

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	F
---	---	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

Un taller de carpintería especializado en muebles de comedor fabrica sillas y mesas. Para ampliar el negocio la dueña se está planteando fabricar otros muebles, como estanterías, pero esta ampliación aún no se ha efectuado y antes de considerarlo quiere utilizar sus recursos de la mejor manera posible.

1.a) (1,5 puntos) Se sabe que cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo. Además, por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas, y entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades. Si por cada silla obtiene un beneficio neto de 40 euros y por cada mesa de 100 euros, ¿cuántas sillas y mesas debe fabricar a la semana para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio semanal obtenido?

1.b) (1 punto) Supongamos que además de sillas y mesas decide fabricar estanterías. Ahora se plantea nuevas condiciones: entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana; por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas; y los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades. ¿Podría decirle a la dueña del taller, de forma justificada, si es posible fabricar en una semana un número de sillas, mesas y estanterías que cumpla los requerimientos anteriores?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x - a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Calcule el valor del parámetro a para que $\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12}$.

2.1.b) (1 punto) ¿Es $f(x)$ continua en su dominio para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$? Para $a = 1$ escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2.1.c) (0,5 puntos) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3}$

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función.

2.2.b) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

En cierta provincia española se sabe que la altura de las estudiantes de segundo de Bachillerato se puede aproximar por una distribución normal de media μ centímetros y desviación típica $\sigma = 10$ centímetros.

Pregunta 3.1

3.1.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y la altura media resulta ser de 165 centímetros. Obtenga un intervalo de confianza para la altura media de las estudiantes de segundo de Bachillerato de la provincia con un nivel de confianza del 97%.

3.1.b) (1,25 puntos) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido al estimar la media μ con un nivel de confianza del 95% no sea mayor de 1 centímetro?

Pregunta 3.2

3.2.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria de chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y se obtiene su altura media. Calculado el correspondiente intervalo de confianza para μ , este resulta (168.825, 171.175) a un nivel de confianza del 90%. ¿Cuál ha sido en este caso el tamaño muestral elegido?

3.2.b) (1,25 puntos) Supuesto que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 168$ centímetros, calcule la probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos).

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De los 400 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto a 150 les gusta jugar al fútbol, a 200 les gusta jugar al voleibol y a 100 les gusta jugar a ambos deportes. Elegido un estudiante al azar:

4.1.a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste jugar a ninguno de los dos deportes?

4.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que le guste jugar solo a uno de los dos deportes.

4.1.c) (0,75 puntos) Sabiendo que no le gusta jugar al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste jugar al voleibol?

Pregunta 4.2

Los clientes potenciales de un comercio local, Mitienda, vienen de alguno de los municipios M1, M2 o M3. En M1 el 20% de la población compra en Mitienda, siendo estos porcentajes del 10% en M2 y del 8% en M3. Además se sabe que el 50% de la población vive en M1, el 30% en M2 y el 20% en M3.

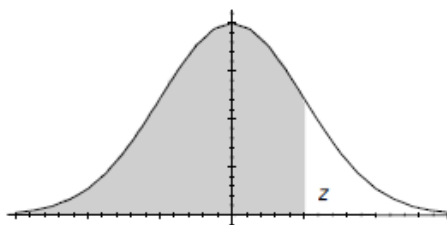
4.2.a) (1,25 puntos) Se elige al azar un habitante de uno de los tres municipios. Calcule la probabilidad de que compre en Mitienda.

4.2.b) (1,25 puntos) Se elige al azar un individuo que ha comprado en Mitienda. Obtenga la probabilidad de que sea de los municipios M2 o M3.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

Un taller de carpintería especializado en muebles de comedor fabrica sillas y mesas. Para ampliar el negocio la dueña se está planteando fabricar otros muebles, como estanterías, pero esta ampliación aún no se ha efectuado y antes de considerarlo quiere utilizar sus recursos de la mejor manera posible.

