



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA  
DE ADMISIÓN**  
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS  
CURSO 2024-2025

**MATEMÁTICAS  
APLICADAS A LAS  
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
  - b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
  - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
  - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
  - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

**BLOQUE A**

**EJERCICIO 1**

a) **(1.75 puntos)** Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. Exprese el problema en forma matricial y discuta, a partir de la matriz del sistema, si se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica. En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

b) **(0.75 puntos)** Resuelva la ecuación matricial  $2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

**EJERCICIO 2**

**(2.5 puntos)** Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?

**BLOQUE B**

**EJERCICIO 3**

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5000 € en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren  $t$  años viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 5000 \cdot (1 + 0.05t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 5000 \cdot 1.05^t & t > 1 \end{cases}$$

- a) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5931.10 €?
- b) **(0.5 puntos)** Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año  $t_1$  y el año  $t_2$  vienen dados por  $I = f(t_2) - f(t_1)$ .

- c) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función  $f$ .  
d) **(0.5 puntos)** Estudie la monotonía de la función  $f$  y esboce su gráfica.

### **BLOQUE C**

#### **EJERCICIO 4**

En un determinado centro educativo, el 50% del alumnado aprueba Historia, el 70% aprueba Matemáticas y el 30% aprueba ambas asignaturas. Si se elige un alumno al azar:

- a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe solo una de las dos asignaturas.  
b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que no apruebe más de una asignatura.  
c) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe Historia si ha suspendido Matemáticas.  
d) **(0.5 puntos)** Determine si los sucesos "Aprobar Matemáticas" y "Aprobar Historia" son independientes. ¿Son incompatibles?

#### **EJERCICIO 5**

Los alumnos de un colegio de una localidad andaluza van a realizar una excursión a la estación de esquí de Sierra Nevada desplazándose en tres autobuses A, B y C. En el autobús A se desplazan cuatro novenos de los alumnos de la excursión, en el B se desplaza la tercera parte y el resto van en el autobús C. Se sabe que el 65% de los alumnos que viajan en el autobús A y el 40% de los del autobús B no sabe esquiar y todos los del autobús C sí que saben esquiar. Se escoge al azar a uno de los alumnos de la excursión. Calcule la probabilidad de que:

- a) (1 punto) Sepa esquiar.  
b) (0.75 puntos) Viaje en el autobús C, si sabe esquiar.  
c) (0.75 puntos) Sepa esquiar y no viaje en el autobús B.

### **BLOQUE D**

#### **EJERCICIO 6**

A partir de un estudio muestral se sabe que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción de estudiantes de una universidad que tienen carnet de conducir pertenece al intervalo (0.5616, 0.7184)

- a) **(0.5 puntos)** Calcule la proporción muestral de estudiantes que tienen carnet de conducir.  
b) **(0.5 puntos)** Calcule el error máximo cometido en la estimación de la proporción poblacional.  
c) **(1 punto)** Calcule el tamaño de la muestra seleccionada.  
d) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo un aumento del tamaño muestral

#### **EJERCICIO 7**

El tiempo de adaptación a la guardería, en días, de los menores de dos años andaluces, sigue una distribución Normal de media 10.5 días y desviación típica 1.5 días.

- a) **(1.25 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 25 menores de estas características. ¿Qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación de esta muestra supere los 10 días?  
b) **(1.25 puntos)** ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 nos proporcionará un tiempo medio de adaptación entre 8 y 11 días?

**SOLUCIONES****EJERCICIO 1**

a) **(1.75 puntos)** Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. Expresa el problema en forma matricial y discute, a partir de la matriz del sistema, si se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica. En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

b) **(0.75 puntos)** Resuelva la ecuación matricial  $2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Colocamos toda la información del problema en una matriz.

$$\begin{array}{c} \text{placas A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Prueba 1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{Prueba 2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{Prueba 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Expresamos la producción de W de cada prueba en forma matricial.

$$\begin{array}{l} \text{Prueba 1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2960 \end{pmatrix} \\ \text{Prueba 2} \rightarrow \begin{pmatrix} 2990 \end{pmatrix} \\ \text{Prueba 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 2870 \end{pmatrix} \end{array}$$

Llamamos x, y, z a la producción de cada placa del modelo A, B y C respectivamente.

$$\begin{array}{c} \text{placas A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{l} \text{Prueba 1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2960 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Prueba 1} \\ \text{Prueba 2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2990 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Prueba 2} \\ \text{Prueba 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2870 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Prueba 3} \end{array} \end{array}$$

