



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA
DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) **(1.75 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales:

$$(A + I_3) \cdot X + Y = A - I_3 \qquad X - Y = I_3$$

- b) **(0.75 puntos)** Halle el rango de las matrices $A + I_3$ y $A - I_3$. ¿Son matrices invertibles?

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de catering dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 dm³ de almacenamiento en cámaras frigoríficas para elaborar dos tipos de menús: *premium* y *estándar*. Ambos menús requieren tiempo, tanto de preparación como de empaquetado, y espacio de almacenamiento en frigoríficos. Concretamente, el menú *premium* requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 dm³ en frigoríficos. Por su parte, el menú *estándar* requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 dm³ en frigoríficos. El beneficio obtenido por cada menú *premium* es de 10.50 € y por cada menú *estándar* es de 5.50 €. La empresa sabe que venderá todos los menús producidos. Determine cuántos menús de cada tipo deben elaborarse semanalmente para maximizar el beneficio total y a cuánto asciende este beneficio.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

- a) **(1.2 puntos)** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x+1} & x \leq -1 \\ x^2 - 2 & -1 < x < 2 \\ b \cdot \log(12 - x) & 2 \leq x < 12 \end{cases}$$

siendo a y b números reales. Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en su dominio.

- b) **(1.3 puntos)** Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 5$. Calcule el área del recinto.

EJERCICIO 4

El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 10 & 0 \leq t \leq 2.5 \\ t^2 + at + b & 2.5 < t \leq 5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas y a y b números reales.

- a) **(1.25 puntos)** ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $t = 2.5$.
- b) **(1.25 puntos)** Para $a = -8$ y $b = 22.5$, esboce la gráfica de la función f , estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Un nuevo servicio de streaming utiliza un algoritmo para recomendar películas a sus usuarios en función de las películas vistas anteriormente. Como la plataforma es de reciente creación, solo tiene disponibles tres géneros: ciencia ficción, terror y musicales. El 62 % de las películas disponibles son de ciencia ficción, la cuarta parte son de terror y el resto musicales. De las películas de ciencia ficción, el algoritmo hace una recomendación correcta en el 70 % de las ocasiones, de las de terror, el 75 % de las veces y de los musicales, el 15 %. Un usuario selecciona al azar una película de su lista de recomendaciones:

- a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el algoritmo haya hecho una recomendación correcta?
- b) **(0.75 puntos)** Si no ha sido recomendada correctamente, ¿qué probabilidad hay de que la película sea de terror?
- c) **(0.5 puntos)** De las recomendaciones correctas del género de ciencia ficción, el usuario queda satisfecho con la elección de la película en el 55 % de las ocasiones. ¿Qué probabilidad hay de que la película sea de ciencia ficción, esté recomendada correctamente y el usuario haya quedado satisfecho?

BLOQUE D

EJERCICIO 6

El tiempo que tardan los usuarios de un sistema de salud en conseguir una cita en Atención Primaria sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 4.2 días.

- a) **(1.75 puntos)** Elegidos al azar 30 usuarios, se obtiene que el tiempo medio que tardan en obtener cita en Atención Primaria es de 11.3 días. Determine un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

La gerencia del sistema de salud asegura que el promedio de días para obtener una cita en Atención Primaria es de 9.8 días. Según el intervalo obtenido ¿podría asumirse la afirmación de la gerencia como posible?

- b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos usuarios como mínimo se deberían seleccionar en una nueva muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo en el intervalo de la media poblacional sea de 0.6 días.

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de personas de una determinada localidad que se muestran favorables a la celebración de las fiestas locales durante el mes de mayo. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 200 personas resultando que 130 de ellas están a favor.

- a) **(1 punto)** Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96.5 %, para estimar la proporción de personas de esta localidad que está a favor de celebrar las fiestas locales durante el mes de mayo.
- b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el número mínimo de personas que deberán seleccionarse aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 2%?
- c) **(0.5 puntos)** Manteniendo el tamaño de la muestra y la proporción muestral, si se aumenta el nivel de confianza, razone cómo influye en el error máximo de estimación.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1.75 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales:

$$(A + I_3) \cdot X + Y = A - I_3 \quad X - Y = I_3$$

b) (0.75 puntos) Halle el rango de las matrices $A + I_3$ y $A - I_3$. ¿Son matrices invertibles?

a) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{matrix} (A + I_3) \cdot X + Y = A - I_3 \\ X - Y = I_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} (A + I_3) \cdot X + Y = A - I_3 \\ X - I_3 = Y \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A + I_3) \cdot X + X - I_3 = A - I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + I_3) \cdot X + X = A \Rightarrow AX + I_3X + X = A \Rightarrow AX + X + X = A \Rightarrow AX + 2X = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + 2I_3)X = A \Rightarrow X = (A + 2I_3)^{-1} A$$

Comprobamos que la matriz $A + 2I_3$ tiene inversa y la calculamos.

