta probabilidad

$$P(V | \text{"Ganar premio"}) = \frac{P(V) \cdot P('ganar premio' | V)}{P('ganar premio')}$$

$$= \frac{\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}.$$

$$P(V) = P(NG_1) \cdot P(V/NG_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

La probabilidad de haber sacado una bola verde sabiendo que ha ganado un premio es de $\frac{2}{15} \approx 0.27$.

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- 0.75 a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?
- 0.75 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?
- ¹ c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarias en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos senderistas se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

Solución:

a) X='temperatura diurna en un día de agosto en °C' $X \sim N(22,5)$

$$\begin{aligned} P(18 \leq X \leq 25) &= P\left(\frac{18-22}{5} \leq Z \leq \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.6) \\ &= P(Z \leq 0.6) - P(Z \geq 0.8) = P(Z \leq 0.6) - (1 - P(Z \leq 0.8)) \\ &= 0.7257 - (1 - 0.7881) = 0.5138 \end{aligned}$$

La probabilidad de que en un día de agosto se den las condiciones ideales para el senderismo es 0.5138

b) Agosto es un mes de 31 días, calculamos primero la probabilidad de estar en riesgo de insolación

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= P\left(Z > \frac{30-22}{5}\right) = P(Z \geq 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) = 1 - 0.9452 \\ &= 0.0548 \end{aligned}$$

Con este dato, podemos decir que el número esperado de días en el mes de agosto donde existe peligro de insolación es $31 \cdot 0.0548 = 1.6988 \sim 2$ días

c) Número de visitantes por día es 11.000, de ellos practican senderismo 0.05 · 11000 = 550 *personas/día*. Ahora calculamos la probabilidad de que exista cambios bruscos de temperatura es un día de agosto.

$$\begin{aligned} P(X \leq 15) &= P\left(Z \leq \frac{15-22}{5}\right) = P(Z \leq -1.4) = 1 - P(Z \leq 1.4) = (1 - 0.9192) \\ &= 0.0808 \end{aligned}$$

Sabiendo esta probabilidad, el número de días del mes de agosto donde se esperan cambios bruscos de temperatura es $0.0808 \cdot 31 = 2.5 \approx 3$ días

Por tanto, se verán afectadas unas 1650 personas por los cambios bruscos de temperatura.

