

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de realitzar expressant de forma raonada el procés seguit per resoldre-les, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. Es valorarà el grau d'acompliment amb un màxim de 0,25 punts cada exercici.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tindran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que puguin veure's afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent.
- Els errors en les operacions aritmètiques elementals es penalitzaran amb un màxim de 0,25 punts en cada pregunta o tasca
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corregiu-ne els que apareixen primer.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.



No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. Contestau el problema A1, i contestau també un problema a escollir entre el problema A2 i el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatori). — Donats dos esdeveniments, A i B , d'un experiment aleatori, sabem que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, i que $P(A | B) = x$, on $x \in [0, 1]$. Es demana:

- a) Existeix algun valor de x per al qual els esdeveniments siguin independents?

Criteris: 0.5 pts per indicar el valor, 0.5 pts per justificar-ho.

(Total 1 pt)

Solució. Sí: els esdeveniments són independents quan $P(A | B) = P(A)$, és a dir, per a $x = 0.5$.

- b) Per a quin valor de x es té que la probabilitat de $A \cap B$ és màxima?

Criteris: 0.5 pts per trobar el valor, 0.5 pts per justificar-ho.

(Total 1 pt)

Solució. $P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B) = 0.1 \cdot x$, així que aquesta probabilitat és major quan més gran és x . Per a $x = 1$, el valor més gran per a x , aleshores $P(A \cap B)$ assoleix el seu valor més gran, de 0.1.

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa d'aquestes dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants a Espanya per nacionalitat i sexe:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

- a) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica “lei de Laplace” o casos favorables/casos totals. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. Sigui E l'esdeveniment “l'habitant és estranger”. Per la llei de Laplace,

$$P(E) = \frac{\# \text{ Casos favorables}}{\# \text{ Casos totals}} = \frac{3 + 3.3}{20.6 + 3 + 21.2 + 3.3} = 0.131.$$

- b) Escollint dos habitants a l'atzar de manera independent, quina és la probabilitat que almenys un sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica els successos. Penalització amb -0.25 pts si no justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. Siguin E_1 , E_2 els esdeveniments corresponents als fets que la primera i la segona elecció, respectivament, siguin d'habitants estrangers. Aleshores,

$$P(E_1 \cup E_2) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c) = 1 - (1 - 0.131)^2 = 0.245.$$

Problema A3. — Suposem que, quan un client entra en una botiga d'electrodomèstics, el temps que hi passa dedins ve donat per una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional $\mu = 15$ minuts i desviació típica $\sigma = 10$ minuts: $X \sim \mathcal{N}(15, 10)$.

- a) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga 25 minuts o menys?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solució. Sigui $Z = (X - 15)/10$, que segueix una distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$. Aleshores,

$$P(X \leq 25) = P\left(Z \leq \frac{25 - 15}{10}\right) = P(Z \leq 1) = 0.8413.$$

- b) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga entre 5 i 25 minuts?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solució. De manera similar a l'apartat anterior,

$$P(X \leq 5) = P\left(Z \leq \frac{5 - 15}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0.1587.$$

Per tant,

$$P(5 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 5) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826.$$

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — En una fàbrica tèxtil fabricam vestits, samarretes i faldes.

- Cada vestit requereix 5 m² de teixit i 5 botons.
- Cada samarreta requereix 4 m² de teixit i 3 botons.
- Cada falda requereix 4 m² de teixit i cap botó.

- a) Si volem fabricar 10 vestits, 15 samarretes i 20 faldes, quants m² de teixit i quants botons necessitam?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per no justificar els càlculs. Penalització amb -0.25 pts per no interpretar el resultat. **(Total 0.5 pt)**

Solució. Podem representar la informació donada en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 95 \end{pmatrix}.$$

És a dir, necessitem 190 m² de teixit i 95 botons.

- b) Resol el sistema d'equacions següent:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si només troben una solució particular. **(Total 1.5 pt)**

Solució. Ho podem fer matricialment o amb les equacions lineals que el sistema representa:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x+4y+4z=100 \\ 5x+3y=120 \end{cases} &\implies \begin{cases} 5x+4y=100-4z \\ 5x+3y=120 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x+4y=100-4z \\ y=-20-4z \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 5x=180+12z \\ y=-20-4z \end{cases} \end{aligned}$$

És a dir, admet infinites solucions, totes elles de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (180+12z)/5 \\ -20-4z \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{per a } z \in \mathbb{R}.$$



- c) Si disposam de 100 m^2 de teixit i 120 botons, podem utilitzar completament els recursos fabricant productes? **(Total 1 pt)**

Solució. D'acord amb la solució de l'apartat anterior: no, ja que qualsevol solució del sistema d'equacions implica que si z és zero o positiva, aleshores y és negativa, i per tant no és una solució realitzable.

