



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. Dada la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$:

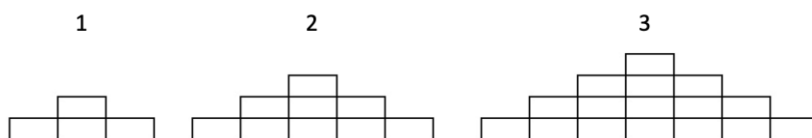
- Encuentra la primitiva F de f para la que $F(1) = 2$. **(0.5 puntos)**
- ¿Qué valor toma f en $x = 0$? Estudia la monotonía de f en $x = 0$. Determina un intervalo del dominio en el que f tome valores tanto positivos como negativos. ¿A partir de qué valor f decrece indefinidamente? Calcula el área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$. **(2 puntos)**

Pregunta 1. Opción B.

Una empresa vende 5000 kg de su producto cuando el precio por kg es de 500 euros. Si el precio aumenta y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida disminuye en $10(x - 500)$ kg. Si el precio baja y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida aumenta en $10(500 - x)$ kg.

- Determina la expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x). **(1 punto)**
- ¿Cuál debe ser el precio por kg del producto para que las ventas sean máximas? ¿Qué valor tendrían, en ese caso, las ventas? ¿Qué rango de valores del precio por kg del producto tiene sentido, es decir, da lugar a ventas positivas? **(1.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.