La matriz de coeficientes del sistema es  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 27 - 1 - 8 = -18 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero la matriz tiene rango 3, por lo que la matriz ampliada también tiene rango 3 que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Hallamos su solución usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2960 & 1 & 3 \\ 2990 & 3 & 2 \\ 2870 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{Bmatrix} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 3^a \end{Bmatrix}}{-18} = \frac{\begin{vmatrix} 90 & -1 & 2 \\ 30 & 2 & -1 \\ 2870 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-18} =$$

$$= \frac{180 + 2870 + 120 - 11480 + 30 + 180}{-18} = 450$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2960 & 3 \\ 1 & 2990 & 2 \\ 3 & 2870 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{Bmatrix} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 3^a \end{Bmatrix}}{-18} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 90 & 2 \\ -1 & 30 & -1 \\ 3 & 2870 & 1 \end{vmatrix}}{-18} =$$

$$= \frac{-30 - 270 - 5740 - 180 + 90 - 2870}{-18} = 500$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2960 \\ 1 & 3 & 2990 \\ 3 & 2 & 2870 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{Bmatrix} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 3^a \end{Bmatrix}}{-18} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 90 \\ -1 & 2 & 30 \\ 3 & 2 & 2870 \end{vmatrix}}{-18} =$$

$$= \frac{-5740 - 90 - 180 - 540 - 2870 + 60}{-18} = 520$$

Cada placa del modelo A generó 450 W, cada placa del modelo B generó 500 W y cada placa del modelo C generó 520 W.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1-1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es  $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ .

**EJERCICIO 2**

**(2.5 puntos)** Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?

Llamemos  $x$  = “número de lechugas iceberg”,  $y$  = “número de lechugas romana”.

Deseamos minimizar el consumo de agua que viene expresado como  $C(x, y) = 15x + 18y$ .

Las restricciones del problema son:

“La cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades”  $\rightarrow x \geq \frac{y}{2}; x \leq 1500$

“Deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas”  $\rightarrow 900 \leq x + y \leq 2400$

“Las cantidades deben ser positivas”  $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

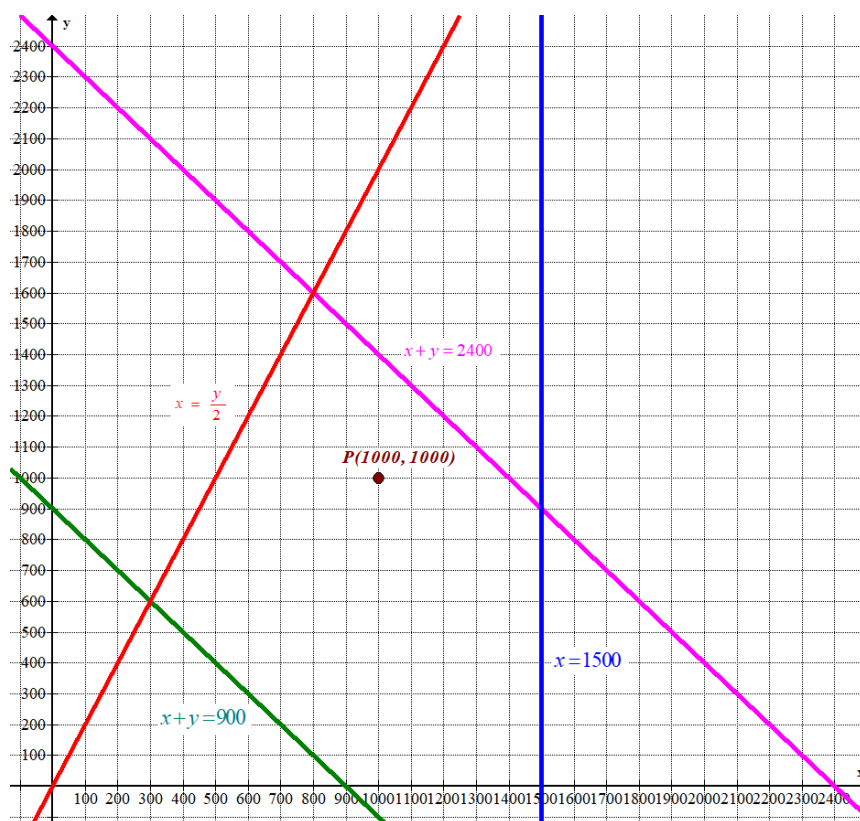
$$\left. \begin{array}{l} x \geq \frac{y}{2} \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x + y \leq 2400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x \geq y \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x + y \leq 2400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