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A + 2I_3| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 4 + 0 - 0 - 0 - 16 = 36 \neq 0$$

$$(A + 2I_3)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A + 2I_3)^T}{|A + 2I_3|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}}{36} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + 2I_3)^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 4 & 16 & -8 \\ -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 & 1/18 \\ 1/9 & 4/9 & -2/9 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver el sistema.

$$X = (A + 2I_3)^{-1} A = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 4 & 16 & -8 \\ -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16+4 & 8-4+4 & -8+4 \\ 8-16 & 4+16-16 & 32-16 \\ -12+24 & -6-6+24 & -12+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 20 & 8 & -4 \\ -8 & 4 & 16 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = X - I_3 = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 & 2/9 & -1/9 \\ -2/9 & -8/9 & 4/9 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} e$

$$Y = \begin{pmatrix} -4/9 & 2/9 & -1/9 \\ -2/9 & -8/9 & 4/9 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & -8 & 4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

b) Obtenemos la expresión de las matrices $A + I_3$ y $A - I_3$.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si sus determinantes son nulos o no.

$$|A + I_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 0 - 0 - 0 - 12 = 10 \neq 0$$

$$|A - I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - 0 - 0 - 4 = 0$$

El determinante de $A + I_3$ es no nulo y su rango es 3. Esta matriz es invertible por ser su determinante no nulo.

El determinante de $A - I_3$ es nulo y su rango es menor de 3. Si consideramos el menor que resulta de quitar la primera fila y la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$. El rango de $A - I_3$ es 2. Como su determinante es nulo esta matriz no es invertible.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de catering dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 dm³ de almacenamiento en cámaras frigoríficas para elaborar dos tipos de menús: *premium* y *estándar*. Ambos menús requieren tiempo, tanto de preparación como de empaquetado, y espacio de almacenamiento en frigoríficos. Concretamente, el menú *premium* requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 dm³ en frigoríficos. Por su parte, el menú *estándar* requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 dm³ en frigoríficos. El beneficio obtenido por cada menú *premium* es de 10.50 € y por cada menú *estándar* es de 5.50 €. La empresa sabe que venderá todos los menús producidos. Determine cuántos menús de cada tipo deben elaborarse semanalmente para maximizar el beneficio total y a cuánto asciende este beneficio.

Llamemos x = “número de menús *premium*”, y = “número de menús *estándar*”.

Deseamos maximizar los ingresos que vienen expresados como $I(x, y) = 10.5x + 5.5y$.

Las restricciones del problema son:

“El menú *premium* requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 dm³ en frigoríficos. Por su parte, el menú *estándar* requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 dm³ en frigoríficos. Dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 dm³ de almacenamiento” $\rightarrow$
 $2x + 3y \leq 58$; $2x + y \leq 50$; $x + 4y \leq 60$

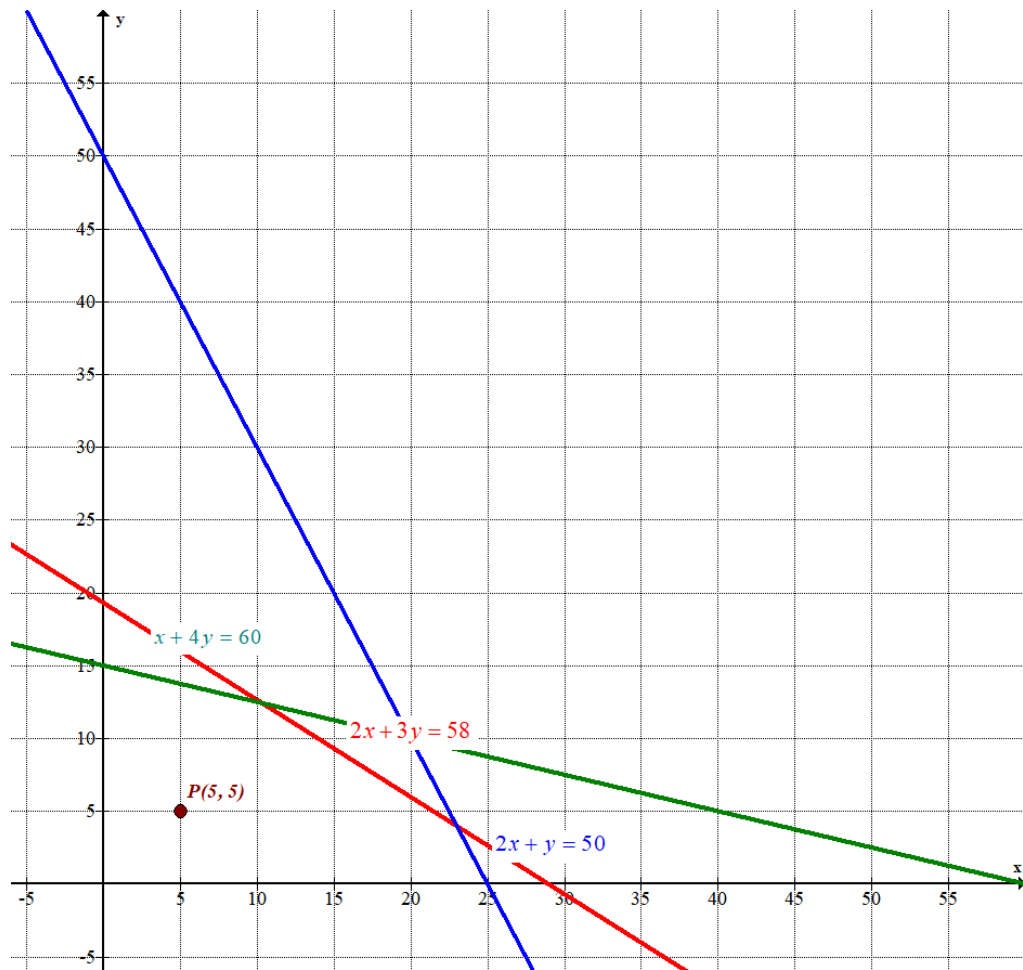
“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 58 \\ 2x + y \leq 50 \\ x + 4y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x + 3y = 58$	$2x + y = 50$	$x + 4y = 60$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \quad y = \frac{58 - 2x}{3}$ 0 58/3 20 6 29 0	$x \quad y = 50 - 2x$ 0 50 20 10 25 0	$x \quad y = \frac{60 - x}{4}$ 0 15 20 10 60 0	Primer cuadrante



