



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA
DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** En un festival gastronómico gaditano se han vendido entradas para tres eventos culinarios. Concretamente, 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6460 €. Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet. Además, el coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 € al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada evento?

b) **(0.75 puntos)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el rango de A y A^2 .

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un servicio técnico recibe un encargo para revisar lavadoras y frigoríficos de una empresa de apartahoteles. La revisión de cada lavadora requiere 100 minutos de trabajo, mientras que cada frigorífico requiere 50 minutos. El servicio técnico dispone de 26 horas y 40 minutos para hacer las revisiones. Por política de empresa, no se aceptan encargos de más de 12 lavadoras ni de más de 16 frigoríficos. Sabiendo que las revisiones se pagan a 50 € la hora, en ambos tipos de electrodomésticos, ¿cuántos electrodomésticos de cada clase debe revisar el servicio técnico para maximizar el ingreso con el encargo? ¿A cuánto asciende este ingreso máximo?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$f(t) = at^2 + bt + c, \quad t \in [0, 60]$$

donde t es el tiempo medido en minutos y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine a , b y c y represente gráficamente la función obtenida.

b) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

$$h(x) = (2x - 1)e^{x^2 - x}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{5x}{2} & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & -2 < x \leq 2 \\ 10 - \frac{5x}{2} & x \geq 2 \end{cases}$

- (0.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f en el punto de abscisa $x = -2$.
- (0.75 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f con pendiente -1 .
- (1.25 puntos)** Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

BLOQUE C**EJERCICIO 5**

Una encuesta realizada a personas que utilizan productos de cosmética arroja los siguientes datos: el 66% de las personas encuestadas son mujeres y, de estas, el 71% utilizan cosmética natural. Además, se sabe que el 17.86% son hombres que no utilizan cosmética natural. Se selecciona una de estas personas al azar.

- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea mujer o use cosmética natural.
- (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea hombre y utilice cosmética natural.
- (0.75 puntos)** Sabiendo que no usa cosmética natural, calcule la probabilidad de que sea hombre.
- (0.5 puntos)** ¿Son sucesos incompatibles "utilizar cosmética natural" y "ser mujer"? ¿Son independientes?

BLOQUE D**EJERCICIO 6**

Un tratamiento experimental para tratar una determinada intolerancia alimentaria mejora al 60% de los pacientes a los que se les suministra. Cinco pacientes deciden someterse a dicho tratamiento.

- (0.75 puntos)** Indique la distribución que sigue la variable "número de pacientes de entre los 5 que mejoran con este tratamiento". ¿Cuál es la probabilidad de que mejoren cuatro pacientes gracias al tratamiento?
- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos dos pacientes experimenten mejoría tras someterse al tratamiento.
- (0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren al someterse a ese tratamiento?
- (0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes deberían someterse al tratamiento para que el número esperado de pacientes que mejoren sea mayor o igual a 12?

EJERCICIO 7

En un invernadero de Palos de la Frontera (Huelva), se cultivan fresas y frambuesas. Se desea estimar la proporción de fresas y frambuesas que se recolectan. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 300 kg, obteniéndose que 180 kg de ellos son fresas y el resto frambuesas.

- (1.5 puntos)** Obtenga, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para estimar la proporción de fresas recolectadas en el invernadero y otro intervalo para estimar la proporción de frambuesas recolectadas.
- (1 punto)** Con las proporciones muestrales iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántos kilogramos de frutos deberían seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que las proporciones muestrales difieran de las proporciones poblacionales a lo sumo en un 2%?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

a) **(1.75 puntos)** En un festival gastronómico gaditano se han vendido entradas para tres eventos culinarios. Concretamente, 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6460 €. Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet. Además, el coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 € al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada evento?

b) **(0.75 puntos)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el rango de A y A^2 .

a) Llamamos “x” al precio de la entrada al taller de repostería, “y” al precio de la entrada a la demostración de cocina gourmet y “z” al precio de la cata de vinos.

Se han vendido 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6460 € $\rightarrow 120x + 50y + 150z = 6460$.

Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet $\rightarrow 10x = 2z + y$.

El coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 € al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet $\rightarrow 2x + z = 2y + 6$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 120x + 50y + 150z = 6460 \\ 10x = 2z + y \\ 2x + z = 2y + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 5y + 15z = 646 \\ 10x - 2z = y \\ 2x + z = 2y + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 5(10x - 2z) + 15z = 646 \\ 2x + z = 2(10x - 2z) + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 50x - 10z + 15z = 646 \\ 2x + z = 20x - 4z + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 62x + 5z = 646 \\ -18x + 5z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5z = 646 - 62x \\ -18x + 5z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow -18x + 646 - 62x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -80x = -640 \Rightarrow \boxed{x = \frac{640}{80} = 8} \Rightarrow 5z = 646 - 62 \cdot 8 = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{150}{5} = 30} \Rightarrow \boxed{y = 10 \cdot 8 - 2 \cdot 30 = 20}$$

La entrada al taller de repostería cuesta 8 €, la entrada a la demostración de cocina gourmet cuesta 20 € y la cata de vinos cuesta 30 €.

b) El rango de A puede ser 3, 2 o 1. Obtenemos el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2 + 2 - 0 - 6 = 0$$

El rango de A no es 3. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Calculamos la expresión de la matriz A^2 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 0+0-2 & -1+0-1 \\ -1-2+3 & 0+4+6 & 1+6+3 \\ 1-2+1 & 0+4+2 & -1+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz A^2 tiene la primera columna nula. El rango de A^2 no es 3.

Observamos que la segunda y tercera columna son iguales. El rango de A^2 no es 2.

La matriz tiene elementos no nulos. El rango de A^2 es 1.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un servicio técnico recibe un encargo para revisar lavadoras y frigoríficos de una empresa de apartahoteles. La revisión de cada lavadora requiere 100 minutos de trabajo, mientras que cada frigorífico requiere 50 minutos. El servicio técnico dispone de 26 horas y 40 minutos para hacer las revisiones. Por política de empresa, no se aceptan encargos de más de 12 lavadoras ni de más de 16 frigoríficos. Sabiendo que las revisiones se pagan a 50 € la hora, en ambos tipos de electrodomésticos, ¿cuántos electrodomésticos de cada clase debe revisar el servicio técnico para maximizar el ingreso con el encargo? ¿A cuánto asciende este ingreso máximo?

Llamemos x = “número de lavadoras que se repasan” e y = “número de frigoríficos que se repasan”.

La revisión de cada lavadora requiere 100 minutos de trabajo, mientras que cada frigorífico requiere 50 minutos. Se necesitan $100x + 50y$ minutos para repasar los electrodomésticos.

El servicio técnico dispone de 26 horas y 40 minutos para hacer las revisiones. Este tiempo son $26 \cdot 60 + 40 = 1600$ minutos $\rightarrow 100x + 50y \leq 1600$.

No se aceptan encargos de más de 12 lavadoras ni de más de 16 frigoríficos $\rightarrow x \leq 12; y \leq 16$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} 100x + 50y \leq 1600 \\ x \leq 12; y \leq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 32 \\ x \leq 12; y \leq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Sabiendo que las revisiones se pagan a 50 € la hora, es decir, $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ € el minuto, en

ambos tipos de electrodomésticos los ingresos que se obtienen son

$$I(x, y) = \frac{5}{6}(100x + 50y) = \frac{250}{3}x + \frac{125}{3}y. \text{ Deseamos maximizar los ingresos.}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x + y = 32$		$x = 12$	$y = 16$	$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 32 - 2x$	$x = 12$	y	
0	32	12	0	Primer cuadrante
8	16	12	8	
12	8	12	16	
16	0			



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 32 \\ x \leq 12; y \leq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas **verde** y **roja**, y a la izquierda de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 1 \leq 32 \\ 1 \leq 12; 1 \leq 16 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 32 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow 2x + 16 = 32 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow \boxed{C(8, 16)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 32 \\ x = 12 \end{cases} \Rightarrow 24 + y = 32 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow \boxed{D(12, 8)}$$

Valoramos los ingresos $I(x, y) = \frac{250}{3}x + \frac{125}{3}y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 16) \rightarrow I(0, 16) = \frac{250}{3} \cdot 0 + \frac{125}{3} \cdot 16 = \frac{2000}{3} \approx 666.667$$