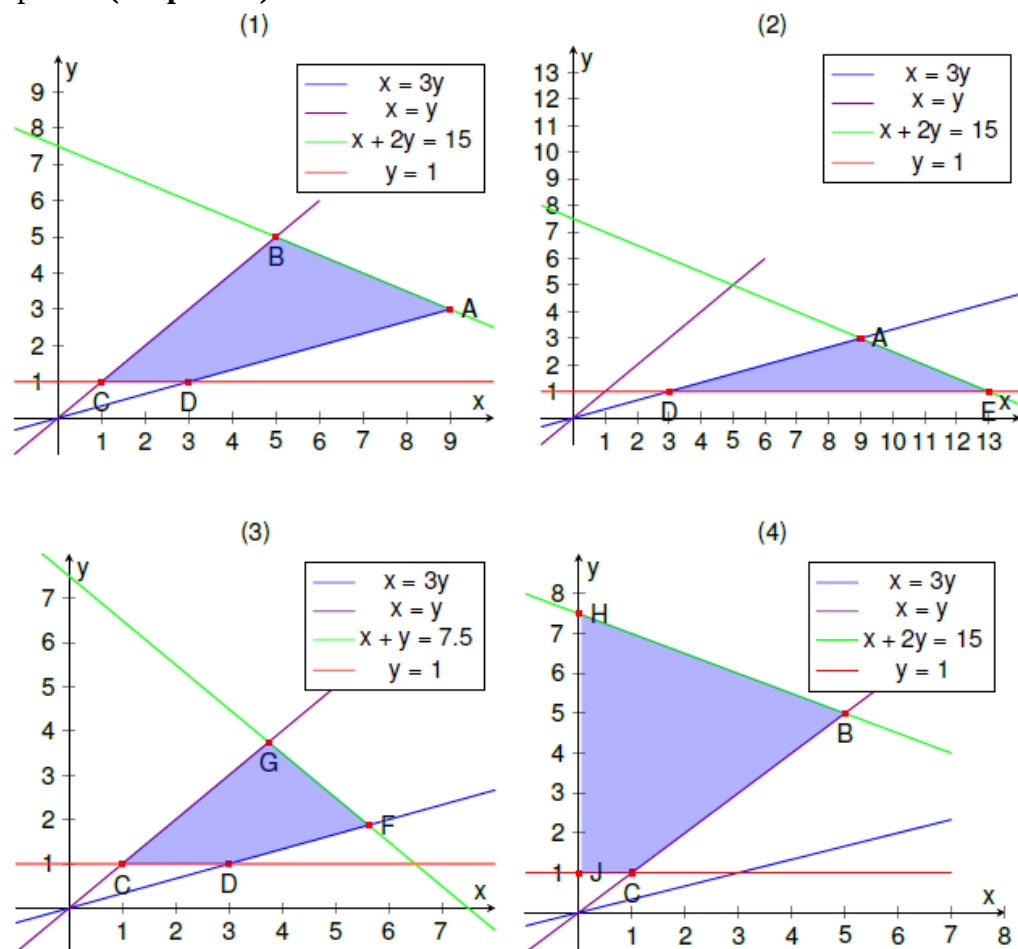


- Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: “con n represento el número de figura”). **(2 puntos)**
- Encuentra un número “ x ” mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente “ x ” rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

- ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**
- Si llamamos “ x ” al número de sesiones de tipo A e “ y ” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las

posibles soluciones a la pregunta ¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta? **(1.5 puntos)**



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y :

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1,5 puntos)**

b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Si $A \cdot B \cdot C + D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**

b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción A. El 70% de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local. El resto, del equipo visitante. Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30% de los aficionados del equipo local y el 60% de los aficionados del equipo visitante compraron su entrada por internet.

- Elegido un asistente al partido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comprase su entrada por internet? **(1.5 puntos)**
- Elegido al azar un asistente entre los que compraron su entrada en taquilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea del equipo visitante? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3% del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30% de todos los bolsos fabricados eran de tipo A, el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3% de los de tipo A y el 5% de los de tipo C salieron defectuosos.

- Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.5 puntos)**
- Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿es más probable que sea de tipo A o de tipo B? **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción A.* El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con desviación típica 2.7 g.

- ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**
(1) (147.971, 149.029)
(2) (147.871, 149.129)
(3) (149, 371, 150, 629)
(4) (148.057, 148.943)

Pregunta 5. Opción B. * Un banco quiere estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet.

- Determina el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 99 %. **(1 punto)**
- A partir de una muestra aleatoria de 600 clientes se construyó un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet. El intervalo resultante fue (0.395, 0.475). ¿Cuántos clientes, de los 600 de la muestra, realizaron todas sus gestiones por internet? **(1 punto)**
- Según el intervalo de confianza del apartado anterior, ¿tiene sentido pensar que la verdadera proporción de clientes en la población que realizan todas sus gestiones por internet sea 0.5? Responde intentando medir o estimar de alguna forma cuánto te fías de tu razonamiento. **(0.5 puntos)**

* Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n :

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

En ambas expresiones, $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Dada la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$:

- a) Encuentra la primitiva F de f para la que $F(1) = 2$. **(0.5 puntos)**
 b) ¿Qué valor toma f en $x = 0$? Estudia la monotonía de f en $x = 0$. Determina un intervalo del dominio en el que f tome valores tanto positivos como negativos. ¿A partir de qué valor f decrece indefinidamente? Calcula el área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$. **(2 puntos)**

a) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -x^3 - x^2 + 2x dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + K$$

Utilizamos que $F(1) = 2$ para obtener el valor de K .

$$F(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + K \quad \left. \begin{array}{l} F(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = -\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 + K \Rightarrow 2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 = -3 - 4 + 12 + 12K \Rightarrow 12K = 19 \Rightarrow K = \frac{19}{12} \Rightarrow F(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{19}{12}$$

La primitiva buscada es $F(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{19}{12}$.

b) En $x = 0$ la función vale $f(0) = -0^3 - 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$.

Calculamos la derivada de la función y su valor en $x = 0$.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(0) = -3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$$

Como $f'(0) = 2 > 0$ la función crece en $x = 0$.

La función vale 0 para $x = 0$ y en este valor crece. Considerando el intervalo $(-1, 1)$ que contiene $x = 0$ podemos asegurar que en este intervalo la función toma valores negativos (antes de 0) y valores positivos (después de 0).