1.a) (1,5 puntos) Se sabe que cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo. Además, por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas, y entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades. Si por cada silla obtiene un beneficio neto de 40 euros y por cada mesa de 100 euros, ¿cuántas sillas y mesas debe fabricar a la semana para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio semanal obtenido?

1.b) (1 punto) Supongamos que además de sillas y mesas decide fabricar estanterías. Ahora se plantea nuevas condiciones: entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana; por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas; y los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades. ¿Podría decirle a la dueña del taller, de forma justificada, si es posible fabricar en una semana un número de sillas, mesas y estanterías que cumpla los requerimientos anteriores?

a) Llamemos x = “número de sillas que se fabrican” e y = “número de mesas”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 40x + 100y$.

Las restricciones del problema son:

“Cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo” $\rightarrow x + 4y \leq 24$

“Por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas” $\rightarrow x \geq 2y$

“Entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades” $\rightarrow x + y \leq 15$

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 24 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$x + 4y = 24$$

x	$y = \frac{24-x}{4}$
0	6
12	3
24	0

$$x = 2y$$

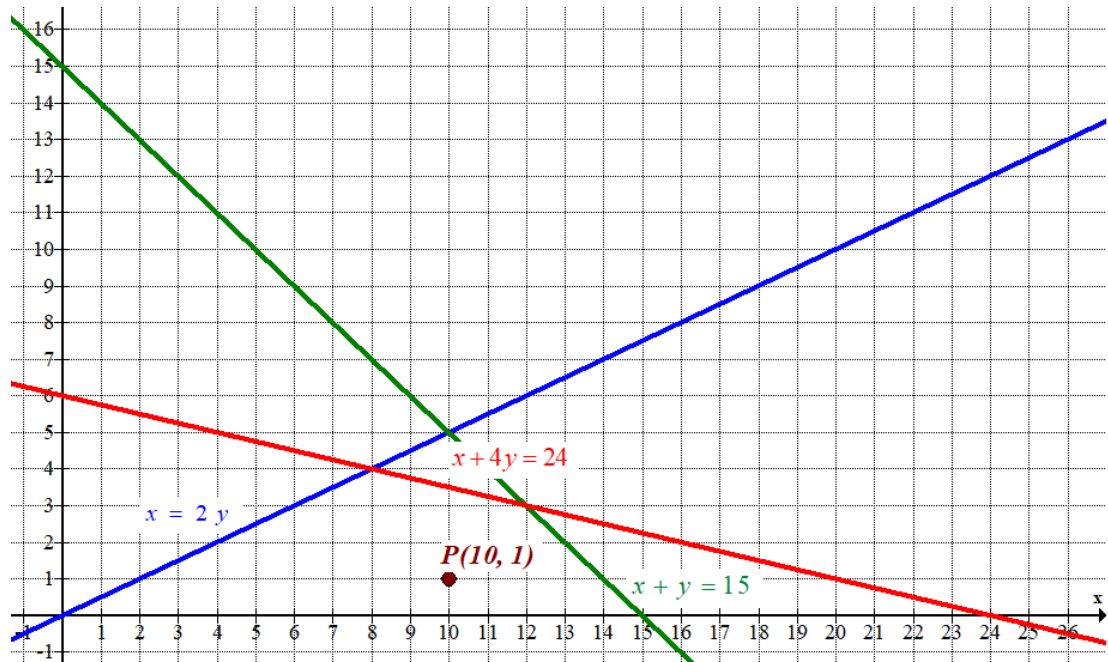
x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
6	3
12	6

$$x + y = 15$$

x	$y = 15 - x$
0	15
5	10
15	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