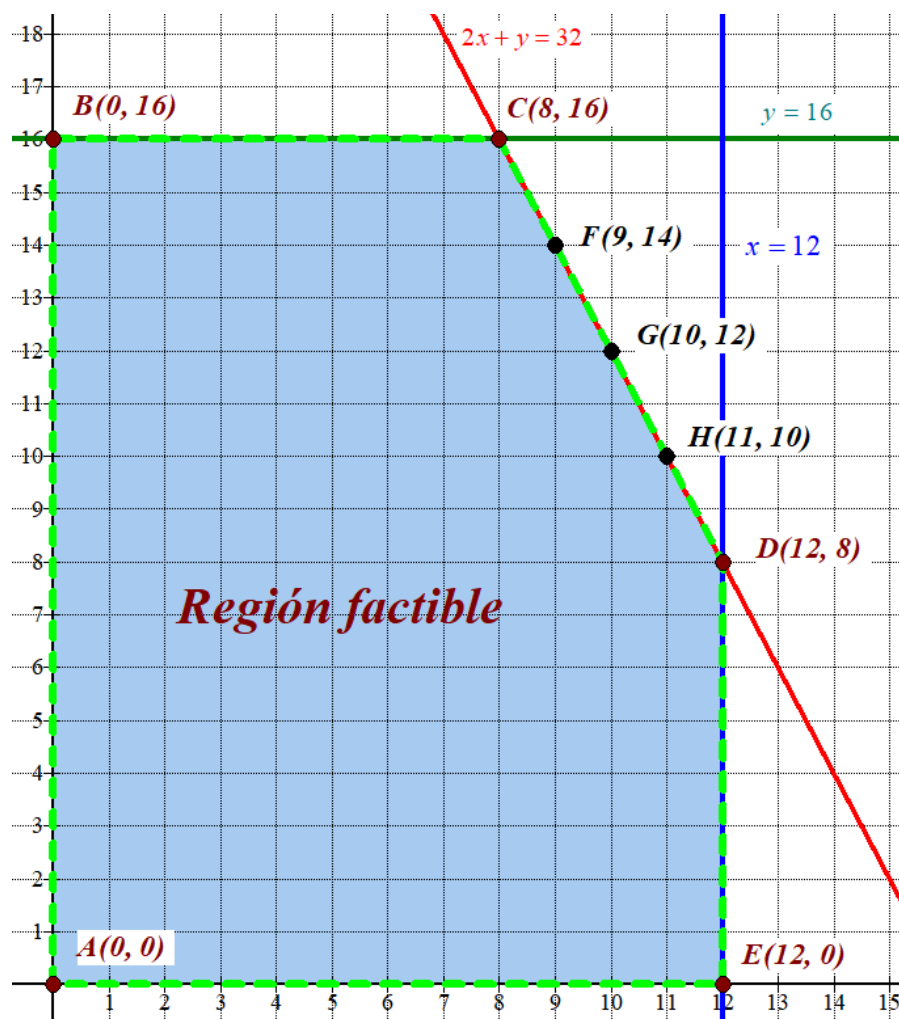
$$C(8, 16) \rightarrow I(8, 16) = \frac{250}{3} \cdot 8 + \frac{125}{3} \cdot 16 = \frac{4000}{3} \approx 1333.33 \text{ Máximo}$$

$$D(12, 8) \rightarrow I(12, 8) = \frac{250}{3} \cdot 12 + \frac{125}{3} \cdot 8 = \frac{4000}{3} \approx 1333.33 \text{ Máximo}$$

$$E(12, 0) \rightarrow I(12, 0) = \frac{250}{3} \cdot 12 + \frac{125}{3} \cdot 0 = 1000$$

Los ingresos máximos son de 1333.33 € y se consiguen en los vértices C(8, 16) y D(12, 8).

Los ingresos máximos se obtienen en todos los puntos del segmento CD. Como estos valores deben ser enteros los valores máximos de ingresos se obtienen en los puntos C(8, 16), F(9, 14), G(10, 12), H(11, 10) y D(12, 8).



Los ingresos máximos que se pueden conseguir son 1333.33 € y se pueden conseguir repasando 8 lavadoras y 16 frigoríficos o 9 lavadoras y 14 frigoríficos o 10 lavadoras y 12 frigoríficos o 11 lavadoras y 10 frigoríficos o 12 lavadoras y 8 frigoríficos,

EJERCICIO 3

a) (1.5 puntos) El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$f(t) = at^2 + bt + c, \quad t \in [0, 60]$$

donde t es el tiempo medido en minutos y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine a , b y c y represente gráficamente la función obtenida.

