



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2025

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

2.- (10 puntos) La función $B(x) = \begin{cases} 2x(32-4x) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x+180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x , al que vende su producto.

a.- (4 puntos) Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- (6 puntos) Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

3.- (10 puntos) En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- (4 puntos) Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

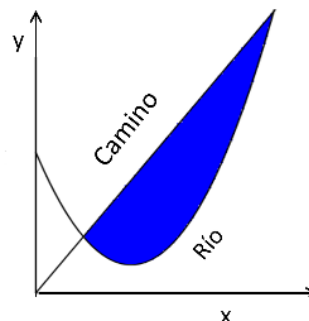
b.- (6 puntos) Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos) Una finca está delimitada por un río cuyo curso puede describirse mediante la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ y por un camino que tiene como dirección la ecuación $y = 2x$ (véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto el eje x como el eje y se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000 €, calcule el precio de la finca.



Nota: $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hectáreas}$.

Opción II

Q1.- (5 puntos) Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- (5 puntos) Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

a.- Llamamos x = número de hectáreas sembradas de maíz, y = número de hectáreas sembradas de trigo.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Fertilizante	Beneficio
Hectáreas maíz (x)	$200x$	$800x$
Hectáreas trigo (y)	$300y$	$500y$
TOTALES	$200x + 300y$	$800x + 500y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 800x + 500y$

Las restricciones son:

“La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg” $\rightarrow 200x + 300y \leq 6000$.

“El agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo” $\rightarrow x + y \geq 10$

“La superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo” $\rightarrow x \leq y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 300y \leq 6000 \\ x + y \geq 10 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \geq 10 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$2x + 3y = 60$$

$$x + y = 10$$

$$x = y$$

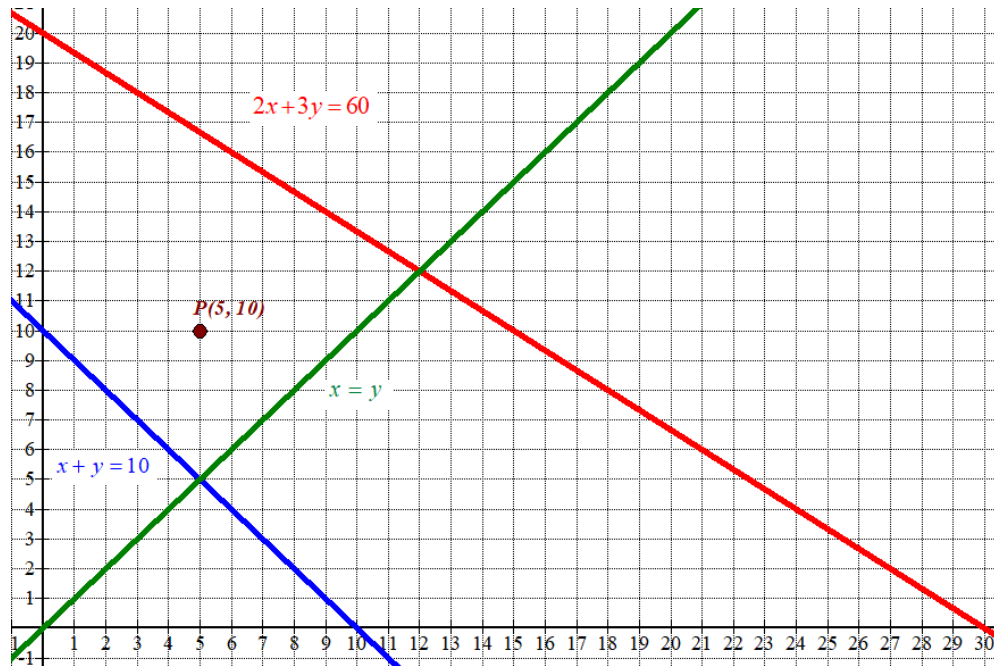
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{60 - 2x}{3}$
0	20
12	12
30	0