Estudiamos la monotonía de la función en su dominio $\mathbb{R}$.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3) \cdot 2}}{2(-3)} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{-3} = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{7}}{-3} \approx 0.55 \\ \frac{1 + \sqrt{7}}{-3} \approx -1.22 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1+\sqrt{7}}{-3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = -3(-2)^2 - 2(-2) + 2 = -6 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, \frac{1+\sqrt{7}}{-3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{-3}, \frac{1-\sqrt{7}}{-3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{1+\sqrt{7}}{-3}, \frac{1-\sqrt{7}}{-3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{-3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = -3 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1-\sqrt{7}}{-3}, +\infty\right).$$

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\infty, \frac{1+\sqrt{7}}{-3}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{7}}{-3}, +\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{-3}, \frac{1-\sqrt{7}}{-3}\right)$.

La función decrece indefinidamente a partir de $\frac{1-\sqrt{7}}{-3}$.

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 2x = -x(x^2 + x - 2) = \dots$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\dots = -x(x-1)(x+2)$$

La función corta el eje X en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

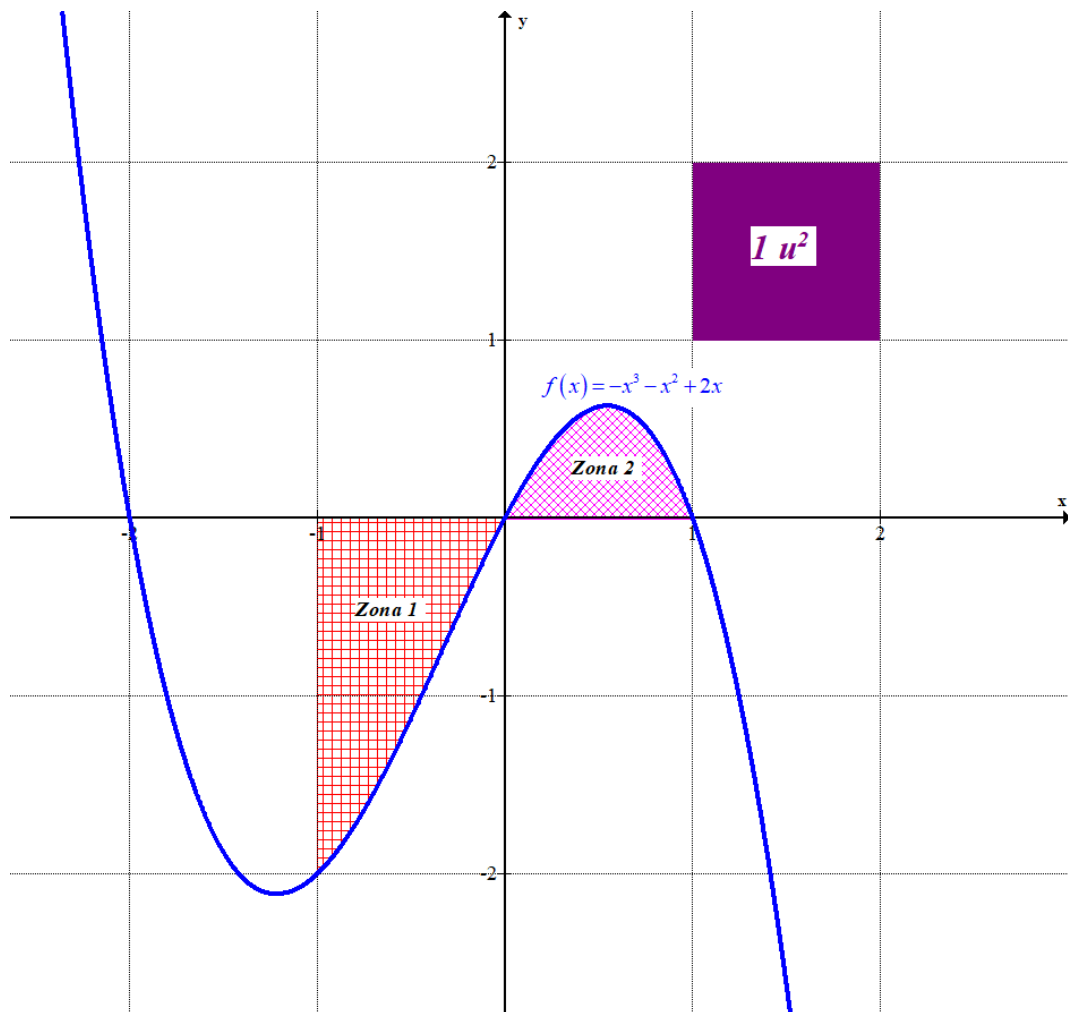
El recinto limitado por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ lo dividimos en dos partes para calcular el área. Como la función es negativa antes de $x = 0$ y positiva después, el área pedida será el valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 más la integral definida de la función entre 0 y 1 .