|          |          |            |      |               |               |
|----------|----------|------------|------|---------------|---------------|
| $y = 2x$ |          | $x = 1500$ |      | $x + y = 900$ |               |
| $x$      | $y = 2x$ | $x = 1500$ | $y$  | $x$           | $y = 900 - x$ |
| 0        | 0        | 1500       | 0    | 0             | 900           |
| 300      | 600      | 1500       | 900  | 300           | 600           |
| 800      | 1600     | 1500       | 1000 | 900           | 0             |

|                |                |                      |  |
|----------------|----------------|----------------------|--|
| $x + y = 2400$ |                | $x \geq 0; y \geq 0$ |  |
| $x$            | $y = 2400 - x$ | Primer cuadrante     |  |
| 0              | 2400           |                      |  |
| 800            | 1600           |                      |  |
| 1500           | 900            |                      |  |



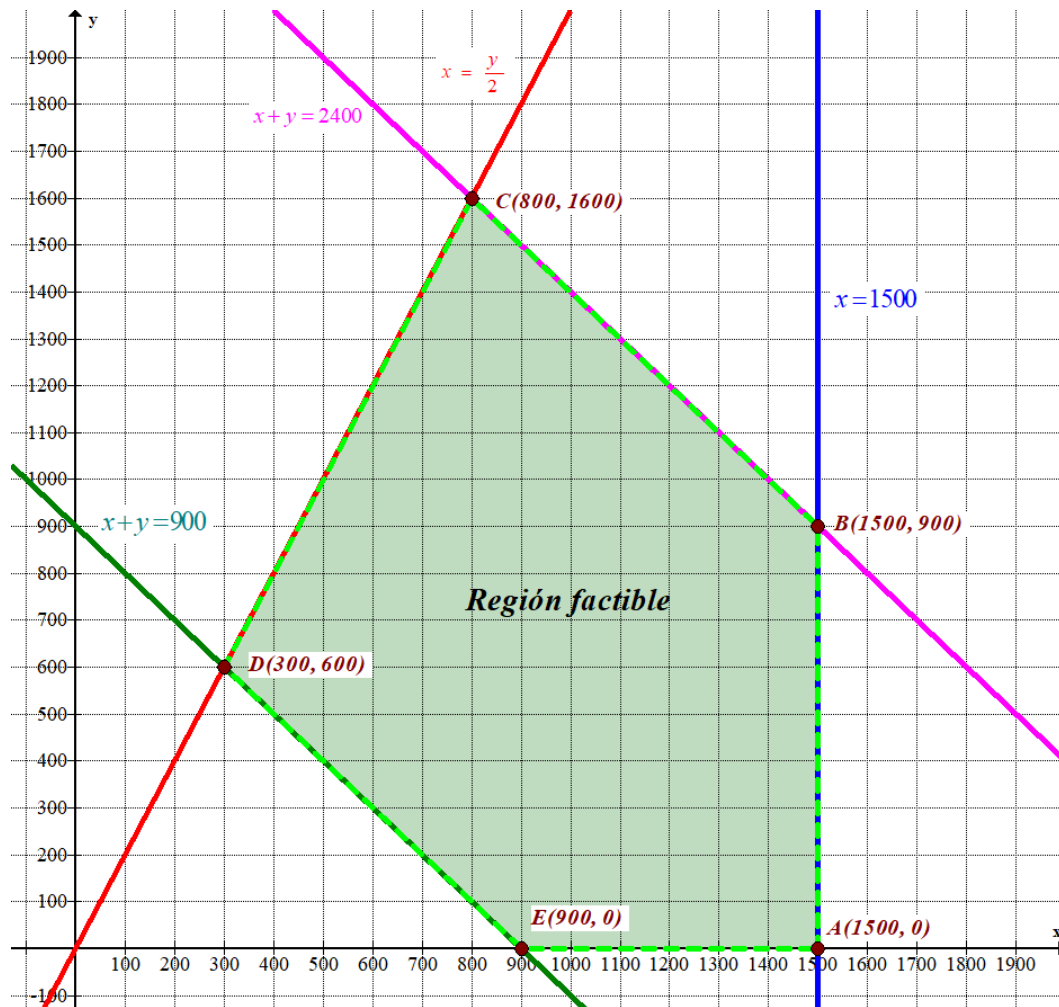
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 2x \geq y \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x + y \leq 2400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer}$$