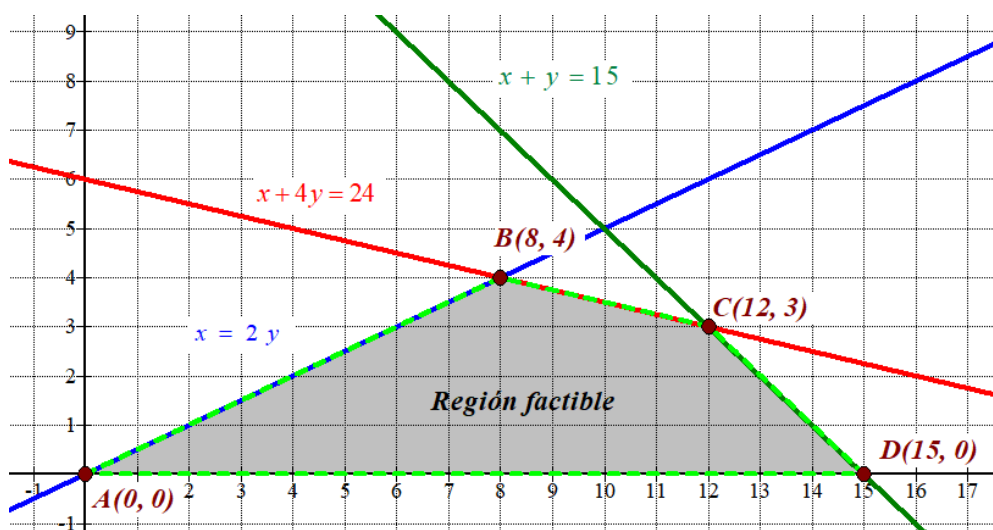
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 24 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está por debajo de las rectas verde, azul y roja.}$$

Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 4 \cdot 1 \leq 24 \\ 10 \geq 2 \cdot 1 \\ 10 + 1 \leq 15 \\ 10 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 40x + 100y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(8, 4) \rightarrow B(8, 4) = 40 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 720$$

$$C(12, 3) \rightarrow B(12, 3) = 40 \cdot 12 + 100 \cdot 3 = 780 \text{ Máximo}$$

$$D(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 40 \cdot 15 + 100 \cdot 0 = 600$$

El beneficio máximo es de 780 € y se consigue en el vértice C(12, 3). El beneficio máximo se consigue fabricando 12 sillas y 3 mesas.

b) Esta nueva situación planteada se resuelve con un sistema de ecuaciones.

Llamemos x = “número de sillas que se fabrican”, y = “número de mesas” y “ z ” al número de estanterías.

“Entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana” $\rightarrow x + y + z = 100$

“Por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas” $\rightarrow x = 4y$.

“Los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades” $\rightarrow 5y + z = 90$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x = 4y \\ 5y + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + y + z = 100 \\ 5y + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y + z = 100 \\ 5y + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Al intentar resolver el sistema llegamos a una situación imposible: una expresión ($5y + z$) que nos debe dar dos resultados distintos (90 y 100).

La situación planteada no tiene solución. Es una situación imposible.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x - a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Calcule el valor del parámetro a para que $\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12}$.

2.1.b) (1 punto) ¿Es $f(x)$ continua en su dominio para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$? Para $a = 1$ escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2.1.c) (0.5 puntos) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3}$

2.1.a) Intentamos encontrar el valor de a que cumpla lo pedido. Primero obtenemos la expresión de la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) dx &= \int_2^3 \frac{x^2 - x - a}{2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 x^2 - x - a dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax \right]_2^3 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 3a \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2a \right] = \frac{1}{2} \left[9 - \frac{9}{2} - 3a \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3} - 2 - 2a \right] = \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{3a}{2} - \frac{4}{3} + 1 + a = \frac{23}{12} - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Igualamos esta expresión a $\frac{5}{12}$.

$$\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{23}{12} - \frac{a}{2} = \frac{5}{12} \Rightarrow 23 - 6a = 5 \Rightarrow -6a = -18 \Rightarrow a = \frac{-18}{-6} = 3$$

El valor buscado es $a = 3$.

2.1.b) La función tiene una expresión polinómica por lo que es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.

Para $a = 1$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 1}{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(2) = f'(2)(x - 2) \\ f(2) = \frac{2^2 - 2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \\ f'(2) = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

Para $a=1$ la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

2.1.c) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - x - a}{2}}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - a}{10x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función.

2.2.b) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$? Justifique la respuesta.