x	$y = 10 - x$
0	10
5	5
10	0

x	$y = x$
5	5
12	12

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

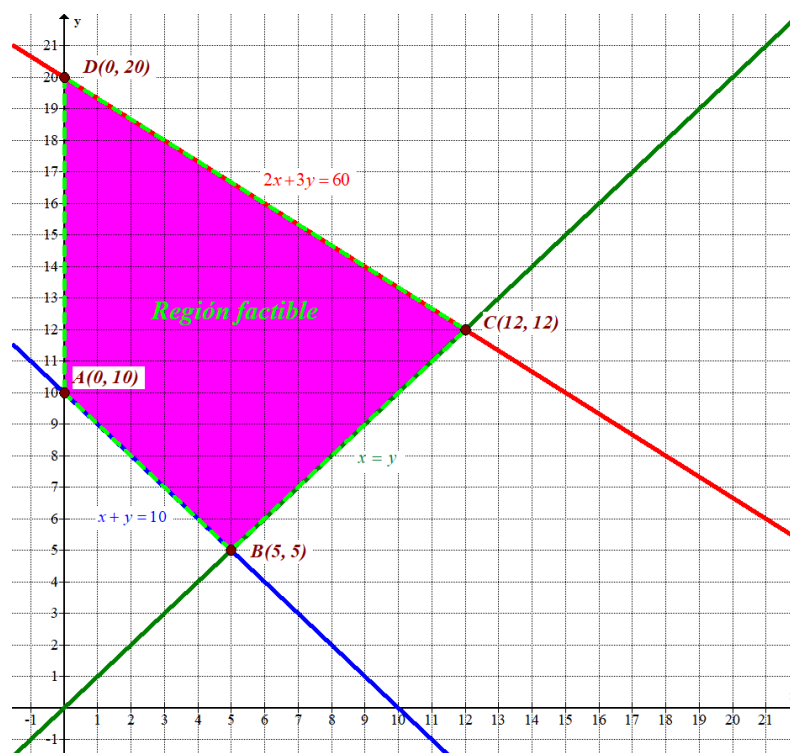
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \geq 10 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por encima de las rectas verde y azul, y por debajo de la recta roja.

Comprobamos que el punto $P(5, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 \leq 60 \\ 5 + 10 \geq 10 \\ 5 \leq 10 \\ 5 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 800x + 500y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 800 \cdot 0 + 500 \cdot 10 = 5000$$

$$B(5, 5) \rightarrow B(5, 5) = 800 \cdot 5 + 500 \cdot 5 = 6500$$

$$C(12, 12) \rightarrow B(12, 12) = 800 \cdot 12 + 500 \cdot 12 = 15600 \text{ Máximo}$$

$$D(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 800 \cdot 0 + 500 \cdot 20 = 10000$$

El valor máximo es 15600 y se obtiene en el vértice C(12, 12).

Plantando 12 hectáreas de trigo y otras 12 de maíz se cumplen las restricciones y se obtienen unos beneficios máximos de 15600 €.

b.- La nueva función que nos da los beneficios es $B(x, y) = 800x + 1200y$. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 800 \cdot 0 + 1200 \cdot 10 = 12000$$

$$B(5, 5) \rightarrow B(5, 5) = 800 \cdot 5 + 1200 \cdot 5 = 10000$$

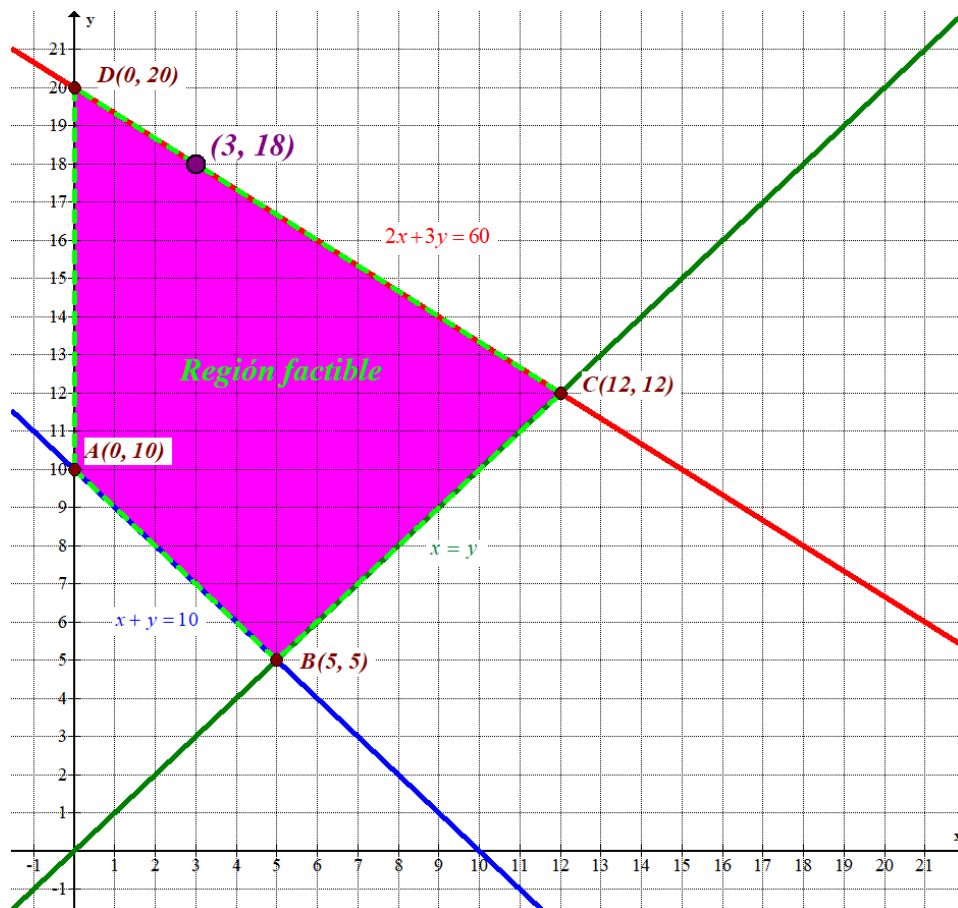
$$C(12, 12) \rightarrow B(12, 12) = 800 \cdot 12 + 1200 \cdot 12 = 24000 \text{ Máximo}$$