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 -x^3 - x^2 + 2x dx \right| + \int_0^1 -x^3 - x^2 + 2x dx = \left| \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{-0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2 \right] - \left[\frac{-(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right] + \left[\frac{-1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 \right] - \left[\frac{-0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2 \right] =$$

$$= \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 \right| - \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right| = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3}{2} = 1.5 u^2$$

El área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ vale 1.5 unidades cuadradas.



Pregunta 1. Opción B.

Una empresa vende 5000 kg de su producto cuando el precio por kg es de 500 euros. Si el precio aumenta y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida disminuye en $10(x - 500)$ kg. Si el precio baja y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida aumenta en $10(500 - x)$ kg.

- a) Determina la expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x). **(1 punto)**
- b) ¿Cuál debe ser el precio por kg del producto para que las ventas sean máximas? ¿Qué valor tendrían, en ese caso, las ventas? ¿Qué rango de valores del precio por kg del producto tiene sentido, es decir, da lugar a ventas positivas? **(1.5 puntos)**

- a) Con un precio de 500 €/kg se venden 5000 kg.

Con un precio de $x > 500$ €/kg se venden

$$5000 - 10(x - 500) = 5000 - 10x + 5000 = 10000 - 10x \text{ kg.}$$

Con un precio de $x < 500$ €/kg se venden

$$5000 + 10(500 - x) = 5000 + 5000 - 10x = 10000 - 10x \text{ kg.}$$

Los kilogramos vendidos en función del precio (x) son $10000 - 10x$ kg.

La expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x) es $f(x) = x(10000 - 10x) = 10000x - 10x^2$.

- b) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 10000x - 10x^2 \Rightarrow f'(x) = 10000 - 20x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 10000 - 20x = 0 \Rightarrow 20x = 10000 \Rightarrow x = \frac{10000}{20} = 500$$

Sustituimos $x = 500$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = 10000 - 20x \Rightarrow f''(x) = -20 \Rightarrow f''(500) = -20 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 500$

Las ventas son máximas para un precio de 500 €/kg.

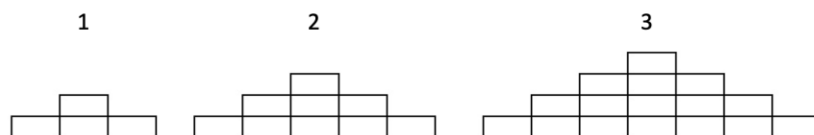
Como $f(500) = 10000 \cdot 500 - 10 \cdot 500^2 = 2500000$, el importe de las ventas máximas es de 2 millones y medio de euros.

Averiguamos cuando $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(10000 - 10x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 10000 - 10x = 0 \Rightarrow x = 1000 \end{cases}$$

Tiene sentido un precio entre 0 y 1000 €/kg, que es el intervalo donde las ventas dan valores positivos o cero.

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.



- a) Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: “con n represento el número de figura”). **(2 puntos)**
- b) Encuentra un número “ x ” mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente “ x ” rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

- a) Denominamos “ n ” al número de figura y “ r_n ” al número de rectángulos en la figura “ n ”. Indicamos en cada figura cuantos rectángulos aparecen.

$$n = 1 \rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2 = (1+1)^2$$

$$n = 2 \rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 = (2+1)^2$$

$$n = 3 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = (3+1)^2$$

Siguiendo esta pauta en la figura 13 habrán $(13+1)^2 = 196$ rectángulos.