2.2.a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas verticales $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1^3}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

La función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1 - 2x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x + 2x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

2.2.b Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos y el valor excluido del dominio $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2(-1-3)}{(-1-1)^3} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ consideramos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{0.5^2(0.5-3)}{(0.5-1)^3} = 5 > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

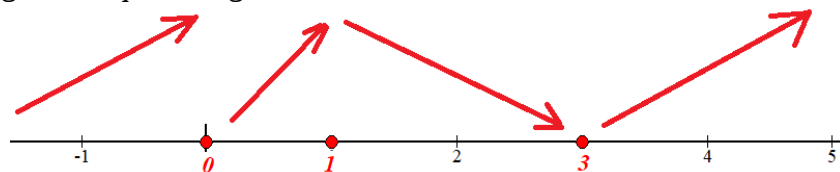
$$f'(2) = \frac{2^2(2-3)}{(2-1)^3} = -4 < 0. \text{ La función decrece en } (1, 3).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ consideramos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = \frac{4^2(4-3)}{(4-1)^3} = \frac{16}{27} > 0. \text{ La función crece en } (3, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

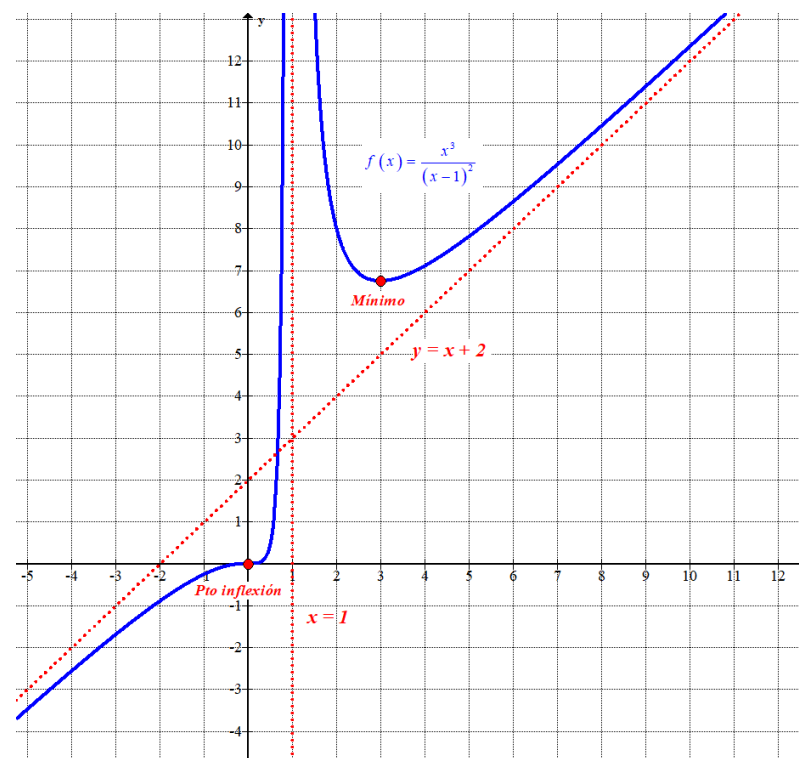
La función sigue el esquema siguiente.



¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$?

Observamos en el esquema superior que la función no presenta un máximo en $x = 0$, pues la función crece en dicho valor. Tampoco en $x = 1$, pues este valor está excluido del dominio.

La función no presenta ningún máximo relativo y solo tiene un mínimo relativo en $x = 3$.



EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. En cierta provincia española se sabe que la altura de las estudiantes de segundo de Bachillerato se puede aproximar por una distribución normal de media μ centímetros y desviación típica $\sigma = 10$ centímetros.

Pregunta 3.1

3.1.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y la altura media resulta ser de 165 centímetros. Obtenga un intervalo de confianza para la altura media de las estudiantes de segundo de Bachillerato de la provincia con un nivel de confianza del 97%.

3.1.b) (1,25 puntos) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido al estimar la media μ con un nivel de confianza del 95% no sea mayor de 1 centímetro?

