Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica $\sigma = 0.05$ litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

c) Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) $z_{0.985} = 2.17$, $I.C._{0.97} = \left(\bar{x} \pm z_{0.985}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = \left(0{,}97 \pm 2.17 \cdot {}^{0{,}05}/_{\sqrt{16}}\right) = (0.9429\,, 0.9971)$

(Obtención del cuantil, 0.25 puntos; planteamiento del intervalo, 0.5 puntos; solución, 0.25)

b) El único valor que se podría modificar es el tamaño muestral, *n*. Para reducir la amplitud, debería aumentar el tamaño muestral.

(Referencia a *n*, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)

c) El valor $\mu = 1$ no está en el intervalo al 97% de confianza, luego no estará en el intervalo al 95% de confianza, puesto que tiene menor amplitud. Por tanto, no se puede aceptar la afirmación.

(Conclusión, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)

Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1.5 puntos)**

b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

Solución:

$x = N^{\underline{o}}\ de\ reservas\ desde\ Italia;\ y = N^{\underline{o}}\ de\ reservas\ desde\ Portugal;\ z = N^{\underline{o}}\ de\ reservas\ desde\ Japón.$

$$\begin{cases} x+y+z=25 \\ 140x+130y+160z=3610 \\ y=\dfrac{1}{4}\cdot(x+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=25 \\ 140x+130y+160z=3610 \\ x-4y+z=0) \end{cases} \Leftrightarrow 5y=25 \Leftrightarrow y=5;$$

$$\begin{cases} x+z=20 \\ 14x+16z=296 \end{cases} \Leftrightarrow z=8; x=12$$

Luego $\boldsymbol{x=12}$; $\boldsymbol{y=5}$; $\boldsymbol{z=8}$

(Por cada ecuación correcta, 0.5 puntos; 0.5 puntos por desarrollo de la resolución y 0.5 puntos por la solución correcta)

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2+4 & si\ x \le k \\ -2x^2+8x & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valor de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0.75 puntos)**

Solución:

a.1) $\lim_{x\to k} f(x) = f(k) = 2k^2+4$

$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k}(2x^2+4) = 2k^2+4$

$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k}(-2x^2+8x) = -2k^2+8k$

$\exists \lim_{x\to k} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^+} f(x) \Leftrightarrow (2k^2+4) = (-2k^2+8k)$

luego $4k^2-8k+4=0 \Leftrightarrow k=1$. En ese caso, es continua.

(Condición de continuidad, 0.25 puntos; planteamiento de la ecuación, 0.25 puntos; solución correcta, 0.5 puntos)

a.2) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+4 & si\ x \le 1 \\ -2x^2+8x & si\ x > 1 \end{cases}$; $f(1) = 6$

$f'(x) = \begin{cases} 4x & si\ x < 1 \\ -4x+8 & si\ x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 4 & si\ x < 1 \\ -4 & si\ x > 1 \end{cases}$

Como $\begin{matrix} f''(0) = 4 > 0 & En\ x=0\ \ hay\ un\ mínimo\ relativo \\ f''(2) = -4 < 0 & En\ x=2\ \ hay\ un\ máximo\ relativo \end{matrix}$. $f(1) = 6$ No es extremo.

(Obtención de cada extremo, 0.25 puntos; justificación de máximo-mínimo, 0.25 puntos)

a.3) $f''(x) = \begin{cases} 4 & si\ x < 1 \\ -4 & si\ x > 1 \end{cases}$. Luego $f(x)$ es convexa [∪] en el intervalo $(-\infty, 1]$ y cóncava [∩] en el intervalo $(1, +\infty)$.