$$D(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 800 \cdot 0 + 1200 \cdot 20 = 24000 \text{ Máximo}$$

El valor máximo es 24000 y se obtiene en los vértices C(12, 12) y D(0, 20).

El valor máximo del beneficio se consigue en todos los puntos del segmento CD.

El punto (3, 18) pertenece al segmento CD por lo que (3, 18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.



2.- (10 puntos) La función $B(x) = \begin{cases} 2x(32-4x) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x+180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x , al que vende su producto.

a.- (4 puntos) Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- (6 puntos) Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

a.- La función es continua en $[0,3) \cup (3,9]$ pues tiene una expresión polinómica.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} B(3) &= 2x(32-4x) = 6 \cdot 20 = 120 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x(32-4x) = 120 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -20x + 180 = -60 + 180 = 120 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) = B(3) = 120$$

La función es continua en $x = 3$. La función es continua en $[0,9]$.

b.- Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$B(x) = \begin{cases} 64x - 8x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x + 180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow B'(x) = \begin{cases} 64 - 16x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -20 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 64 - 16x = 0 \rightarrow 16x = 64 \rightarrow x = 4 \notin [0,3) \\ -20 = 0 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

La función no tiene ningún punto crítico.

La derivada es positiva en el intervalo $[0,3)$ y negativa en $(3,9]$. La función crece en $[0,3)$ y decrece en $(3,9]$.

Valoramos la función en el cambio de definición y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\rightarrow B(0) = 2 \cdot 0(32 - 0) = 0 \\ x = 3 &\rightarrow B(3) = 120 \\ x = 9 &\rightarrow B(9) = -20 \cdot 9 + 180 = 0 \end{aligned} \right\}$$

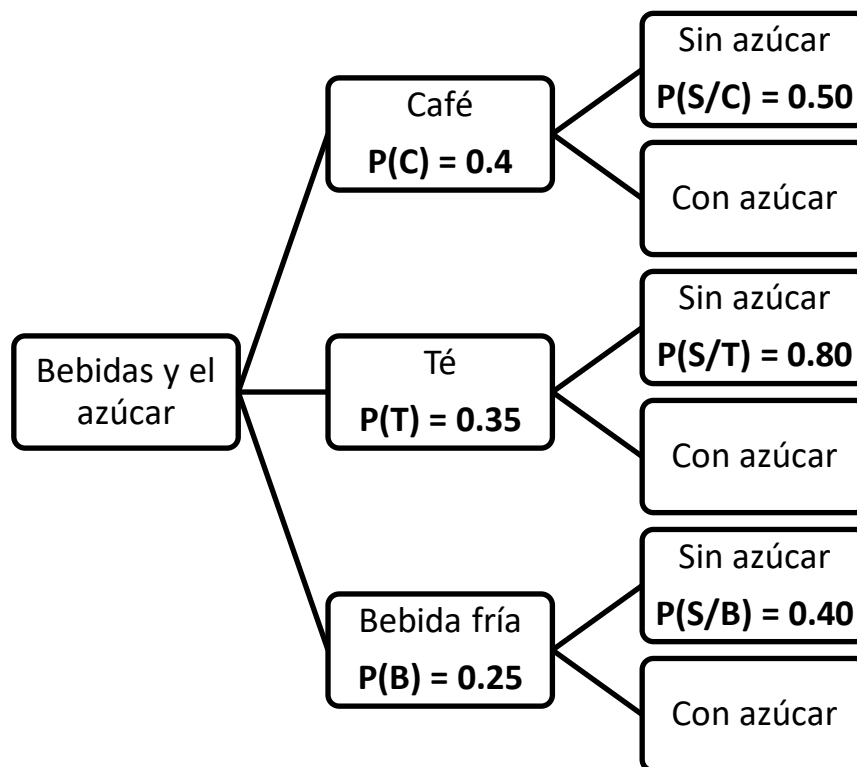
El mayor beneficio es de 120 000 € que se obtienen para $x = 3$. El precio unitario necesario para conseguir un beneficio máximo es de 3 €.

