

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}.$$

- a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
- b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Pregunta 1.2. Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

- a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las matrices

diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

- b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D , distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.
- b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.
- c) (0.75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$.

Pregunta 2.2. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}.$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Bloque 3. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3. Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V_1 cuyos extremos son los puntos $A(1, 2, -3)$ y $B(1, 6, 1)$ y V_2 cuyos extremos son los puntos $C(-2, -8, 7)$ y $D(10, -4, 7)$.

- a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V_1 y V_2 . Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V_1 y con V_2 .
- b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V_1 como a V_2 . Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En una empresa tecnológica internacional el 70 % de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de *software*, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de *software* en la empresa.
- b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan *software* para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Pregunta 4.2. Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$.

- a) (0.5 puntos) Razone si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos sucesos independientes.
- b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.
- c) (1 punto) Calcule $P(\bar{A} | B)$.