Siguiendo esta pauta en la figura “ n ” habrán $r_n = (n+1)^2$ rectángulos.

Lo comprobamos para $n = 4$.

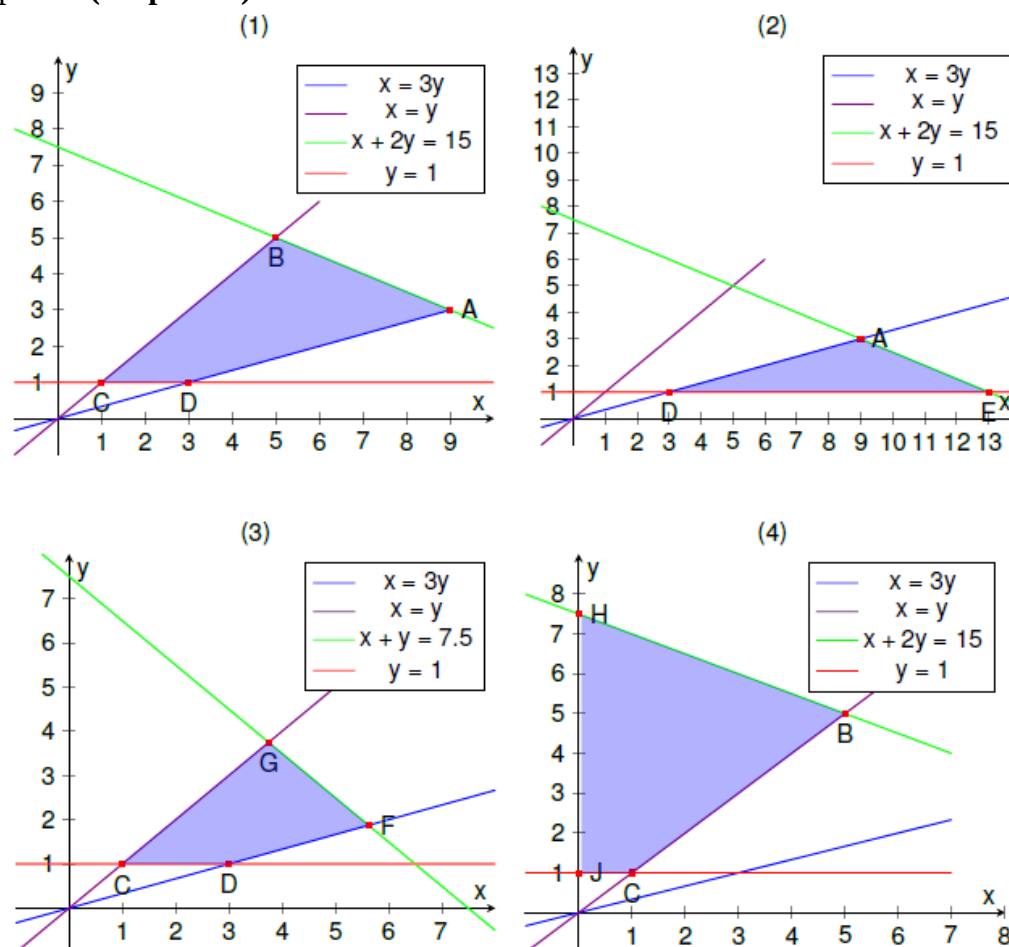
$$n = 4 \rightarrow \begin{cases} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \\ (4+1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

- b) En la figura 13 hay 196 rectángulos. Probamos con la figura 19 donde hay $(19+1)^2 = 20^2 = 400$ rectángulos. Esta figura nos sirve, pero también valdría la figura 18 que tiene $(18+1)^2 = 19^2 = 361$ rectángulos. O la figura 17 que tiene $(17+1)^2 = 18^2 = 324$ rectángulos.

Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

a) ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**

b) Si llamamos “x” al número de sesiones de tipo A e “y” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles soluciones a la pregunta ¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta? **(1.5 puntos)**



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

a) Con 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B necesitaría $8 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 540$ minutos = 9 horas. Como solo dedica 7 horas y media a estas sesiones no sería posible lo planteado.

b) Llamamos “x” al número de sesiones de tipo A e “y” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta. Obtenemos las restricciones del problema.

“Dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos (0.5 h), y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos (1 h). En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes” $\rightarrow 0.5x + y \leq 7.5 \rightarrow x + 2y \leq 15$.

“Al menos una sesión al día siempre es de tipo B” $\rightarrow y \geq 1$.

“Quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B” $\rightarrow x \geq y; x \leq 3y$

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

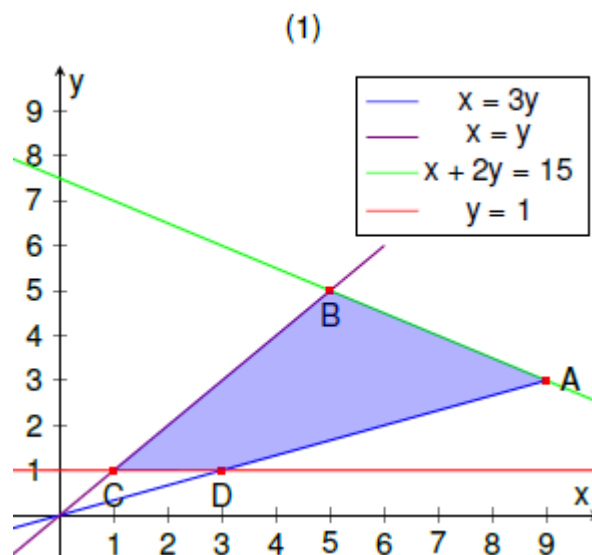
Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 15 \\ y \geq 1 \\ y \leq x \\ x \leq 3y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema de inecuaciones no se corresponde con la gráfica (3) pues la recta $x + y = 7.5$ no se corresponde con ninguna restricción.

La región factible debe estar entre las rectas $y = x$ e $x = 3y$, por lo que no puede ser ni la (2) ni la (4).

La región factible se corresponde con la gráfica (1).



Los vértices de la región factible son A(9,3), B(5,5), C(1,1) y D(3, 1).

- c) Si llamamos p al precio de las sesiones de tipo A, entonces el precio de las de tipo B es $3p$, así la función a maximizar son los beneficios que vienen expresados como $B(x, y) = px + 3py$. Queremos maximizar la función objetivo sujeta a las restricciones anteriores. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(9,3) \rightarrow B(9,3) = 9p + 9p = 18p$$

$$B(5,5) \rightarrow B(5,5) = 5p + 15p = 20p \quad \text{¡Máximo!}$$

$$C(1,1) \rightarrow B(1,1) = p + 3p = 4p$$

$$D(3, 1) \rightarrow B(3,1) = 3p + 3p = 6p$$

El beneficio máximo se alcanza si en el día planea 5 sesiones de tipo A y 5 de tipo B.

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y :

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1,5 puntos)**

b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

a) Intentamos resolver el sistema.

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases} \Rightarrow 10(y - m) + (10 + m)y = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y - 10m + 10y + my = 150 \Rightarrow (20 + m)y = 150 + 10m \Rightarrow \{ \text{Si } 20 + m \neq 0 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{150 + 10m}{20 + m} \Rightarrow x = \frac{150 + 10m}{20 + m} - m = \frac{150 + 10m - 20m - m^2}{20 + m} = \frac{150 - 10m - m^2}{20 + m}$$

Para cualquier valor de m distinto de -20 tenemos que $m + 20 \neq 0$ y el sistema se puede resolver teniendo una única solución: $x = \frac{150 - 10m - m^2}{20 + m}$, $y = \frac{150 + 10m}{20 + m}$.

b) Para que el sistema tenga infinitas soluciones las dos ecuaciones deben ser proporcionales.