cuadrante situada por debajo de las rectas roja y rosa, por encima de la recta verde y a la izquierda de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto  $P(1000, 1000)$  perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3000 \geq 1000 \\ 1000 \leq 1500 \\ 900 \leq 1000 + 1000 \leq 2400 \\ 1000 \geq 0; 1000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los ingresos  $C(x, y) = 15x + 18y$  en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A(1500, 0) \rightarrow C(1500, 0) = 15 \cdot 1500 + 18 \cdot 0 = 22500$$

$$B(1500, 900) \rightarrow C(1500, 900) = 15 \cdot 1500 + 18 \cdot 900 = 38700$$

$$C(800, 1600) \rightarrow C(800, 1600) = 15 \cdot 800 + 18 \cdot 1600 = 40800$$

$$D(300, 600) \rightarrow C(300, 600) = 15 \cdot 300 + 18 \cdot 600 = 15300$$

$$E(900, 0) \rightarrow C(900, 0) = 15 \cdot 900 + 18 \cdot 0 = 13500 \text{ Mínimo}$$

El mínimo es 13500 y se alcanza en el vértice E(900, 0). El gasto mínimo de agua cumpliendo con las restricciones es de 13500 litros y se consigue cultivando 900 lechugas iceberg y 0 lechugas romana

**EJERCICIO 3**

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5000 € en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren  $t$  años viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 5000 \cdot (1 + 0.05t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 5000 \cdot 1.05^t & t > 1 \end{cases}$$

- a) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5931.10 €?
- b) **(0.5 puntos)** Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año  $t_1$  y el año  $t_2$  vienen dados por  $I = f(t_2) - f(t_1)$ .
- c) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función  $f$ .
- d) **(0.5 puntos)** Estudie la monotonía de la función  $f$  y esboce su gráfica.

a) Buscamos el valor de  $t$  para que  $f(t) = 5931.1$ .

$$f(t) = 5931.1 \Rightarrow \begin{cases} 5000 \cdot (1 + 0.05t) = 5931.1 \rightarrow 1 + 0.05t = \frac{5931.1}{5000} = 1.18622 \rightarrow \\ \rightarrow 0.05t = 0.18622 \rightarrow t = \frac{0.18622}{0.05} = 3.7244 \notin [0, 1] \\ 5000 \cdot 1.05^t = 5931.1 \rightarrow 1.05^t = \frac{5931.1}{5000} = 1.18622 \rightarrow \\ \rightarrow \ln 1.05^t = \ln 1.18622 \rightarrow t \cdot \ln 1.05 = \ln 1.18622 \rightarrow t = \frac{\ln 1.18622}{\ln 1.05} = 3.5 \end{cases}$$

Debe mantener invertido el dinero 3 años y medio.

b) Entre el año 2 y el año 4 la función tiene la expresión  $f(t) = 5000 \cdot 1.05^t$ .

$$I = f(4) - f(2) = 5000 \cdot 1.05^4 - 5000 \cdot 1.05^2 = 565.03125$$

Los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4 son de un importe de 565.03125 €.

c) La función es continua y derivable en  $[0, 1) \cup (1, +\infty)$  pues tiene una expresión polinómica y exponencial.

Estudiamos la continuidad en  $t = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 5000 \cdot (1 + 0.05) = 5250 \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} 5000 \cdot (1 + 0.05t) = 5250 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} 5000 \cdot 1.05^t = 5000 \cdot 1.05 = 5250 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 5250$$

La función es continua en  $t = 1$ .

Estudiamos la derivabilidad en  $t = 1$ .

La derivada de la función en  $[0,1) \cup (1,+\infty)$  es  $f'(t) = \begin{cases} 5000 \cdot 0.05 = 250 & 0 \leq t < 1 \\ 5000 \cdot 1.05^t \cdot \ln 1.05 & t > 1 \end{cases}$ .

Comprobamos si coinciden las derivadas laterales en  $t=1$ .

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 250 = 250 \\ f'(1^+) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 5000 \cdot 1.05^t \cdot \ln 1.05 = 5000 \cdot 1.05 \cdot \ln 1.05 = 256.15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-) = 250 \neq 256.15 = f'(1^+)$$

La función no es derivable en  $t=1$ .