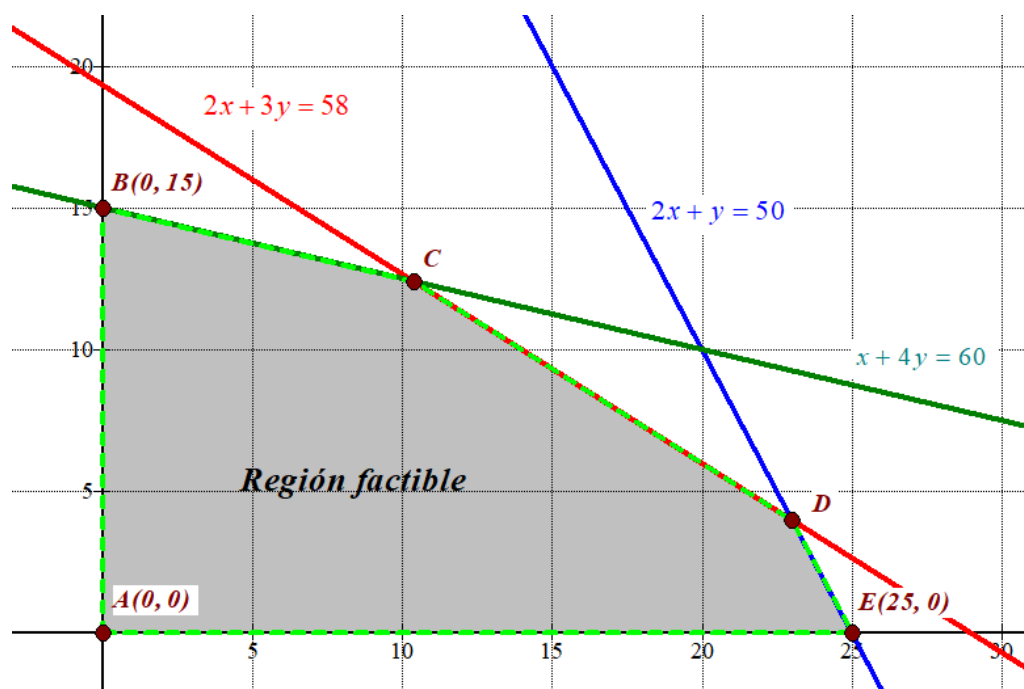
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 58 \\ 2x + y \leq 50 \\ x + 4y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas verde, azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \leq 58 \\ 2 \cdot 5 + 5 \leq 50 \\ 5 + 4 \cdot 5 \leq 60 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} x + 4y = 60 \\ 2x + 3y = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 - 4y \\ 2x + 3y = 58 \end{cases} \Rightarrow 2(60 - 4y) + 3y = 58 \Rightarrow 120 - 8y + 3y = 58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -62 \Rightarrow y = \frac{62}{5} = 12.4 \Rightarrow x = 60 - 4 \cdot 12.4 = 10.4 \Rightarrow \boxed{C(10.4, 12.4)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 58 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 58 \\ y = 50 - 2x \end{cases} \Rightarrow 2x + 3(50 - 2x) = 58 \Rightarrow 2x + 150 - 6x = 58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x = -92 \Rightarrow x = \frac{92}{4} = 23 \Rightarrow y = 50 - 2 \cdot 23 = 4 \Rightarrow \boxed{D(23, 4)}$$

Valoramos los ingresos $I(x, y) = 10.5x + 5.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 15) \rightarrow I(0, 15) = 10.5 \cdot 0 + 5.5 \cdot 15 = 82.5$$

$$C(10.4, 12.4) \rightarrow I(10.4, 12.4) = 10.5 \cdot 10.4 + 5.5 \cdot 12.4 = 177.4$$

$$D(23, 4) \rightarrow I(23, 4) = 10.5 \cdot 23 + 5.5 \cdot 4 = \mathbf{263.5 \text{ Máximo}}$$

$$E(25, 0) \rightarrow I(25, 0) = 10.5 \cdot 25 + 5.5 \cdot 0 = 262.5$$

Los ingresos máximos son de 263.5 € y se consiguen en el vértice D(23, 4).