3.- (10 puntos) En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- (4 puntos) Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

b.- (6 puntos) Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Debemos calcular $P(B \cap S)$.

$$P(B \cap S) = P(B)P(S/B) = 0.25 \cdot 0.4 = \boxed{0.1}$$

b.- Nos piden calcular $P(B/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(B/S) &= \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B)P(S/B)}{P(C)P(C/S) + P(T)P(S/T) + P(B)P(S/B)} = \\
 &= \frac{0.1}{0.4 \cdot 0.5 + 0.35 \cdot 0.8 + 0.1} = \boxed{\frac{5}{29} \approx 0.1724}
 \end{aligned}$$

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

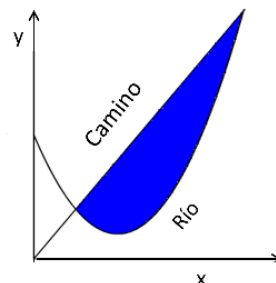
Q1.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la

ecuación matricial despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos) Una finca está delimitada por un río cuyo curso puede describirse mediante la ecuación $y = (x-2)^2 + 1$ y por un camino que tiene como dirección la ecuación $y = 2x$

(véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto el eje x como el eje y se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000 €, calcule el precio de la finca.

Nota: $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hectáreas}$.



Q1.- Nos planteamos cuando es posible el producto AX , siendo X una matriz de dimensiones $m \times n$ y A una matriz de orden 2×2 .

$$A \cdot X$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para que sea posible el producto debe ser $m = 2$, obteniéndose como resultado una matriz de dimensiones $2 \times n$.

Para que sea posible la resta $3AX - B$ las matrices $3AX$ y B tienen que ser de las mismas dimensiones. Como B es de dimensiones 2×3 debe ser $n = 3$.

La matriz X debe ser de dimensiones 2×3 .

Resolvemos la ecuación matricial planteada.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3AX - B = C \Rightarrow 3AX = B + C \Rightarrow AX = \frac{1}{3}(B + C) \Rightarrow X = \frac{1}{3}A^{-1}(B + C)$$

Hallamos la inversa de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la matriz X .

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}A^{-1}(B + C) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3-9 & 9-9 & 3+3 \\ -3+18 & -9+18 & -3-6 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 15 & 9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Q2.- Hallamos los puntos de corte de las gráficas del río y el camino.

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-2)^2 + 1 = x^2 + 4 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = \boxed{5=x} \\ \frac{6-4}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Calculamos la superficie de la finca.

$$\begin{aligned} \int_1^5 2x - (x^2 - 4x + 5) dx &= \int_1^5 -x^2 + 6x - 5 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \\ &= \left[-\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \right] = -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.6667} \end{aligned}$$

La superficie de la finca es de $\frac{32}{3} \approx 10.6667$ km². La finca tiene $\frac{3200}{3} \approx 1066.67$ hectáreas.

El coste de la finca es de $\frac{3200}{3} \cdot 3000 = 3200000$ euros.

Opción II

Q1.- (5 puntos) Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- (5 puntos) Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

Q1.- Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{6}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

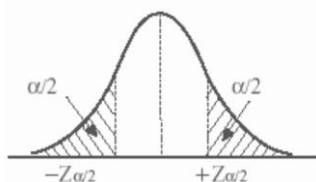
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

Q2.- La proporción de aragoneses interesados en participar como voluntarios es $p = 0.25$ y de aquí obtenemos $q = 1 - 0.25 = 0.75$.

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9644	0,9651	0,9658	0,9664	0,9671	0,9678	0,9685	0,9691	0,9699

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.88} = \sqrt{\frac{0.1875}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.88} \right)^2 = \frac{0.1875}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1875}{\left(\frac{0.05}{1.88} \right)^2} = 265.08
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 266 aragoneses.