



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de una primera pregunta de carácter competencial y obligatoria. Además, hay 3 preguntas más con posibilidad de elección entre apartados.

Cada pregunta se puntúa con 2.5 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

- a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.
- b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A - \frac{1}{3} A^T \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A .

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$? Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b .

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z - 2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.

b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dada la recta r , $r \equiv x - 2 = y + 1 = -z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$.
- b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$ halla los valores de m para que sean:
- paralelos.
 - perpendiculares.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(\mu, \sigma)$.

a) Nos dicen que “solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha” $\rightarrow$

$P(X > 9000) = 0.02$. También sabemos que “en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha” $\rightarrow P(X < 8315) = 0.56$.

$$P(X > 9000) = 0.02 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{9000 - \mu}{\sigma}\right) = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{9000 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.02 = 0.98 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9000 - \mu}{\sigma} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055 \Rightarrow 9000 - \mu = 2.055\sigma \Rightarrow \boxed{9000 - 2.055\sigma = \mu}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

$$P(X < 8315) = 0.56 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{8315 - \mu}{\sigma}\right) = 0.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8315 - \mu}{\sigma} = 0.15 \Rightarrow \boxed{8315 - \mu = 0.15\sigma}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 9000 - 2.055\sigma = \mu \\ 8315 - \mu = 0.15\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 8315 - 9000 + 2.055\sigma = 0.15\sigma \Rightarrow -685 = -1.905\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{685}{1.905} \approx 359.58} \Rightarrow \boxed{\mu = 9000 - 2.055 \cdot \frac{685}{1.905} \approx 8261.06}$$

La media de producción tiene un valor aproximado de 8261 kg por hectárea y la desviación típica es de 359 kg/ha.

b) X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(8261, 359)$.

Nos piden calcular $P(X > 8500)$.

$$P(X > 8500) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{8500 - 8261}{359}\right) = P(Z > 0.666) =$$

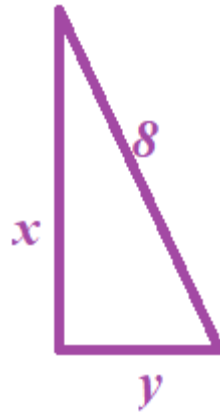
$$= 1 - P(Z \leq 0.666) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7454 = \boxed{0.2546}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2**

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

Como se habla de hipotenusa suponemos que el triángulo es rectángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 8^2 \rightarrow y^2 = 64 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$.
El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(x, y) = \frac{xy}{2}$$

Sustituimos en la expresión del área “y” por la expresión obtenida $y = \sqrt{64 - x^2}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{64 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2}$$

Derivamos la función área obtenida y averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos)

$$A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2} \Rightarrow A'(x) = \frac{\sqrt{64 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{64 - x^2}}}{2} = \frac{\sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}}}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}}}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{64 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} \Rightarrow \left(\sqrt{64 - x^2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow 64 - x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{32}}$$

Comprobamos si este punto crítico es máximo o mínimo estudiando el signo de la derivada antes y después $x = \sqrt{32}$.

- En el intervalo $(0, \sqrt{32})$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

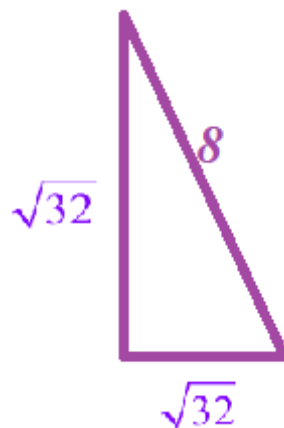
$$A'(1) = \frac{\sqrt{64-1^2} - \frac{1^2}{\sqrt{64-1^2}}}{2} = \frac{31\sqrt{7}}{21} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{32}).$$

- En el intervalo $(\sqrt{32}, 8)$ tomamos $x=7$ y la derivada vale

$$A'(7) = \frac{\sqrt{64-7^2} - \frac{7^2}{\sqrt{64-7^2}}}{2} = \frac{-17\sqrt{15}}{15} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{32}, 8).$$

Como la función crece antes y decrece después podemos afirmar que en $x = \sqrt{32}$ hay un máximo relativo. Para este valor tenemos $y = \sqrt{64-x^2} = \sqrt{64-(\sqrt{32})^2} = \sqrt{32}$

La superficie de la vela es máxima con $x = \sqrt{32}$ e $y = \sqrt{32}$.