Elaborando semanalmente 23 menús *premium* y 4 menús *estándar* se consiguen unos beneficios máximos de 263.5 €.

EJERCICIO 3

a) (1.2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x+1} & x \leq -1 \\ x^2 - 2 & -1 < x < 2 \\ b \cdot \log(12 - x) & 2 \leq x < 12 \end{cases}$$

siendo a y b números reales. Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en su dominio.

b) (1.3 puntos) Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 5$. Calcule el área del recinto.

a) La función debe ser continua en los cambios de definición: $x = -1$ y $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= a \cdot e^{x+1} = a \cdot e^{-1+1} = a \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} a \cdot e^{x+1} = a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= b \cdot \log(12 - 2) = b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} b \cdot \log(12 - x) = b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 2$.

b) Averiguamos donde se cortan las gráficas de recta y parábola.

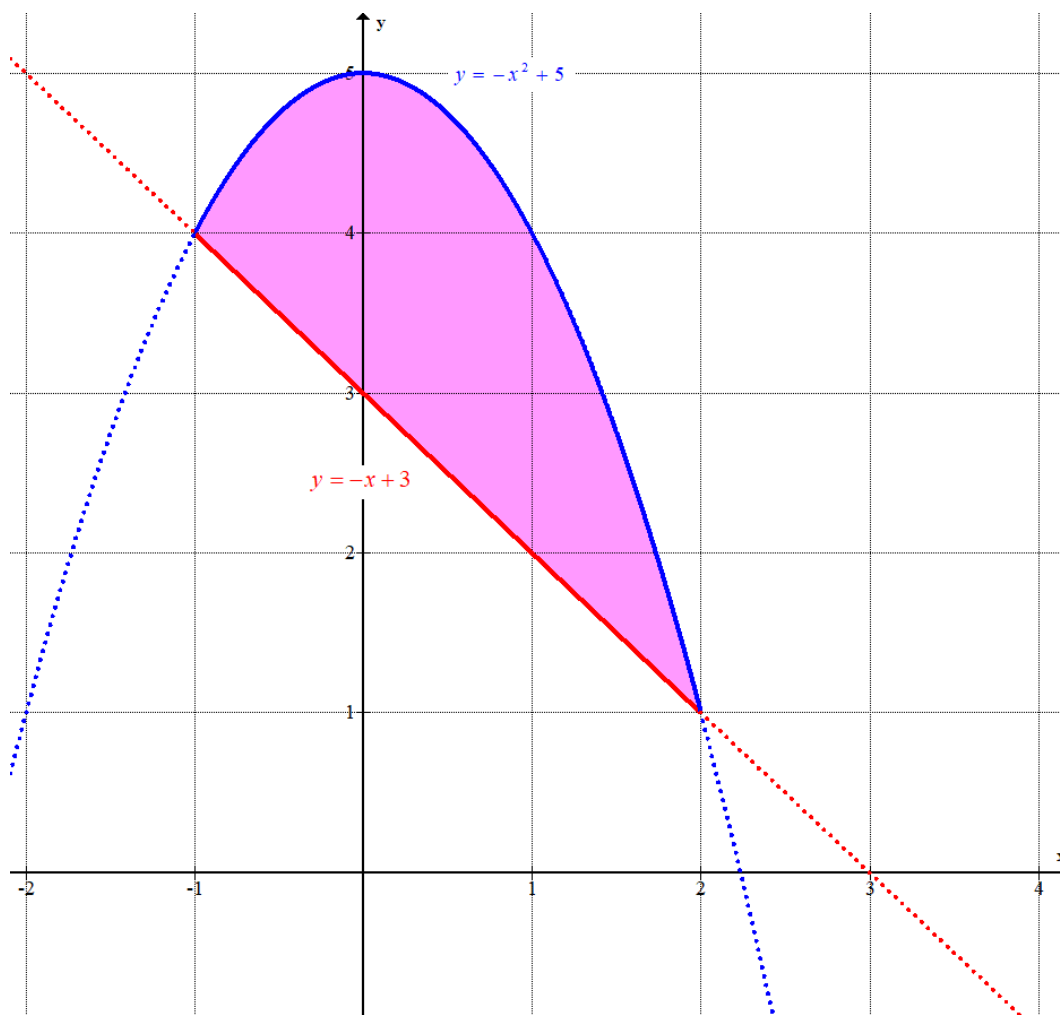
$$\left. \begin{aligned} y &= -x + 3 \\ y &= -x^2 + 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x + 3 = -x^2 + 5 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la región limitada por recta y parábola.