La función es continua en  $[0,+\infty)$  y derivable en  $[0,1) \cup (1,+\infty)$ .

d) En el intervalo  $[0,1)$  la derivada de la función es  $f'(t) = 250 > 0$  que es constante y positiva. La función crece en el intervalo  $[0,1)$ .

En el intervalo  $(1,+\infty)$  la derivada de la función es  $f'(t) = (5000 \cdot \ln 1.05) \cdot 1.05^t$  que es positiva, pues  $5000 \cdot \ln 1.05 = 243.95 > 0$  y la función exponencial siempre es positiva. La función crece en el intervalo  $(1,+\infty)$ .

La función crece en todo su dominio.

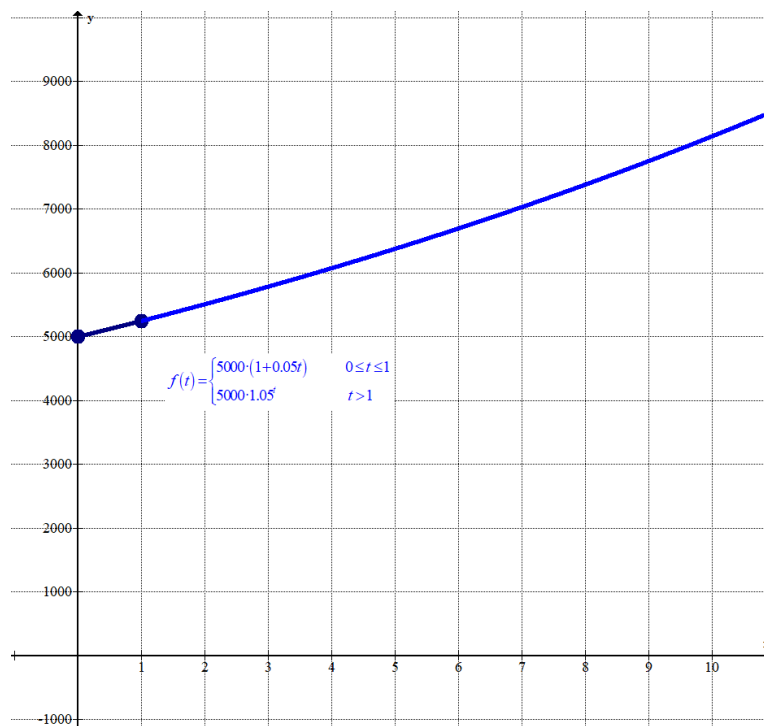
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

$0 \leq t \leq 1$

| $t$ | $f(t) = 5000 \cdot (1 + 0.05t)$ |
|-----|---------------------------------|
| 0   | 5000                            |
| 0.5 | 5125                            |
| 1   | 5250                            |

$t > 1$

| $t$ | $f(t) = 5000 \cdot 1.05^t$ |
|-----|----------------------------|
| 1.5 | 5379.6                     |
| 2   | 5512.5                     |
| 5   | 6381.4                     |
| 10  | 8144.4                     |



**EJERCICIO 4**

En un determinado centro educativo, el 50% del alumnado aprueba Historia, el 70% aprueba Matemáticas y el 30% aprueba ambas asignaturas. Si se elige un alumno al azar:

- (0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe solo una de las dos asignaturas.
- (0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que no apruebe más de una asignatura.
- (0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe Historia si ha suspendido Matemáticas.
- (0.5 puntos)** Determine si los sucesos "Aprobar Matemáticas" y "Aprobar Historia" son independientes. ¿Son incompatibles?

Realizamos una tabla de contingencia.

|                     | Aprueba Matemáticas | No aprueba Matemáticas |     |
|---------------------|---------------------|------------------------|-----|
| Aprueba Historia    | 30                  |                        | 50  |
| No aprueba Historia |                     |                        |     |
|                     | 70                  |                        | 100 |

Completamos la tabla.

|                     | Aprueba Matemáticas | No aprueba Matemáticas |     |
|---------------------|---------------------|------------------------|-----|
| Aprueba Historia    | 30                  | 20                     | 50  |
| No aprueba Historia | 40                  | 10                     | 50  |
|                     | 70                  | 30                     | 100 |

