

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO. La variable $X =$ “peso de un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024” sigue una distribución normal $N(3372; 405)$. Representamos por Z una variable que sigue una distribución normal tipificada.

(a) La probabilidad de que el peso de un recién nacido haya sido superior a 3kg es

$$\begin{aligned}
 P(X > 3000) &= P\left(Z > \frac{3000 - 3372}{405}\right) \\
 &= P(Z > -0,92) = P(Z < 0,92) = 0,8212.
 \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que el peso de un recién nacido esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg es

$$\begin{aligned}
 P(3000 < X < 3500) &= P\left(\frac{3000 - 3372}{405} < Z < \frac{3500 - 3372}{405}\right) \\
 &= P(-0,92 < Z < 0,32) = P(Z < 0,32) - P(Z < -0,92) \\
 &= 0,6255 - (1 - 0,8212) = 0,4467.
 \end{aligned}$$

El número probable de recién nacidos cuyo peso está en dicho rango es el total de niños nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 multiplicado por la probabilidad obtenida, $9476 \times 0,4467 \sim 4233$.

(c) La probabilidad de un subconjunto no puede ser mayor que la del conjunto en el que está incluido. Se ha obtenido que $P(3000 < X < 3500) = 0,4467$, y $(3100, 3300)$ es un subconjunto de $(3000, 3500)$. Por tanto, $P(3100 < X < 3300) < 0,4467$ y el número de recién nacidos con un peso entre 3,1kg y 3,3kg no debería ser mayor que 4233.

SEGUNDO EJERCICIO

(2A) La matriz de coeficientes del sistema dado es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) El determinante de esa matriz es $|A| = -3(\alpha - 1)^2$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema tiene una única solución.

(b) Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también, por tanto, no hay ningún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución.

- (c) El sistema tiene más de una solución cuando $\alpha = 1$ y, en ese caso, las soluciones cumplen $y = z$ y $x = 1 + 2y - z$. Dando valores a y (o a z), se obtienen las diferentes soluciones. Por ejemplo, tomando $y = 0$, se tiene la solución $x = 1, y = 0, z = 0$; y tomando $y = 1$ se obtiene $x = 2, y = 1, z = 1$. Claramente, con otras elecciones de y o z se obtendrán otras soluciones.

(2B) El determinante de la matriz dada es $|A| = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$, por lo tanto, la matriz tiene inversa si $a \neq b$.

Si $a = 1$ y $b = 2$, la matriz A tiene inversa y se puede resolver la ecuación matricial planteada, que se reescribe como

$$AX = A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}A^3 + A^{-1}I_2 = A^2 + A^{-1}.$$

La matriz A , su cuadrado y su inversa son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$X = A^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

TERCER EJERCICIO

(3A) El punto de corte del plano de ecuación $x - 3y - 2z + 7 = 0$ con la recta r_2 es $P(0, 1, 2)$, y P no está en la recta r_1 . Por otro lado, tomando dos puntos distintos Q y R de la recta r_1 , por ejemplo, $Q = (1/5, -1/5, 0)$ y $R = (2/5, 0, 1/5)$, el plano que se pide es el que contiene a P, Q y R . Su ecuación es $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

Otra manera de resolver el problema es la siguiente: el haz de planos que contiene a la recta r_1 es $x + y - 2z + t(2x - 3y + z - 1) = 0$. Entonces, sustituimos el punto $P(0, 1, 2)$ en la ecuación del haz de planos y obtenemos $t = -3/2$; por tanto, la ecuación del plano pedido es $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

(3B)

- (a) Los vectores directores de las rectas r y s son $\vec{v}_r = (5, -4, -2)$ y $\vec{v}_s = (4, -4, 0)$, respectivamente. Como no existe ninguna constante k tal que $\vec{v}_s = k\vec{v}_r$, las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Para ver si las rectas r y s se cortan o se cruzan, tomamos un punto de cada una de las rectas, por ejemplo los puntos A y C y calculamos el vector $\vec{AC} = (2, 3, -2)$. El producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}] \neq 0$, por lo tanto, las rectas se cruzan.

Otra posibilidad es escribir las ecuaciones paramétricas de las rectas y comprobar que no hay ningún punto de corte.

$$r \equiv \{x = -4 + 5\lambda, y = 4 - 4\lambda, z = 1 - 2\lambda\},$$

$$s \equiv \{x = -2 + 4\mu, y = 7 - 4\mu, z = -1\}.$$

Para que haya punto de corte, deben existir λ y μ tales que

$$-4 + 5\lambda = -2 + 4\mu, \quad 4 - 4\lambda = 7 - 4\mu, \quad 1 - 2\lambda = -1.$$

De la última ecuación se sigue que $\lambda = 1$ y al sustituir en las otras dos ecuaciones se ve que no se pueden satisfacer las dos a la vez.