x	$y = -x + 3$
-1	4
0	3
1	2
2	1

x	$y = -x^2 + 5$
-1	4
0	5
1	4
2	1



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de superficie podemos aproximar el área de la región coloreada. Su valor estará entre 4 y 5 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. El área es el valor de la integral definida entre -1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_{-1}^2 (-x^2 + 5) - (-x + 3) dx = \int_{-1}^2 -x^2 + 5 + x - 3 dx = \int_{-1}^2 -x^2 + x + 2 dx = \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] = \\
 &= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \boxed{4.5 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área del recinto acotado, limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 5$ tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4

El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 10 & 0 \leq t \leq 2.5 \\ t^2 + at + b & 2.5 < t \leq 5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas y a y b números reales.

a) **(1.25 puntos)** ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $t = 2.5$.

b) **(1.25 puntos)** Para $a = -8$ y $b = 22.5$, esboce la gráfica de la función f , estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

a) Como $f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 10 = 10$ el nivel de concentración al comenzar el examen es 10. Para que la función sea continua debe serlo en $t = 2.5$.

$$\left. \begin{aligned} f(2.5) &= -2.5^2 + 2 \cdot 2.5 + 10 = 8.75 \\ \lim_{t \rightarrow 2.5^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2.5^-} -t^2 + 2t + 10 = 8.75 \\ \lim_{t \rightarrow 2.5^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2.5^+} t^2 + at + b = 2.5^2 + 2.5a + b = 6.25 + 2.5a + b \\ \lim_{t \rightarrow 2.5^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2.5^+} f(t) = f(2.5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8.75 = 6.25 + 2.5a + b \Rightarrow \boxed{b = 2.5 - 2.5a}$$

Para que la función sea derivable debe serlo en $t = 2.5$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$\text{La derivada en } [0, 2.5) \cup (2.5, 5] \text{ es } f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & 0 \leq t < 2.5 \\ 2t + a & 2.5 < t \leq 5 \end{cases}.$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2.5^-) &= \lim_{t \rightarrow 2.5^-} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 2.5^-} -2t + 2 = -3 \\ f'(2.5^+) &= \lim_{t \rightarrow 2.5^+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 2.5^+} 2t + a = 5 + a \\ f'(2.5^-) &= f'(2.5^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 + a = -3 \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

Para $a = -8$ tenemos que $b = 2.5 - 2.5(-8) = 22.5$.

Los valores buscados son $a = -8$ y $b = 22.5$.

b) Para $a = -8$ y $b = 22.5$ sabemos que la función es continua y derivable.

$$\text{La función queda } f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 10 & 0 \leq t \leq 2.5 \\ t^2 - 8t + 22.5 & 2.5 < t \leq 5 \end{cases}.$$

$$\text{Averiguamos cuando se anula la derivada de la función } f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & 0 \leq t \leq 2.5 \\ 2t - 8 & 2.5 < t \leq 5 \end{cases}.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t + 2 = 0 \rightarrow t = 1 \in [0, 2.5] \\ 2t - 8 = 0 \rightarrow t = 4 \in (2.5, 5] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos $t = 2.5$.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = -2 \cdot 0.5 + 2 = 1 > 0$.
La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,2.5)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$.
La función decrece en $(1,2.5)$.
- En el intervalo $(2.5,4)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 2 \cdot 3 - 8 = -2 < 0$.
La función decrece en $(2.5,4)$.
- En el intervalo $(4,5]$ tomamos $t = 4.5$ y la derivada vale $f'(4.5) = 2 \cdot 4.5 - 8 = 1 > 0$.
La función crece en $(4,5]$.

La función crece en $[0,1) \cup (4,5]$ y decrece en $(1,4)$.

La función crece antes de $t = 1$ y decrece después. En $t = 1$ hay un máximo relativo.

La función decrece antes de $t = 4$ y crece después. En $t = 4$ hay un mínimo relativo.

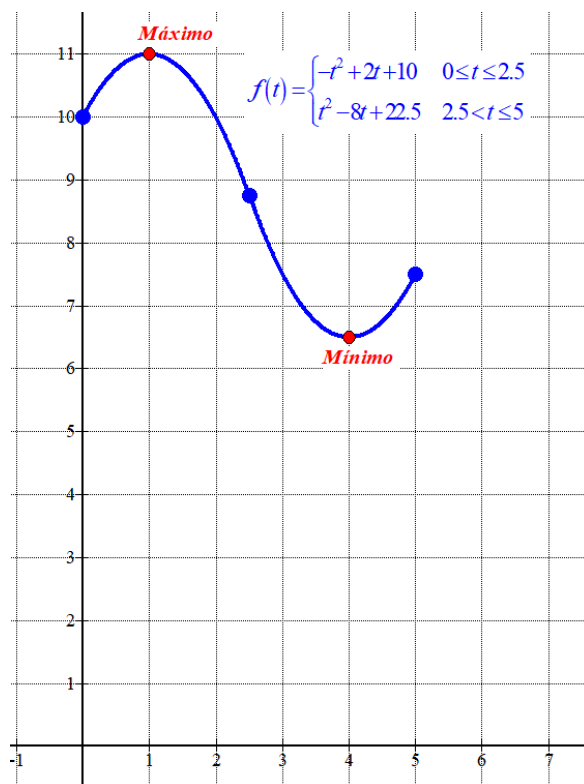
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en los puntos críticos para establecer los máximos y mínimos absolutos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -0^2 + 2 \cdot 0 + 10 = 10 \\ f(1) &= -1^2 + 2 \cdot 1 + 10 = 11 \text{ Máximo} \\ f(4) &= 4^2 - 8 \cdot 4 + 22.5 = 6.5 \text{ Mínimo} \\ f(5) &= 5^2 - 8 \cdot 5 + 22.5 = 7.5 \end{aligned} \right\}$$