2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

Si la función tiene un máximo relativo en $x = 1/2$ entonces la derivada se anula para este valor.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \alpha x + 11 \Rightarrow f'(x) = -2x + \alpha \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -2 \cdot \frac{1}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

El valor buscado es $\alpha = 1$. La función queda $f(x) = -x^2 + x + 11$.

Calculamos la derivada de la función $f'(x) = -2x + 1$.

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 11 \\ f'(x) &= -2x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + x + 11 = -2x + 1 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-10)}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = \boxed{5 = x} \\ \frac{3-7}{2} = \boxed{-2 = x} \end{cases}$$

El área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 f(x) - f'(x) dx &= \int_{-2}^5 -x^2 + x + 11 - (-2x + 1) dx = \int_{-2}^5 -x^2 + 3x + 10 dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 10x \right]_{-2}^5 = \left[\frac{-5^3}{3} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} + 10 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-(-2)^3}{3} + \frac{3(-2)^2}{2} + 10(-2) \right] = \\ &= -\frac{125}{3} + \frac{75}{2} + 50 - \frac{8}{3} - 6 + 20 = -\frac{133}{3} + \frac{75}{2} + 64 = \boxed{\frac{343}{6} \approx 57.16} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{343}{6} \approx 57.16$ unidades cuadradas.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2****3.1** Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A - \frac{1}{3} A^T \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A .

a) Al ser el sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coinciden, por lo que el sistema siempre es compatible. Este sistema tiene la solución trivial y solo hay dos opciones tiene solo esta solución o tiene infinitas soluciones (incluyendo la trivial).

Para que el sistema tenga solo la solución trivial el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, coincidiendo con el número de incógnitas, por lo que el determinante de esta matriz debe ser distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - m + 3 + 2 + 3 - 3m = -4m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4m + 2 = 0 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

La solución es la trivial para cualquier valor de m distinto de $\frac{1}{2}$.El sistema es compatible indeterminado para $m = \frac{1}{2}$. Lo resolvemos para este valor.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - \frac{1}{2}z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 6x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = z \\ 6x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y - 3x - y = 0 \\ x - y - 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow z = 3x - x = 2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

b) Obtenemos la expresión de la matriz $A - \frac{1}{3}A^T$.

$$A - \frac{1}{3}A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que debemos resolver es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El sistema queda $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - (3x - 1) - z = 0 \\ 3x + 2(3x - 1) + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3x + 1 - z = 0 \\ 3x + 6x - 2 + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x - z = 0 \\ 9x + 3z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ 3x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow 3(1 - z) + z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 3z + z = 3 \Rightarrow -2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow \boxed{x = 1 - 0 = 1} \Rightarrow \boxed{y = 3 \cdot 1 - 1 = 2}$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$?

Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b .

3.2 Obtenemos la expresión de $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 3 su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 1] = \\ &= (1-\lambda)[3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-1] = (1-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+2] \end{aligned}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda=1} \\ \lambda^2-4\lambda+2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{2} = \lambda} \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

Situación 1. $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es no nulo y el rango de $A - \lambda I$ es 3.

Situación 2. $\lambda = 1$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la primera fila y la segunda columna (nula) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Situación 3. $\lambda = 2 + \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - (2 + \sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de

orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna $\rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} \neq 0$. El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Situación 4. $\lambda = 2 - \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - (2 - \sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 + \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de

orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna $\rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} \neq 0$. El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$ el rango de $A - \lambda I$ es 3. Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 4 - 0 - 1 - 24 = \boxed{-18}$$

Como el determinante de A vale -18 distinto de cero esta matriz tiene inversa. La podemos utilizar para despejar X en la ecuación $AX = b$.

$$AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2****4.1** Responda a los dos subapartados siguientes.a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z - 2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-m}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, m) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = m + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3/2} = \frac{z-1}{1/2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{w}_s = 2\vec{v}_s = (4, 3, 1) \\ Q_s(1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales (distinta dirección).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{w}_s = (4, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Las dos rectas se cortan o cruzan. Para que las dos rectas se corten debe ser nulo el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 0, m) \\ Q_s(1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 1) - (0, 0, m) = (1, 0, 1 - m)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{w}_s = (4, 3, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 1 - m) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - m \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1 - m) + 1 + 0 - 3 - 4(1 - m) - 0 = 3 - 3m + 1 - 3 - 4 + 4m = m - 3$$

$$[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

Para $m = 3$ las rectas r y s se cortan.