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 10y = -10\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

Si tomamos $\lambda = -15$ y $m = -20$ las dos ecuaciones son proporcionales.

$$\left. \begin{cases} 10x - 10y = -10\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \\ \lambda = -15 \\ m = -20 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 10y = -10(-15) \\ 10x + (10 - 20)y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 10y = 150 \\ 10x - 10y = 150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x - 10y = 150 \Rightarrow x - y = 15 \Rightarrow \boxed{x = y + 15}$$

Las infinitas soluciones tienen la expresión $x = y + 15$. Si tomamos $y = 0$ tenemos que $x = 0 + 15 = 15$. Una de las soluciones es $x = 15$ e $y = 0$.

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Si $A \cdot B \cdot C + D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**

b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

a) Obtenemos el sistema.

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C + D = E &\Rightarrow \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3m & m+3-3m \\ 2m & 2m+2-2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\begin{cases} 3mx + (3-2m)y = m \\ 2mx + 2y = 1 \end{cases}} \end{aligned}$$

El sistema que se obtiene de la ecuación matricial es $\left. \begin{matrix} 3mx + (3-2m)y = m \\ 2mx + 2y = 1 \end{matrix} \right\}$.

b) El sistema tiene la matriz de coeficientes $Co = \begin{pmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$Am = \begin{pmatrix} 3m & 3-2m & m \\ 2m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Para que el sistema no tenga solución estas matrices deben tener distintos rangos, es decir, la matriz de coeficientes debe tener rango 1 (determinante nulo) y la matriz ampliada debe tener rango 2.

$$|Co| = \begin{vmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6m - 6m + 4m^2 = 0 \Rightarrow 4m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Comprobamos que para $m=0$ el rango de la matriz ampliada es 2.

Para $m=0$ la matriz ampliada queda $Am = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2

que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

El rango de la matriz ampliada es 2 y el rango de la matriz de coeficientes es menor de 2. Rangos distintos implica que el sistema no tiene solución.

Para $m=0$ el sistema queda $\left. \begin{matrix} 3y = 0 \\ 2y = 1 \end{matrix} \right\}$ y no tiene solución.

Pregunta 4. Opción A. El 70% de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local. El resto, del equipo visitante. Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30% de los aficionados del equipo local y el 60% de los aficionados del equipo visitante compraron su entrada por internet.

- a) Elegido un asistente al partido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comprase su entrada por internet? **(1.5 puntos)**
- b) Elegido al azar un asistente entre los que compraron su entrada en taquilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea del equipo visitante? **(1 punto)**

Pasamos los datos porcentuales a datos absolutos.

Supongamos que hay 1000 asistentes a un partido de fútbol. El 70% de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local ($0.70 \cdot 1000 = 700$). El resto, del equipo visitante ($1000 - 700 = 300$).

Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30% de los aficionados del equipo local ($0.30 \cdot 700 = 210$) y el 60% de los aficionados del equipo visitante ($0.60 \cdot 300 = 180$) compraron su entrada por internet.

Colocamos estos datos en una tabla.

	Internet	Taquilla	
Aficionado local	210		700
Aficionado visitante	180		300
			1000

Completamos la tabla.

	Internet	Taquilla	
Aficionado local	210	490	700
Aficionado visitante	180	120	300
	390	610	1000

- a) De los 1000 asistentes al partido 390 compraron su entrada por internet. La probabilidad de que al elegir un asistente al azar este haya comprado su entrada por internet vale $\frac{390}{1000} = 0.39$.

- b) En taquilla compraron la entrada 610 personas y 120 eran del equipo visitante. La probabilidad de que al elegir al azar una persona que ha comprado la entrada en taquilla esta sea aficionada del equipo visitante vale $\frac{120}{610} \approx 0.1967$.

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3% del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30% de todos los bolsos fabricados eran de tipo A, el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3% de los de tipo A y el 5% de los de tipo C salieron defectuosos.

- a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.5 puntos)**
 b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿es más probable que sea de tipo A o de tipo B? **(1 punto)**

Llamamos A, B y C a los sucesos “elegir un bolso tipo A, B o C respectivamente” y D a “el bolso es defectuoso”.