El nivel máximo de concentración es 11 y se consigue al cabo de 1 hora.

El nivel mínimo de concentración es 6.5 y se consigue al cabo de 4 horas.

Representamos la gráfica de la función.



EJERCICIO 5

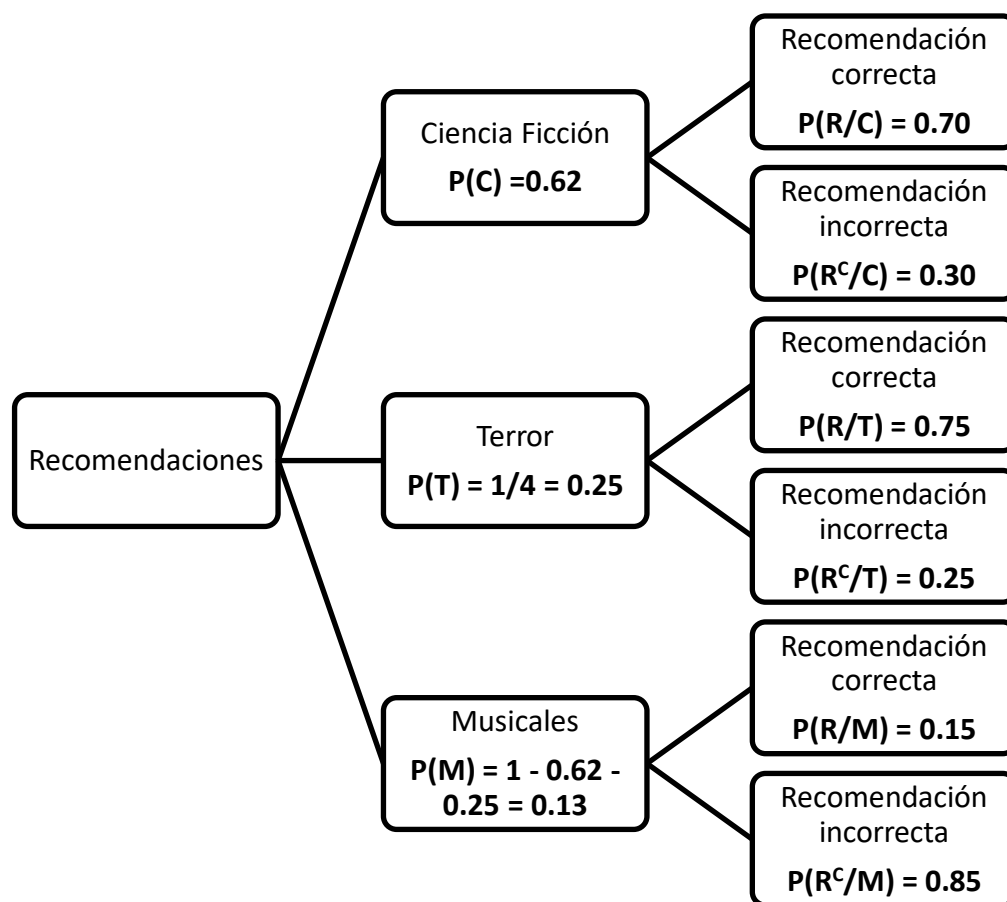
Un nuevo servicio de streaming utiliza un algoritmo para recomendar películas a sus usuarios en función de las películas vistas anteriormente. Como la plataforma es de reciente creación, solo tiene disponibles tres géneros: ciencia ficción, terror y musicales. El 62 % de las películas disponibles son de ciencia ficción, la cuarta parte son de terror y el resto musicales. De las películas de ciencia ficción, el algoritmo hace una recomendación correcta en el 70 % de las ocasiones, de las de terror, el 75 % de las veces y de los musicales, el 15 %. Un usuario selecciona al azar una película de su lista de recomendaciones:

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el algoritmo haya hecho una recomendación correcta?

b) **(0.75 puntos)** Si no ha sido recomendada correctamente, ¿qué probabilidad hay de que la película sea de terror?

c) **(0.5 puntos)** De las recomendaciones correctas del género de ciencia ficción, el usuario queda satisfecho con la elección de la película en el 55 % de las ocasiones. ¿Qué probabilidad hay de que la película sea de ciencia ficción, esté recomendada correctamente y el usuario haya quedado satisfecho?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(C)P(R/C) + P(T)P(R/T) + P(M)P(R/M) =$$

