

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Mayores de 25 y 45 años Castilla y León	MATEMÁTICAS	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	--------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.-

a) En función del parámetro m , discutir la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x - my - mz = 7 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $m = 1$. (1 punto)

E2.- Sea r la recta que pasa por los puntos $(2,1,2)$ y $(-2,0,-3)$.

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (1,1,1)$. (1,5 puntos)

b) Calcular la distancia del plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$ al punto $Q = (0,0,1)$ (1 punto)

E3.- Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} ax + e^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular a, b para que f sea derivable y por tanto continua en $x = 1$. (2,5 puntos)

E4.-

a) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. (1,25 puntos)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - \sin x}$. (1,25 puntos)

OPCIÓN B

E1.- Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

a) Hallar para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$.

(1,5 puntos)

b) Calcular B^{-1} para $m = -1$.

(1 punto)

E2.- Dados el punto $A = (-1, 2, 0)$ y los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, -1)$,

a) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícita del plano π que pasa por el punto A y tiene como vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(1,25 puntos)

b) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -7 - 3\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$ con el plano

$\pi: -2x - y - 3z = 0$. En el caso de que tengan algún punto en común, calcularlo explícitamente.

(1,25 puntos)

E3.- Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

a) Hallar sus máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión.

(1,25 puntos)

b) Estudiar sus asíntotas.

(1,25 puntos)

E4.- Calcular:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right)$.

(1,25 puntos)

b) Calcular $\int \cos^3 x dx$.

(1,25 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A****E1.-****a)** En función del parámetro m , discutir la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x - my - mz = 7 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $m = 1$. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -m & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & -m & -m & 7 \end{pmatrix}.$$

Buscamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -m & -m \end{vmatrix} = 3m + 3 - \cancel{2m} + 9 + \cancel{2m} + m = 4m + 12$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4m + 12 = 0 \Rightarrow 4m = -12 \Rightarrow \boxed{m = -3}$$

Se nos plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada usando el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 7 \\ -3 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -3 \quad 1 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} A/B \\ \\ A \end{matrix}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución)

Conclusión: Si $m \neq -3$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $m = -3$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x - y - z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - x - y \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x - y - z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 1 - x - y = 4 \\ 3x - y - 1 + x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4y = 3 \\ 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow 2 - 4y = 3 \Rightarrow -1 = 4y \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{4}} \Rightarrow \boxed{z = 1 - 2 + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4}}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = \frac{-1}{4}$, $z = \frac{-3}{4}$.

E2.- Sea r la recta que pasa por los puntos $(2,1,2)$ y $(-2,0,-3)$.

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (1,1,1)$.

(1,5 puntos)

b) Calcular la distancia del plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$ al punto $Q = (0,0,1)$

(1 punto)

a) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos $P = (1,1,1)$, $(2,1,2)$ y $(-2,0,-3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ A(2,1,2) \in \pi \\ B(-2,0,-3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PA} = (2,1,2) - (1,1,1) = (1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PB} = (-2,0,-3) - (1,1,1) = (-3,-1,-4) \\ P(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(y-1) - (z-1) - 0 + 4(y-1) + x-1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 3 - z + 1 + 4y - 4 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - z - 1 = 0}$$

El plano que contiene a la recta r y al punto $P = (1,1,1)$ tiene ecuación $\pi : x + y - z - 1 = 0$.

b) Hallamos la distancia del plano π al punto Q .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - z - 1 = 0 \\ Q(0,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, Q) = \frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15u^2}$$

E3.- Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} ax + e^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular a, b para que f sea derivable y por tanto continua en $x=1$. **(2,5 puntos)**

La función debe ser continua en $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a + e^1 = a + e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + e^x = a + e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - x + b = 1^2 - 1 + b = b \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a + e = b}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} a + e^x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La función es derivable en $x=1$, por lo que deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a + e^x = a + e^1 = a + e \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 = 2 - 1 = 1 \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + e = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1 - e}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida.

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - e \\ b &= a + e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 1 - e + e = 1}$$

Los valores buscados son $a = 1 - e$ y $b = 1$.

E4.-

a) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - \operatorname{sen} x}$. **(1,25 puntos)**

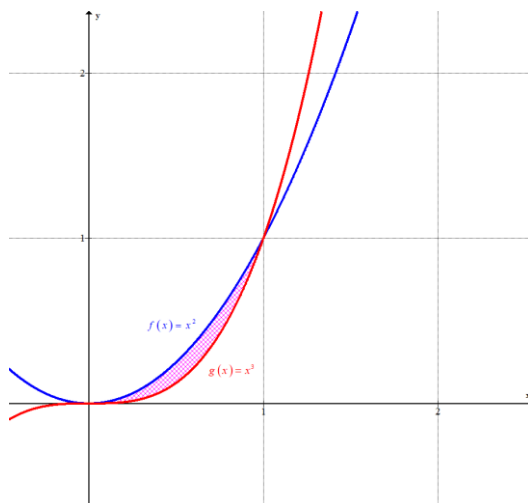
a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

El área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ es el valor de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones.