Sabemos que $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.35$, $P(C) = 1 - 0.3 - 0.35 = 0.35$, también sabemos que $P(D) = 0.03$, $P(D/A) = 0.03$ y $P(D/C) = 0.05$.

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.03 = 0.3 \cdot 0.03 + 0.35 \cdot P(D/B) + 0.35 \cdot 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.03 - 0.009 - 0.0175 = 0.35 \cdot P(D/B) \Rightarrow P(D/B) = \frac{0.0035}{0.35} = 0.01$$

La probabilidad de que un bolso del tipo B sea defectuoso es de 0.01.

- b) Calculamos $P(A/D)$, $P(B/D)$ y los comparamos.

$$\left. \begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.03} = 0.3 \\ P(B/D) &= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.01}{0.03} = \frac{7}{60} \approx 0.1167 \end{aligned} \right\}$$

Hemos visto que $P(A/D) = 0.3 > 0.1167 = P(B/D)$. Es más probable que el bolso defectuoso sea del tipo A.

Pregunta 5. Opción A.* El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con desviación típica 2.7 g.

- a) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- b) Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**
- (1) (147.971, 149.029)
 (2) (147.871, 149.129)
 (3) (149, 371, 150, 629)
 (4) (148.057, 148.943)

Sea X = El peso en gramos de los yogures de cierta marca. $X = N(\mu, 2.7)$.

- a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.96 \cdot \frac{2.7}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = \frac{5.292}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5.292}{0.5} = 10.584 \Rightarrow \boxed{n = 10.584^2 = 112.02}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 113 yogures.

- b) El intervalo (3) no es válido pues la media muestral ($\bar{x} = 148.5$ gramos) no pertenece al intervalo (149, 371, 150, 629).
 El intervalo (1) tiene la amplitud $149.029 - 147.971 = 1.058$.
 El intervalo (2) tiene la amplitud $149.129 - 147.871 = 1.258$.
 El intervalo (4) tiene la amplitud $148.943 - 148.057 = 0.886$.

La mayor amplitud la tiene el intervalo (2) que se corresponde con mayor nivel de confianza. Obtenemos el valor de este nivel de confianza.

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{1.258}{2} = 0.629$$

Utilizamos la fórmula del error para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.629 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2.7}{\sqrt{100}} \Rightarrow 0.629 = 0.27 z_{\alpha/2} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.629}{0.27} \approx 2.33$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; **$F(2,33) = 0,99$** y $F(2,58) = 0,995$.

$$\text{Tenemos que } 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.98}.$$

El nivel de confianza del intervalo (147.871, 149.129) es del 98%.

Pregunta 5. Opción B. * Un banco quiere estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet.

- Determina el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 99 %. **(1 punto)**
- A partir de una muestra aleatoria de 600 clientes se construyó un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet. El intervalo resultante fue (0.395, 0.475). ¿Cuántos clientes, de los 600 de la muestra, realizaron todas sus gestiones por internet? **(1 punto)**
- Según el intervalo de confianza del apartado anterior, ¿tiene sentido pensar que la verdadera proporción de clientes en la población que realizan todas sus gestiones por internet sea 0.5? Responde intentando medir o estimar de alguna forma cuánto te fías de tu razonamiento. **(0.5 puntos)**

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0.90$; $F(1,64) = 0.95$; $F(1,96) = 0.975$; $F(2,33) = 0.99$ y

$F(2,58) = 0.995$.

Al no tener una proporción muestral se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es $p = 0.5$.

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{2.58} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{2.58}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{2.58}\right)^2} = 665.64 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo es de 666 clientes.

b) Tamaño de la muestra $n = 600$ clientes.

La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.395 + 0.475}{2} = 0.435$$

De los 600 clientes los que hicieron todas sus gestiones por internet en dicha muestra fueron $0.435 \cdot 600 = 261$ clientes.

- c) No tiene sentido pues la proporción de 0.5 no pertenece al intervalo de confianza (0.395, 0.475) obtenido con un nivel de confianza del 95%. Es posible que sea esa la verdadera proporción (5% de posibilidades), pero es mucho más probable que no lo sea (95% de posibilidades).