Problema B2. — Considera les matrius quadrades A , B , M , i N de mida 3×3 .

a) Calcula tots els valors de x tals que $A^2 = A$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.5 pts si no comprova que el valor de x calculat també satisfà totes les condicions necessàries. **(Total 1 pt)**

Solució. En la multiplicació $A \cdot A$, ens podem fixar en la tercera filera per la segona columna:

$$\begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \implies -6 \cdot x + 2 \cdot x + (-3) \cdot 2 = 2 \implies x = -2.$$

És a dir, si existeix algun valor, l'única possibilitat és $x = -2$. Fent el càlcul, observam que aquest és un valor vàlid:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Troba una matriu B invertible, tal que $B^2 = B$.

Criteris: No s'ha de penalitzar si no es dedueix a partir de l'expressió matricial. **(Total 1 pt)**

Solució. Si B és invertible, aleshores B^{-1} existeix i, aleshores,

$$B^2 = B \implies B^{-1} \cdot B^2 = B^{-1} \cdot B \implies B = \text{Id},$$

que és, de fet, l'única matriu invertible que satisfà la condició.

c) Donades dues matrius M i N invertibles tals que $M^2 = M$ i $N^2 = N$, construïm la matriu següent: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. És cert que $C^2 = C$? **(Total 1 pt)**

Solució. Sí. Podem veure que si M , N són invertibles i satisfan la condició, aleshores $M = N = \text{Id}$ i, per tant, $C = \text{Id}$, que satisfà $\text{Id}^2 = \text{Id}$.

Alternativament, si $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$,

$$C^2 = (N \cdot M \cdot N^{-1}) \cdot (N \cdot M \cdot N^{-1}) = N \cdot M^2 \cdot N^{-1} = N \cdot M \cdot N^{-1} = C.$$

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Restringits al domini $x \in [0, 20]$, considera les tres funcions següents:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15, \\ g(x) & \text{si } 15 < x \leq 20. \end{cases}$$

a) Per a quins x es té que $f(x) = g(x)$? Per a quins x es té que $f'(x) = g'(x)$?

Criteris: 0.5 pts per cada pregunta. Penalització amb -0.25 pts si no es rebutja $x = 25$.
(Total 1 pt)

Solució. Ens demanen el valor de x tal que

$$f(x) = g(x) \implies x \cdot (10 - x) = 125 - 20x \implies x^2 - 30x + 125 = 0 \implies \begin{cases} x = 5, \\ x = 25. \end{cases}$$

Per tant, l'únic valor és $x = 5$, ja que l'altra solució no està dins del domini.

Per a la segona pregunta,

$$f'(x) = g'(x) \implies 10 - 2x = -20 \implies x = 15,$$

que és un punt dins del domini.

b) Estudia la continuïtat de la funció $h(x)$.

Criteris: 0.5 pts per estudiar la continuïtat en $x = 15$, 0.5 pts per justificar la continuïtat a la resta del domini. No s'ha de penalitzar si no s'especifica el tipus de continuïtat.

(Total 1 pt)

Solució. La funció $h(x)$ està formada per dues funcions contínues, així que l'únic punt en què podria no ser contínua és al punt frontera $x = 15$. Tal i com hem vist a l'apartat anterior, $f(x) = g(x) \implies x = 5$, així que a $x = 15$, les dues funcions tenen un valor diferent. És a dir, $h(x)$ té una única discontinuïtat en el punt $x = 15$, que és una discontinuïtat inevitable de salt.

c) És la funció $h(x)$ derivable? En quins intervals és creixent?

Criteris: 0.25 pts per expressar la derivada a troços, 0.25 pts estudiar la derivabilitat a $x = 15$, 0.50 pt per estudiar el creixement. No s'ha de penalitzar si s'especifica l'interval de creixement obert, $(0, 5)$. No s'ha de penalitzar si a l'expressió de la derivada a troços, aquesta es defineix per a $x = 15$.
(Total 1 pt)

Solució. No és derivable perquè no és contínua al punt $x = 15$.

La derivada de la funció $h(x)$ és:

$$h'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 \leq x < 15, \\ -20 & \text{si } 15 < x \leq 20. \end{cases}$$



i no està definida al punt $x = 15$.

Al primer tram, la derivada és estrictament positiva quan $x < 5$, i és estrictament negativa quan $x > 5$; al segon tram, la derivada és sempre negativa. Per tant, l'únic interval en què la funció és creixent és $[0, 5)$.

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 10^x + x^{10}$, per a $x \in (0, +\infty)$.

- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 10^0 + 0^{10} = 1 + 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 10^\infty + \infty^{10} = \infty + \infty = \infty.$$

- b) Calcula $f'(x)$.

Criteris: 0.75 pts per calcular la derivada de 10^x , 0.25 pts per calcular la derivada de x^{10} . **(Total 1 pt)**

Solució.

$$f'(x) = (10^x + x^{10})' = 10^x \cdot \ln(10) + x^9 \cdot 10.$$

- c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x) dx$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. Atès que $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$,

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = (10^1 + 1^{10}) - (10^0 + 0^{10}) = 10.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.