- Hay un 40% del alumnado que aprueban Matemáticas y no aprueba Historia y un 20% que aprueba Historia y no aprueba Matemáticas. Hay un  $40 + 20 = 60\%$  del alumnado que aprueba solo una de las dos asignaturas. La probabilidad de que el alumno elegido al azar apruebe solo una de las dos asignaturas vale 0.6.
- Hay un 30% del alumnado que aprueba las dos asignaturas. El restante  $100 - 30 = 70\%$  no aprueba más de una asignatura. La probabilidad de que el alumno elegido al azar no apruebe más de una asignatura vale 0.7.
- Hay un 30% del alumnado que ha suspendido Matemáticas y de estos un 20% ha aprobado Historia. La probabilidad de que el alumno elegido al azar apruebe Historia si ha suspendido Matemáticas vale  $\frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$ .
- Llamamos M al suceso "aprobar Matemáticas" y H a "aprobar Historia". Para que sean independientes los sucesos M y H debe cumplirse  $P(M \cap H) = P(M)P(H)$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(M \cap H) = 0.3 \\ P(M)P(H) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35 \end{array} \right\} \Rightarrow P(M \cap H) = 0.3 \neq 0.35 = P(M)P(H)$$

Los sucesos no son independientes.

Para que los sucesos sean incompatibles debe cumplirse que  $M \cap H = \emptyset \rightarrow$

$$P(M \cap H) = 0.$$

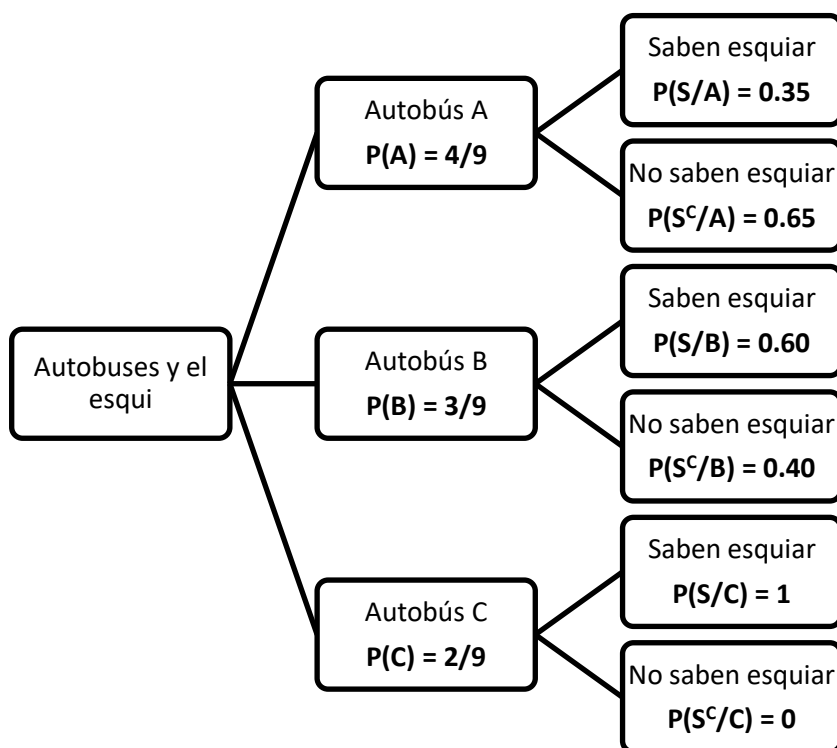
Como  $P(M \cap H) = 0.3 \neq 0$  los sucesos no son incompatibles.

**EJERCICIO 5**

Los alumnos de un colegio de una localidad andaluza van a realizar una excursión a la estación de esquí de Sierra Nevada desplazándose en tres autobuses A, B y C. En el autobús A se desplazan cuatro novenos de los alumnos de la excursión, en el B se desplaza la tercera parte y el resto van en el autobús C. Se sabe que el 65% de los alumnos que viajan en el autobús A y el 40% de los del autobús B no sabe esquiar y todos los del autobús C sí que saben esquiar. Se escoge al azar a uno de los alumnos de la excursión. Calcule la probabilidad de que:

- (1 punto) Sepa esquiar.
- (0.75 puntos) Viaje en el autobús C, si sabe esquiar.
- (0.75 puntos) Sepa esquiar y no viaje en el autobús B.

En el autobús A van  $\frac{4}{9}$  de los alumnos, en el B van  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$  de los alumnos y en el C van el restante  $1 - \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$  del alumnado.