b) (1 punto) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

$$h(x) = (2x - 1)e^{x^2 - x}$$

a) Sabemos que $f(0) = 20$ y $f(40) = 36$. Como hay un máximo en $t = 40$ debe anularse la derivada para este valor: $f'(40) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = at^2 + bt + c \\ f(0) = 20 \\ f(40) = 36 \\ f'(t) = 2at + b \\ f'(40) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 36 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c \\ 0 = 2a \cdot 40 + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{20 = c} \\ 36 = 1600a + 40b + c \\ b = -80a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 = 1600a + 40(-80a) + 20 \Rightarrow 16 = 1600a - 3200a \Rightarrow 16 = -1600a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{16}{-1600} = \frac{-1}{100}} \Rightarrow \boxed{b = -80 \frac{-1}{100} = \frac{4}{5}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{100}$, $b = \frac{4}{5}$ y $c = 20$.

b) Calculamos la primera derivada.

$$g(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \boxed{\frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}}$$

Calculamos la segunda derivada.

$$h(x) = (2x - 1)e^{x^2 - x} \Rightarrow h'(x) = 2e^{x^2 - x} + (2x - 1)(2x - 1)e^{x^2 - x} =$$

$$= 2e^{x^2 - x} + (4x^2 - 2x - 2x + 1)e^{x^2 - x} = (2 + 4x^2 - 2x - 2x + 1)e^{x^2 - x} = \boxed{(4x^2 - 4x + 3)e^{x^2 - x}}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{5x}{2} & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & -2 < x < 2 \\ 10 - \frac{5x}{2} & x \geq 2 \end{cases}$

- a) **(0.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f en el punto de abscisa $x = -2$.
 b) **(0.75 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f con pendiente -1 .
 c) **(1.25 puntos)** Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

a) Estudiamos la continuidad en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= 10 + \frac{5(-2)}{2} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} 10 + \frac{5x}{2} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 1 = (-2)^2 + 1 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 5$$

La función es continua en $x = -2$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = -2$.

La derivada en $[-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ es $f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & 0 \leq x < -2 \\ 2x & -2 < x < 2 \\ -\frac{5}{2} & x > 2 \end{cases}$.

Comprobamos si coinciden las derivadas laterales en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} f'(-2^-) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5}{2} = 2.5 \\ f'(-2^+) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x = 2(-2) = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(-2^-) = 2.5 \neq -4 = f'(-2^+)$$

Las derivadas laterales no coinciden y la función no es derivable en $x = -2$.

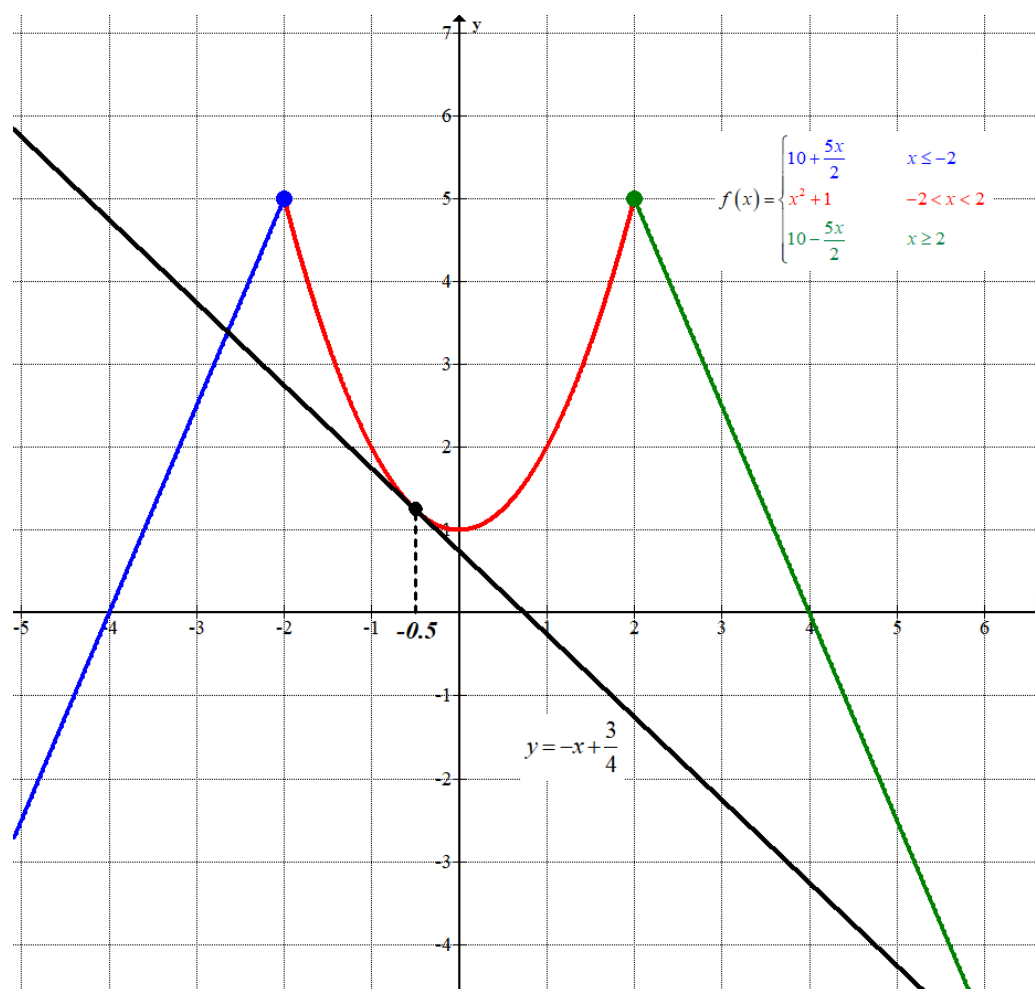
- b) La pendiente de la recta tangente en $x = a$ es el valor de la derivada de la función para ese valor. Como la pendiente es -1 se debe cumplir que $f'(a) = -1$.