Como $f(0.5) = 0.5^2 = 0.25 > g(0.5) = 0.5^3 = 0.125$ tomaremos $f(x) - g(x) = x^2 - x^3$.

$$\text{Área} = \int_0^1 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{12} \approx 0.0833 u^2$$



b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2}}{0 - \operatorname{sen} 0} = \frac{1 - 1 - 0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \frac{e^0 - 1 - 0}{1 - \cos 0} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \frac{e^0 - 1}{\operatorname{sen} 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

OPCIÓN B

E1.- Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

a) Hallar para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$.

(1,5 puntos)

b) Calcular B^{-1} para $m = -1$.

(1 punto)

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$B^2 = 2B + I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1^2 & 1+m+1-m \\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+m^2+2m+1 & 2 \\ 2 & 1+1+m^2-2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2+2m+2=3+2m \\ m^2-2m+2=3-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ m^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow \boxed{m=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Se cumple lo pedido para $m = \pm 1$.

b) Para $m = -1$ la matriz queda $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $m = -1$ la matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

Como para $m = -1$ se cumple que $B^2 = 2B + I$, entonces $B^2 - 2B = I \rightarrow B(B - 2I) = I$, por lo que la inversa de B es la matriz $B - 2I$.

$$m = -1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E2.- Dados el punto $A=(-1,2,0)$ y los vectores $\vec{u}=(-1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,-1,-1)$,

a) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícita del plano π que pasa por el punto A y tiene como vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(1,25 puntos)

b) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -7-3\lambda \\ z = 5-3\lambda \end{cases}$ con el plano

$\pi: -2x - y - 3z = 0$. En el caso de que tengan algún punto en común, calcularlo explícitamente.

(1,25 puntos)

a) El plano π que pasa por el punto A y tiene como vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}=(-1,2,0) \\ \vec{v}=(2,-1,-1) \\ A(-1,2,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{cases} x = -1 - \alpha + 2\beta \\ y = 2 + 2\alpha - \beta \\ z = -\beta \end{cases}$$

Hallamos la ecuación implícita del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}=(-1,2,0) \\ \vec{v}=(2,-1,-1) \\ A(-1,2,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x+1) + 0 + z - 4z - (y-2) - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - \cancel{2} + z - 4z - y + \cancel{2} = 0 \Rightarrow -2x - y - 3z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y + 3z = 0}$$

b) Para determinar la posición relativa de recta y plano calculamos el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -7-3\lambda \\ z = 5-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, -3, -3) \\ \pi: -2x - y - 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-2, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-2, -3, -3) \cdot (-2, -1, -3) = 4 + 3 + 9 = 21 \neq 0$$

Como el producto escalar es no nulo la recta y el plano son secantes. Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -7-3\lambda \\ z = 5-3\lambda \end{cases} \\ \pi: -2x - y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(-2\lambda) - (-7-3\lambda) - 3(5-3\lambda) = 0 \Rightarrow 4\lambda + 7 + 3\lambda - 15 + 9\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\frac{1}{2} = -1 \\ y = -7 - 3\frac{1}{2} = \frac{-17}{2} \\ z = 5 - 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(-1, \frac{-17}{2}, \frac{7}{2}\right)}$$

El punto de corte de recta y plano es $P\left(-1, \frac{-17}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

E3.- Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

a) Hallar sus máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión.

(1,25 puntos)

b) Estudiar sus asíntotas.

(1,25 puntos)

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1 \cdot x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos: $x = 0$, $x = -4$. También incluimos el valor excluido del dominio $x = -2$.

- En el intervalo $(-\infty, -4)$ tomamos $x = -5$ y la derivada vale

$$f'(-5) = \frac{(-5)^2 + 4(-5)}{(-5+2)^2} = \frac{5}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -4).$$

- En el intervalo $(-4, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

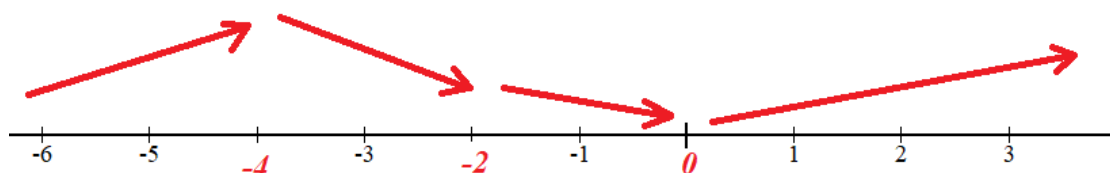
$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 + 4(-3)}{(-3+2)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-4, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 4(-1)}{(-1+2)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 + 4 \cdot 1}{(1+2)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = -4$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2 + 4x)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2 + 4x)}{(x+2)^3} = \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 8 - \cancel{2x^2} - \cancel{8x}}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

Esta expresión de la segunda derivada nunca se anula, por lo que no existen puntos de inflexión.

b) **Asíntota vertical** $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x+2} = \frac{(-2)^2}{-2+2} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

La recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua de la función.

E4.- Calcular:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right)$. (1,25 puntos)

b) Calcular $\int \cos^3 x dx$. (1,25 puntos)

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right) &= \frac{0 - \ln(1+0)}{0 \cdot \ln(1+0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{1 \cdot \ln(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x} \right) = \frac{0}{(1+0)\ln(1+0) + 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + 1} \right) = \frac{1}{\ln(1+0) + (0+1) \cdot \frac{1}{0+1} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

b) Calculamos la integral.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sin x \rightarrow dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \\ &= \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} = \{t = \sin x\} = \boxed{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C} \end{aligned}$$