- a) Nos piden calcular  $P(S)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(A)P(S/A) + P(B)P(S/B) + P(C)P(S/C) = \frac{4}{9} \cdot 0.35 + \frac{3}{9} \cdot 0.6 + \frac{2}{9} \cdot 1 = \frac{26}{45} \approx 0.5778$$

- b) Nos piden calcular  $P(C/S)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C)P(S/C)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{9} \cdot 1}{\frac{26}{45}} = \frac{5}{13} \approx 0.3846$$

- c) Nos piden calcular  $P(S \cap B^c)$ .

$$P(S \cap B^c) = P(S) - P(S \cap B) = P(S) - P(B)P(S/B) = \frac{26}{45} - \frac{1}{3} \cdot 0.6 = \frac{17}{45} \approx 0.3778$$

**EJERCICIO 6**

A partir de un estudio muestral se sabe que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción de estudiantes de una universidad que tienen carnet de conducir pertenece al intervalo (0.5616, 0.7184)

- a) **(0.5 puntos)** Calcule la proporción muestral de estudiantes que tienen carnet de conducir.  
 b) **(0.5 puntos)** Calcule el error máximo cometido en la estimación de la proporción poblacional.  
 c) **(1 punto)** Calcule el tamaño de la muestra seleccionada.  
 d) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo un aumento del tamaño muestral.

- a) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.5616 + 0.7184}{2} = 0.64$$

La proporción muestral de estudiantes que tienen carnet de conducir es de 0.64.

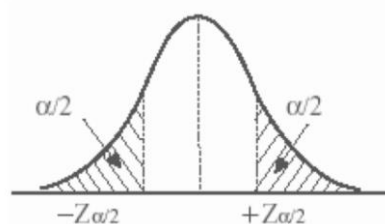
- b) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{0.7184 - 0.5616}{2} = 0.0784$$

- c) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 |



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.0784 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.64(1-0.64)}{n}} \Rightarrow \frac{0.0784}{1.96} = \sqrt{\frac{0.2304}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{0.0784}{1.96} \right)^2 = \frac{0.2304}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2304}{\left( \frac{0.0784}{1.96} \right)^2} = 144$$

El tamaño de la muestra seleccionada es de 144 estudiantes.

- d) La amplitud del intervalo de confianza depende del error y el error lo obtenemos con la fórmula  $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ . Si aumentamos el valor del tamaño muestral = n entonces disminuye el error y por tanto disminuye la amplitud del intervalo de confianza.

**EJERCICIO 7**

El tiempo de adaptación a la guardería, en días, de los menores de dos años andaluces, sigue una distribución Normal de media 10.5 días y desviación típica 1.5 días.

a) **(1.25 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 25 menores de estas características. ¿Qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación de esta muestra supere los 10 días?

b) **(1.25 puntos)** ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 nos proporcionará un tiempo medio de adaptación entre 8 y 11 días?

Sea  $X$  = El tiempo de adaptación a la guardería, en días, de los menores de dos años andaluces.  $X \sim N(10.5, 1.5)$

a) Tamaño muestral  $n = 25$ . La media muestral del tiempo de adaptación sigue una ley Normal con la misma media y con desviación típica  $\frac{1.5}{\sqrt{25}} = 0.3$ .  $\bar{X}_{25} \sim N(10.5, 0.3)$ .

Nos piden calcular  $P(\bar{X}_{25} > 10)$ .

$$P(\bar{X}_{25} > 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{10 - 10.5}{0.3}\right) = P(Z > -1.67) =$$

$$= P(Z \leq 1.67) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9525}$$

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 |
| 1.6 | 0.9432 | 0.9445 | 0.9457 | 0.9469 | 0.9480 | 0.9491 | 0.9505 | 0.9515 |
| 1.7 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 | 0.9554 | 0.9563 | 0.9572 | 0.9581 | 0.9590 |

b) Calculamos  $P(8 \leq \bar{X}_{25} \leq 11)$ .

$$P(8 \leq \bar{X}_{25} \leq 11) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{8 - 10.5}{0.3} \leq Z \leq \frac{11 - 10.5}{0.3}\right) =$$

$$= P(-8.33 \leq Z \leq 1.67) = P(Z \leq 1.67) - P(Z \leq -8.33) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9525 - 0 = \boxed{0.9525}$$

El porcentaje de muestras de tamaño 25 que nos proporcionará un tiempo medio de adaptación entre 8 y 11 días es del 95.25%.