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = 1 \rightarrow \text{Imposible} \\ 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \in (-2, 2) \\ -\frac{5}{2} = 1 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

Debemos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \\ y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{5}{4} = (-1)\left(x - \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = -x + \frac{3}{4}}$$

La recta tangente a la gráfica de la función f con pendiente -1 tiene ecuación $y = -x + \frac{3}{4}$.



c) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

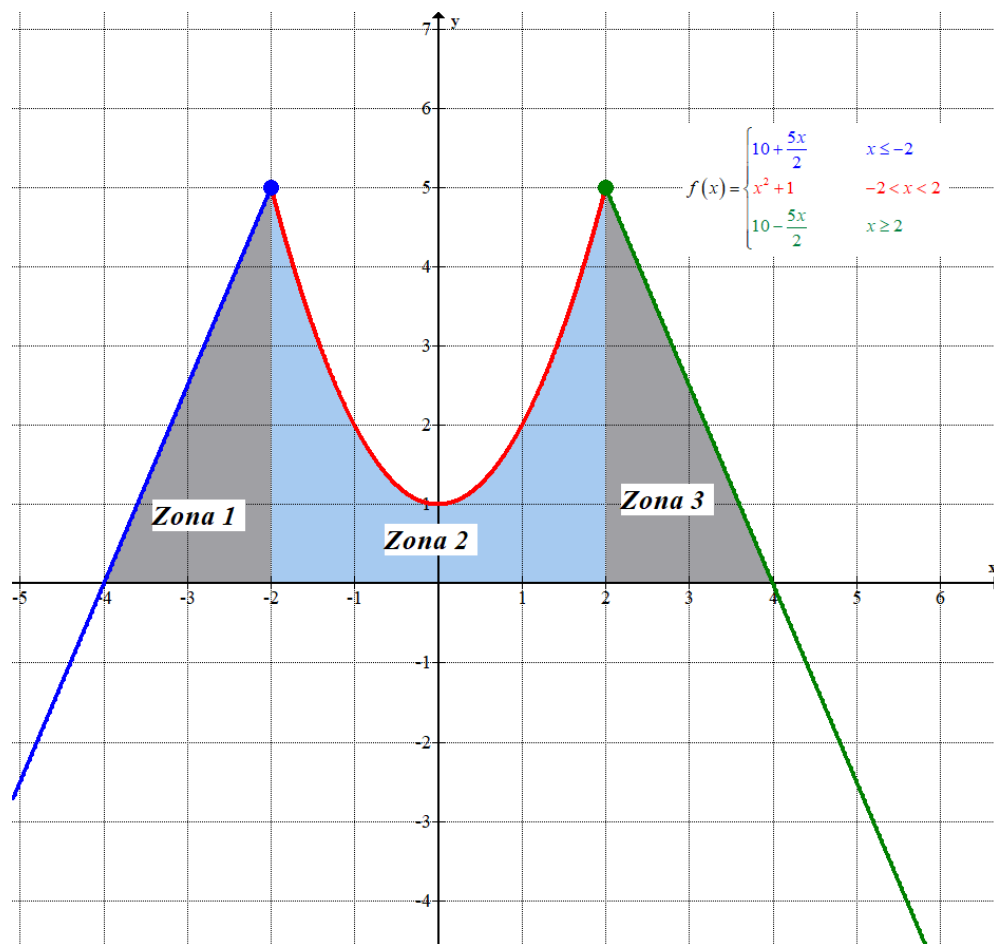
$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 10 + \frac{5x}{2} = 0 \rightarrow 20 + 5x = 0 \rightarrow 5x = -20 \rightarrow \boxed{x = -4} \in (-\infty, -2) \\ x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{Imposible} \\ 10 - \frac{5x}{2} = 0 \rightarrow 20 - 5x = 0 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow \boxed{x = 4} \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función y el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$f(x) = 10 + \frac{5x}{2}$
-4	0
-2	5