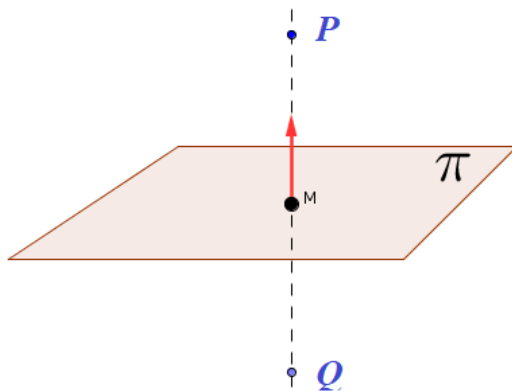
Para $m=3$ las rectas quedan $r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}.$

Hallamos su punto A de corte.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 4\beta \\ \alpha = 3\beta \\ 3 + \alpha = 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4\beta = 3\beta \\ 3 + 1 + 4\beta = 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 3\beta = -3 \rightarrow \boxed{\beta = -1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4(-1) = -3 \\ y = 3(-1) = -3 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3, -3, 0)} \end{aligned}$$

Las rectas r y s se cortan en $A(-3, -3, 0)$.

- b) Si los dos puntos P y Q son simétricos respecto del plano π el plano debe contener al punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Además, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector normal del plano.



$$\begin{aligned} P = (0, 2, -1) \\ Q = (2, -2, 1) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} M = \frac{(0, 2, -1) + (2, -2, 1)}{2} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) - (0, 2, -1) = (2, -4, 2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} M(1, 0, 0) \in \pi \\ \vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(2, -4, 2) = (1, -2, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M(1, 0, 0) \in \pi \\ \pi : x - 2y + z + D = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

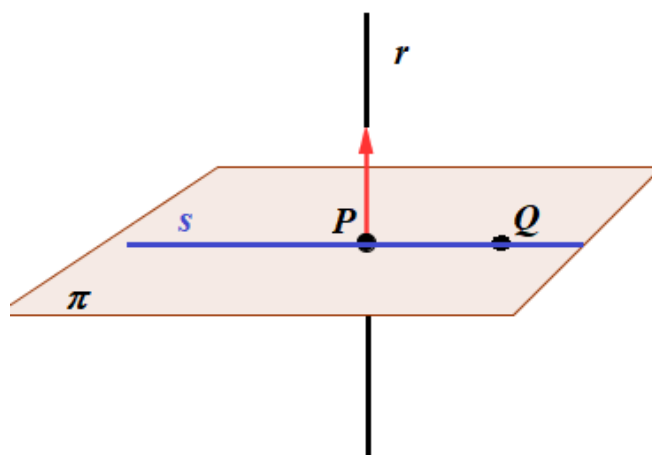
$$\Rightarrow 1 - 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + z - 1 = 0}$$

El plano $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ cumple que los puntos P y Q son simétricos respecto a él.

4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dada la recta $r \equiv x-2=y+1=-z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q=(2,-2,1)$.
- b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx+2y-3z-1=0$ y $2x-4y+6z+5=0$ halla los valores de m para que sean:
- paralelos.
 - perpendiculares.

- a) Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto Q . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (2, -2, 1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = (2, -2, 1) \in \pi \\ \pi : x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - z + 1 = 0 \\ r \equiv x - 2 = y + 1 = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = -z \rightarrow x = 2 - z \\ y + 1 = -z \rightarrow y = -1 - z \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - z - 1 - z - z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que buscamos es la que pasa por los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) \in s \\ Q(2, -2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = 3\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) \\ Q(2, -2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

La recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$ tiene ecuación

$$s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) Hallamos los vectores normales de cada plano.

$$\pi: mx + 2y - 3z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (m, 2, -3)$$

$$\pi': 2x - 4y + 6z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}' = (2, -4, 6)$$

b.i) Para que los planos sean paralelos sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (m, 2, -3) \\ \vec{n}' = (2, -4, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ los planos son paralelos o coincidentes. Los planos quedan $-x + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$. Multiplicamos la ecuación del primer plano por -2 y nos queda $2x - 4y + 6z + 2 = 0$, observamos que las ecuaciones de los dos planos no son las mismas y los planos no son coincidentes y por tanto, son paralelos.

b.ii) Para que los planos sean perpendiculares los vectores normales deben ser perpendiculares, esto implica que su producto escalar debe ser igual a cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (m, 2, -3) \\ \vec{n}' = (2, -4, 6) \\ \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (m, 2, -3)(2, -4, 6) = 0 \Rightarrow 2m - 8 - 18 = 0 \Rightarrow 2m - 26 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

Para $m = 13$ los planos son perpendiculares.