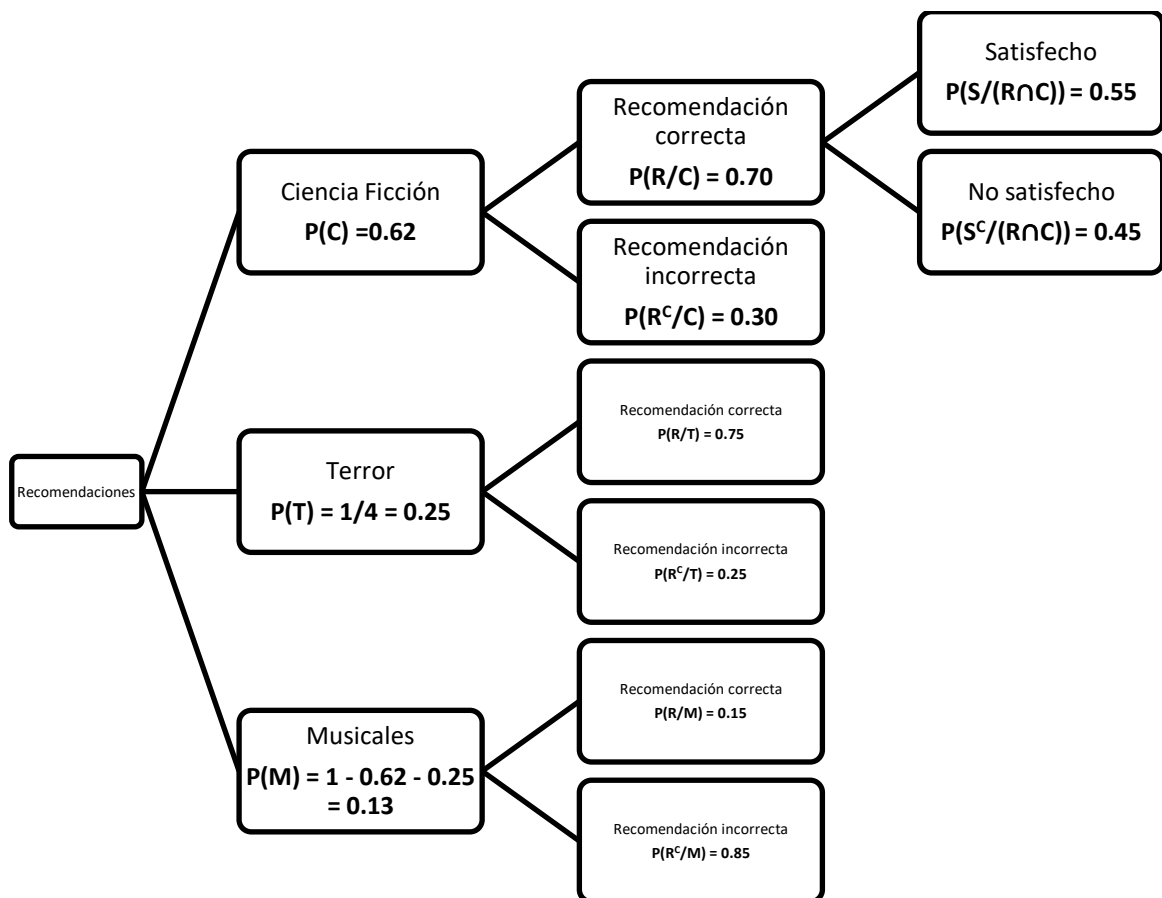
$$= 0.62 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.75 + 0.13 \cdot 0.15 = \boxed{0.641}$$

b) Nos piden calcular $P(T/R^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/R^c) = \frac{P(T \cap R^c)}{P(R^c)} = \frac{P(T)P(T/R^c)}{1 - P(R)} = \frac{0.25 \cdot 0.25}{1 - 0.641} = \frac{125}{718} \approx 0.1741$$

c) Llamamos S al suceso “El cliente está satisfecho con la elección de la película”. Nos dicen que $P(S/(R \cap C)) = 0.55$. Nos piden calcular $P(C \cap R \cap S)$.

$$P(C \cap R \cap S) = P(C)P(R/C)P(S/(C \cap R)) = 0.62 \cdot 0.7 \cdot 0.55 = 0.2387$$



EJERCICIO 6

El tiempo que tardan los usuarios de un sistema de salud en conseguir una cita en Atención Primaria sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 4.2 días.

a) **(1.75 puntos)** Elegidos al azar 30 usuarios, se obtiene que el tiempo medio que tardan en obtener cita en Atención Primaria es de 11.3 días. Determine un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

La gerencia del sistema de salud asegura que el promedio de días para obtener una cita en Atención Primaria es de 9.8 días. Según el intervalo obtenido ¿podría asumirse la afirmación de la gerencia como posible?