x	$f(x) = x^2 + 1$
-1	2
0	1
1	2

x	$f(x) = 10 - \frac{5x}{2}$
2	5
4	0



El área de la zona 1 es el área de un triángulo de base 2 y altura 5 por lo que vale $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ unidades cuadradas.

El área de la zona 3 es igual al área de la zona 1, por lo que vale 5 unidades cuadradas.

El área de la zona 2 es el valor de la integral definida entre -2 y 2 de $f(x) = x^2 + 1$.

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 x^2 + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{2^3}{3} + 2 \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 2 \right] = \frac{8}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 2 = \boxed{\frac{28}{3}}$$

El área de la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas vale $5 + 5 + \frac{28}{3} = \frac{58}{3} \approx 19.333$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 5

Una encuesta realizada a personas que utilizan productos de cosmética arroja los siguientes datos: el 66% de las personas encuestadas son mujeres y, de estas, el 71% utilizan cosmética natural. Además, se sabe que el 17.86% son hombres que no utilizan cosmética natural. Se selecciona una de estas personas al azar.

- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea mujer o use cosmética natural.
- (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea hombre y utilice cosmética natural.
- (0.75 puntos)** Sabiendo que no usa cosmética natural, calcule la probabilidad de que sea hombre.
- (0.5 puntos)** ¿Son sucesos incompatibles "utilizar cosmética natural" y "ser mujer"? ¿Son independientes?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Usa cosmética natural	No usa cosmética natural	
Hombre		17.86	
Mujer	$0.71 \cdot 66 = 46.86$		66
			100

Completamos la tabla.

	Usa cosmética natural	No usa cosmética natural	
Hombre	16.14	17.86	34
Mujer	$0.71 \cdot 66 = 46.86$	19.14	66
	63	37	100

- Hay un 66% de los encuestados que son mujeres y un 16.14% son hombres que usan cosmética natural. La probabilidad de que sea mujer o use cosmética natural vale $0.1614 + 0.66 = 0.8214$.
- Hay un 16.14% de los encuestados que son hombres que usan cosmética natural. La probabilidad de que sea hombre y utilice cosmética natural vale 0.1614.
- Hay un 37 % de los encuestados que no usa cosmética natural y un 17.86 % son hombres que no usan cosmética natural. La probabilidad de que al elegir una persona que no usa cosmética natural esta sea hombre vale $\frac{17.86}{37} = \frac{893}{1850} \approx 0.4827$.
- Para que sean incompatibles su intersección debe ser vacía, pero sabemos que las mujeres que usan cosmética natural son el 46.86% de los encuestados y no es 0. Los sucesos no son incompatibles.
Llamamos CN al suceso "usar cosmética natural" y M al suceso "ser mujer". Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(CN \cap M) = P(CN)P(M)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(CN \cap M) = 0.4686 \\ P(CN)P(M) = 0.63 \cdot 0.66 = 0.4158 \end{array} \right\} \Rightarrow P(CN \cap M) = 0.4686 \neq 0.4158 = P(CN)P(M)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

EJERCICIO 6

Un tratamiento experimental para tratar una determinada intolerancia alimentaria mejora al 60% de los pacientes a los que se les suministra. Cinco pacientes deciden someterse a dicho tratamiento.