(Condición de concavidad y convexidad, 0.25 puntos, obtención de intervalos, 0.5 puntos)

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un punto de inflexión en $(1, -14)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$. **(1 punto)**

Solución: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3 \implies f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \implies f''(x) = 6ax + 2b$

b.1) $$\begin{matrix} f'(-1) = 0 \to 3a - 2b + c = 0 \\ f(-1) = 2 \to -a + b - c - 3 = 2 \\ f''(1) = 0 \to 6a + 2b = 0 \\ f(1) = -14 \to a + b + c - 3 = -14 \end{matrix} \to \begin{matrix} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -9 \end{matrix}$$

(Planteamiento de cada ecuación, 0.25 puntos; resolución del sistema, 0.5 puntos)

b.2) $(C - I) \cdot X = A \cdot B \to X = (C - I)^{-1} \cdot A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (C - I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det\big((C - I)\big) = 2$$

Luego $(C - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Y por tanto, $X = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Planteamiento de la ecuación, 0.25 puntos; solución correcta: producto 0.25, inversa y solución 0.5 puntos)

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$"

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? **Razona tu respuesta. (1.25 puntos)**

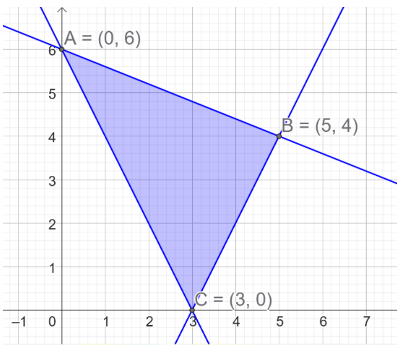
a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$? **Razona tu respuesta. (0.75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? **(0.5 puntos)**

Solución:

a.1) Dibujamos la región factible. Restricciones del problema: $\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$

La respuesta de Laura no puede ser correcta, ya que el punto $(1, 2)$ no está en la región factible.



Puede justificarse, también, que no es correcta porque no cumple la primera de las restricciones:

$2x + y \geq 6$

(Región factible, 0.75 puntos (0.25 por cada inecuación) y 0.5 por la respuesta y razonamiento correcto. Si se resuelve argumentando que no cumple la primera restricción, 0.5 por la operación y 0.75 por el argumento)

a.2) Función objetivo: $F(x,y) = 6x + 3y - 2 \rightarrow \min_{x,y}(6x + 3y - 2)$

$F(A) = F(0,6) = 16$; $F(B) = F(5,4) = 40$; $F(C) = F(3,0) = 16$. Por lo tanto, tampoco es cierto que se alcance en el punto $(3,0)$, sino que se alcanza en el segmento que une los puntos $(3,0)$ y $(0,6)$

(0.5 puntos por el cálculo de los vértices y evaluación de la función objetivo en los mismos y 0.25 puntos por la justificación negativa por ser el segmento)

a.3) El mínimo vale 16

(0.5 puntos por el valor justificado del mínimo)

Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0.75 puntos)**

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0.5 puntos)**

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde $t =$ tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante, encuentra el valor de los parámetros a y b. **(1.25 puntos)**

Solución:

$$A = Resuelve\ bufete\ A \rightarrow P(A) = 0.3$$
$$B = Resuelve\ bufete\ B \rightarrow P(B) = 0.5$$
$$C = Resuelve\ bufete\ C \rightarrow P(C) = 0.2$$
$$G = El\ caso\ es\ ganado \rightarrow P(G/A) = 0.6;\ P(G/B) = 0.8;\ P(G/C) = 0.7$$

b.1) Aplicando el teorema de la probabilidad total,

$$P(G) = P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.72$$

(Planteamiento 0.5 puntos, resultado 0.25 puntos)

b.2). $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 0.28$

Por el Teorema de Bayes, $P(A/\overline{G}) = \frac{P(A \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{0.12}{0.28} = 0.4286$

(Cálculo de la probabilidad del suceso contrario, 0.25 puntos; solución final correcta, 0.25 puntos)

b.4) $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$ $\quad A(3) = 54 \rightarrow 27a - 108 + 3b = 54$ $\quad$ Luego $a = 1$

$A'(t) = 3at^2 - 24t + b$ $\quad A'(3) = 0 \rightarrow 27a - 72 + b = 0$ $\quad b = 45$

(Por derivada, 0.25 puntos; por cada ecuación, 0.25 puntos; resolución, 0.5 puntos)