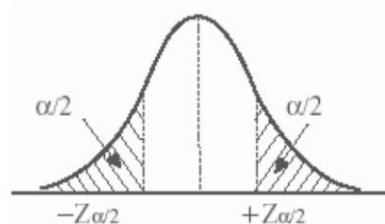
b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos usuarios como mínimo se deberían seleccionar en una nueva muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo en el intervalo de la media poblacional sea de 0.6 días.

Sea X = El tiempo que tardan los usuarios de un sistema de salud en conseguir una cita en Atención Primaria, medido en días. $X = N(\mu, 4.2)$.

a) Tamaño de la muestra $n = 30$ usuarios. El tiempo medio de la muestra es $\bar{x} = 11.3$ días. El tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes es de 12 horas de estudio semanal. Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9824	0.9828	0.9832	0.9836	0.9840	0.9844	0.9848	0.9850
2.2	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9877	0.9880	0.9883	0.9886



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{30}} \approx 1.664 \text{ días}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (11.3 - 1.664, 11.3 + 1.664) = (9.636, 12.964)$$

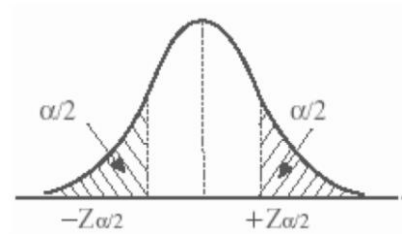
“La gerencia del sistema de salud asegura que el promedio de días para obtener una cita en Atención Primaria es de 9.8 días. Según el intervalo obtenido ¿podría asumirse la afirmación de la gerencia como posible?”

El promedio de 9.8 días pertenece al intervalo de confianza: $9.636 < 9.8 < 12.964$, por lo que si se puede asumir esa afirmación con un nivel de confianza del 97 %, aunque se sitúa muy cerca del límite inferior (es una afirmación política y no va a decir que el promedio es de 12 días).

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Hallamos el tamaño de la muestra mínimo para que el error máximo sea 0.6 días.

$$Error < 0.6 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.6 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{n}} < 0.6 \Rightarrow 1.96 \cdot 4.2 < 0.6\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1.96 \cdot 4.2}{0.6} < \sqrt{n} \Rightarrow n > \left(\frac{1.96 \cdot 4.2}{0.6} \right)^2 \approx 188.24$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 189 usuarios.

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de personas de una determinada localidad que se muestran favorables a la celebración de las fiestas locales durante el mes de mayo. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 200 personas resultando que 130 de ellas están a favor.

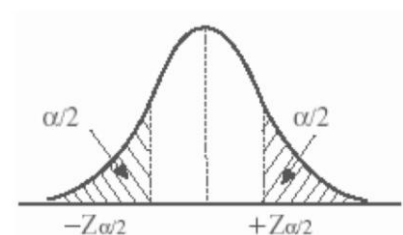
- a) **(1 punto)** Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96.5 %, para estimar la proporción de personas de esta localidad que está a favor de celebrar las fiestas locales durante el mes de mayo.
- b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el número mínimo de personas que deberán seleccionarse aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 2%?
- c) **(0.5 puntos)** Manteniendo el tamaño de la muestra y la proporción muestral, si se aumenta el nivel de confianza, razone cómo influye en el error máximo de estimación.

Tamaño de la muestra es $n = 200$ personas. La proporción de personas que se muestran favorables a la celebración de las fiestas locales durante el mes de mayo $pr = \frac{130}{200} = 0.65$;
 $qr = 1 - pr = 1 - 0.65 = 0.35$

- a) Con un nivel de confianza del 96.5 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,965 \rightarrow \alpha = 0,035 \rightarrow \alpha/2 = 0,0175 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9825 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,11$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7614
0.8	0.7881	0.7915
0.9	0.8159	0.8192
1.0	0.8413	0.8446
1.1	0.8643	0.8675
1.2	0.8849	0.8879
1.3	0.9032	0.9061
1.4	0.9192	0.9221
1.5	0.9332	0.9361
1.6	0.9452	0.9480
1.7	0.9554	0.9581
1.8	0.9641	0.9668
1.9	0.9713	0.9739
2.0	0.9772	0.9798
2.1	0.9808	0.9826



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.11 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{200}} \approx 0.0712$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.65 - 0.0712, 0.65 + 0.0712) = (0.5788, 0.7212)$$

- b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9945	0.9946	0.9947

El error máximo es de 0.02, lo sustituimos en la fórmula y despejamos n .

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{2.575} = \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.02}{2.575} \right)^2 = \frac{0.65 \cdot 0.35}{n} \Rightarrow n = \frac{0.65 \cdot 0.35}{\left(\frac{0.02}{2.575} \right)^2} \approx 3771.17
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 3772 personas.

c) Si aumentamos el valor del nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$.

Si mantenemos el valor de “ n ” y el valor de pr y aumentamos el valor del nivel de confianza

en la fórmula del error de estimación $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$ observamos que se mantiene

constante $\sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$ pero aumenta $z_{\alpha/2}$ por lo que **aumenta** el error de estimación.

Manteniendo el tamaño de la muestra y la proporción muestral, si se aumenta el nivel de confianza, aumenta el error máximo de estimación