- a) **(0.75 puntos)** Indique la distribución que sigue la variable “número de pacientes de entre los 5 que mejoran con este tratamiento”. ¿Cuál es la probabilidad de que mejoren cuatro pacientes gracias al tratamiento?
- b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos dos pacientes experimenten mejoría tras someterse al tratamiento.
- c) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren al someterse a ese tratamiento?
- d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes deberían someterse al tratamiento para que el número esperado de pacientes que mejoren sea mayor o igual a 12?

- a) Sea X = Número de pacientes de entre los 5 que mejoran con este tratamiento.

Esta distribución es binomial. La probabilidad de que cada persona mejore con el tratamiento no depende de lo que les pase a los demás. El número de repeticiones es $n = 5$ y la probabilidad de que una persona mejore con el tratamiento es $p = 0.6$. $X = B(5, 0.6)$.

Calculamos el valor de $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 5 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4 = \boxed{0.2592}$$

- b) Debemos calcular el valor de $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left(\binom{5}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^5 + \binom{5}{1} 0.6^1 \cdot 0.4^4 \right) = 1 - (0.4^5 + 5 \cdot 0.6 \cdot 0.4^4) = \boxed{0.91296} \end{aligned}$$

- d) Si en vez de 5 son “ n ” los pacientes que sometemos al tratamiento la variable X = “Número de pacientes de entre los “ n ” que mejoran con este tratamiento” es una variable binomial de parámetros n y $p = 0.6$. $X = B(n, 0.6)$.

El número esperado de pacientes que mejoren es $np = 0.6n$. Buscamos cuando es mayor o igual que 12.

$$0.6n \geq 12 \Rightarrow n \geq \frac{12}{0.6} = 20$$

Sometiendo a 20 pacientes o más al tratamiento el número esperado de pacientes que mejoren será mayor o igual a 12.

EJERCICIO 7

En un invernadero de Palos de la Frontera (Huelva), se cultivan fresas y frambuesas. Se desea estimar la proporción de fresas y frambuesas que se recolectan. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 300 kg, obteniéndose que 180 kg de ellos son fresas y el resto frambuesas.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para estimar la proporción de fresas recolectadas en el invernadero y otro intervalo para estimar la proporción de frambuesas recolectadas.

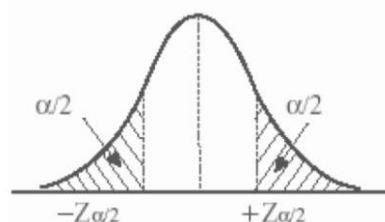
b) **(1 punto)** Con las proporciones muestrales iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántos kilogramos de frutos deberían seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que las proporciones muestrales difieran de las proporciones poblacionales a lo sumo en un 2%?

Tamaño de la muestra es $n = 300$ kilos de frutos. La proporción de fresas que se recolectan es $p = \frac{180}{300} = 0.6$ y la proporción de frambuesas es $q = 1 - p = 1 - 0.6 = 0.4$.

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9824	0.9828	0.9832	0.9836	0.9840	0.9844	0.9848	0.9850



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}} \approx 0.0614$$

El intervalo de confianza para la proporción de fresas recolectadas es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6 - 0.0614, 0.6 + 0.0614) = (0.5386, 0.6614)$$

Para calcular el intervalo de confianza para la proporción de frambuesas recolectadas solo cambia la proporción muestral, siendo el tamaño muestral, $z_{\alpha/2}$ y el error el mismo que con las fresas.

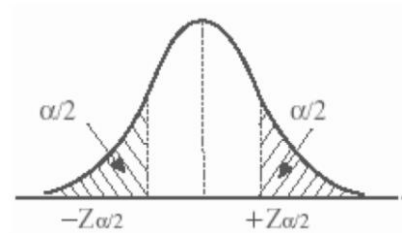
El intervalo de confianza para la proporción de frambuesas recolectadas es:

$$(q - Error, q + Error) = (0.4 - 0.0614, 0.4 + 0.0614) = (0.3386, 0.4614)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Hallamos el tamaño de la muestra mínimo para que el error máximo sea 0.02.

$$\begin{aligned}
 \text{Error} < 0.02 &\Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} < 0.02 \Rightarrow 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} < 0.02 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} < \frac{0.02}{1.96} \Rightarrow \frac{0.6 \cdot 0.4}{n} < \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 \Rightarrow \frac{0.6 \cdot 0.4}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} < n \Rightarrow \boxed{n > 2304.96}
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2305 kilos de frutos.