(b) La distancia entre r y s es

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} u = \frac{8}{3} u.$$

CUARTO EJERCICIO

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) Para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales, la derivada de la función en esos puntos debe ser nula.

Como $f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B$,

$$\begin{cases} f'(0) = B = 0 \\ f'(1) = 4 + 3A + 2 + B = 0 \end{cases} \implies A = -2, B = 0.$$

(b) Con los valores de A y B obtenidos en el apartado anterior, la función f y su derivada son

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

f' es positiva si $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$ y negativa si $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$. Por tanto, f es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$; y f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1/2, 1)$.

(4B) Se denota por x la longitud de los lados horizontales de los marcos y por y la longitud de los lados verticales.

- (a) El coste de un marco viene dado por la función $g(x, y) = 12 \times 2x + 10 \times 2y = 24x + 20y$. La superficie de cada cuadro es $xy = 0,3\text{m}^2$, por tanto $y = 0,3/x$. Sustituyendo esta condición en la función g obtenemos la función de una variable que se quiere optimizar,

$$f(x) = 24x + 20 \frac{0,3}{x} = 24x + \frac{6}{x}.$$

Buscamos los puntos donde se anula la derivada:

$$f'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \implies x = \pm \frac{1}{2}.$$

Las medidas deben ser positivas, por tanto, el único punto a considerar es $x_0 = 1/2$. Para comprobar si la función tiene un mínimo en x_0 calculamos la segunda derivada de f en ese punto, que debe ser positiva:

$$f''(x) = \frac{12}{x^3} \implies f''(x_0) > 0.$$

Como f es continua en $(0, \infty)$ y no tiene más puntos críticos en ese intervalo, el mínimo absoluto de f se alcanza en $x_0 = 1/2$ y las dimensiones de los cuadros deben ser $x = 0,5\text{m}$ la longitud de sus lados horizontales e $y = 0,3/0,5 = 0,6\text{m}$ la longitud de sus lados verticales.

- (b) El precio de cada cuadro es $g(x, y) = g(1/2, 3/5) = 24\text{€}$ y el precio de los 274 cuadros se obtiene multiplicando el precio unitario por la cantidad de cuadros, luego la factura ascenderá a 6.576€ .

QUINTO EJERCICIO

(5A)

- (a) La primera integral se resuelve por partes, tomando

$$\begin{aligned}
 u &= 2x, & dv &= \cos(2x + 5)dx, \\
 du &= 2dx, & v &= \frac{\sin(2x + 5)}{2}.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int 2x \cos(2x + 5) dx &= 2x \frac{\sin(2x + 5)}{2} - \int 2 \frac{\sin(2x + 5)}{2} dx \\
 &= x \sin(2x + 5) - \int \sin(2x + 5) dx = x \sin(2x + 5) + \frac{\cos(2x + 5)}{2} + k.
 \end{aligned}$$

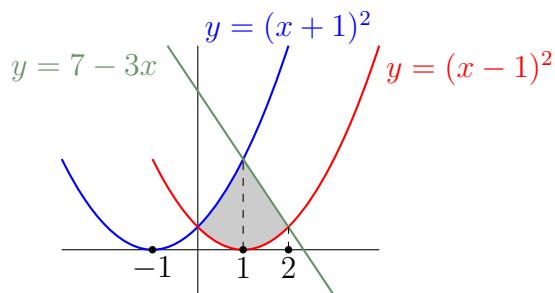
(b) Como $2025 = 45^2$, el integrando se descompone como suma de dos fracciones simples

$$\frac{x + 495}{x^2 - 2025} = \frac{6}{x - 45} - \frac{5}{x + 45}$$

y, por tanto,

$$\int \frac{x + 495}{x^2 - 2025} dx = 6 \ln |x - 45| - 5 \ln |x + 45| + k.$$

(5B) Las parábolas de ecuaciones $y = (x - 1)^2$ e $y = (x + 1)^2$ se cortan cuando $x = 0$. La parábola de ecuación $y = (x - 1)^2$ y la recta se cortan cuando $x = 2$ y cuando $x = -3$. Por último, la parábola de ecuación $y = (x + 1)^2$ y la recta se cortan cuando $x = -6$ y $x = 1$. El recinto limitado por las tres curvas es



El área de ese recinto es

$$A = \int_0^1 ((x+1)^2 - (x-1)^2) dx + \int_1^2 (7-3x - (x-1)^2) dx = \frac{25}{6} u^2.$$