3.1.a) Sea X la altura en centímetros de las estudiantes de segundo de Bachillerato. Esta variable aleatoria sigue una ley normal $N(\mu, 10)$.

El tamaño de la muestra es $n = 100$ chicas y la media muestral es $\bar{x} = 165$ centímetros.

El nivel de confianza del 97% significa que $1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$.

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 2.17$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (165 - 2.17, 165 + 2.17) = (162.83, 167.17)$$

3.1.b) El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6065
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8341
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = \frac{19.6}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 19.6 \Rightarrow n = 19.6^2 = 384.16$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 385 chicas de segundo de bachillerato.

Pregunta 3.2

3.2.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria de chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y se obtiene su altura media. Calculado el correspondiente intervalo de confianza para μ , este resulta (168.825, 171.175) a un nivel de confianza del 90%. ¿Cuál ha sido en este caso el tamaño muestral elegido?

3.2.b) (1,25 puntos) Supuesto que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 168$ centímetros, calcule la probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos).

3.2.a) Sea X la altura en centímetros de las estudiantes de segundo de Bachillerato.

$$X = N(\mu, 10).$$

La media muestral es el valor central del intervalo: $\bar{x} = \frac{168.825 + 171.175}{2} = 170.$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza:

$$Error = \frac{171.175 - 168.825}{2} = 1.175$$

El nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow$

$$1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9383	0,9394	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño de la muestra “n”.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.175 = 1.645 \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.175 = \frac{16.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{16.45}{1.175} \Rightarrow n = \left(\frac{16.45}{1.175} \right)^2 = 196$$

El tamaño de la muestra es de 196 chicas.

3.2.b) Sea X la altura en centímetros de las estudiantes de segundo de Bachillerato.

$$X = N(168, 10).$$

Nos piden calcular $P(165 \leq X \leq 170)$.

$$\begin{aligned}
 P(165 \leq X \leq 170) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{165-168}{10} \leq Z \leq \frac{170-168}{10}\right) = \\
 &= P(-0.3 \leq Z \leq 0.2) = P(Z \leq 0.2) - P(Z \leq -0.3) = P(Z \leq 0.2) - P(Z \geq 0.3) = \\
 &= P(Z \leq 0.2) - [1 - P(Z \leq 0.3)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5793 - [1 - 0.6179] = \boxed{0.1972}
 \end{aligned}$$

z	,00	,0
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5198	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,

z	,00	,0
0,0	0,5000	0
0,1	0,5398	0
0,2	0,5793	0
0,3	0,6179	0
0,4	0,6554	0

La probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos) es de 0.1972.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De los 400 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto a 150 les gusta jugar al fútbol, a 200 les gusta jugar al voleibol y a 100 les gusta jugar a ambos deportes. Elegido un estudiante al azar:

4.1.a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste jugar a ninguno de los dos deportes?

4.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que le guste jugar solo a uno de los dos deportes.

4.1.c) (0,75 puntos) Sabiendo que no le gusta jugar al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste jugar al voleibol?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Voleibol	No voleibol	
Fútbol	100		150
No fútbol			
	200		400

Completamos la tabla.

	Voleibol	No voleibol	
Fútbol	100	50	150
No fútbol	100	150	250
	200	200	400

4.1.a) De los 400 estudiantes hay 150 a los que no les gusta ninguno de los dos deportes. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante no le guste jugar a ninguno de los dos deportes vale $\frac{150}{400} = \frac{3}{8} = 0.375$.

4.1.b) Hay 50 estudiantes que les gusta el fútbol y no les gusta el voleibol y 100 que les gusta el voleibol y no el fútbol. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante le guste jugar solo a uno de los dos deportes vale $\frac{50+100}{400} = \frac{3}{8} = 0.375$.

4.1.c) Hay 250 estudiantes a los que no les gusta el fútbol y de estos a 100 les gusta el voleibol. La probabilidad de que al elegir un estudiante al que no le gusta el fútbol le guste jugar al voleibol vale $\frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0.4$.

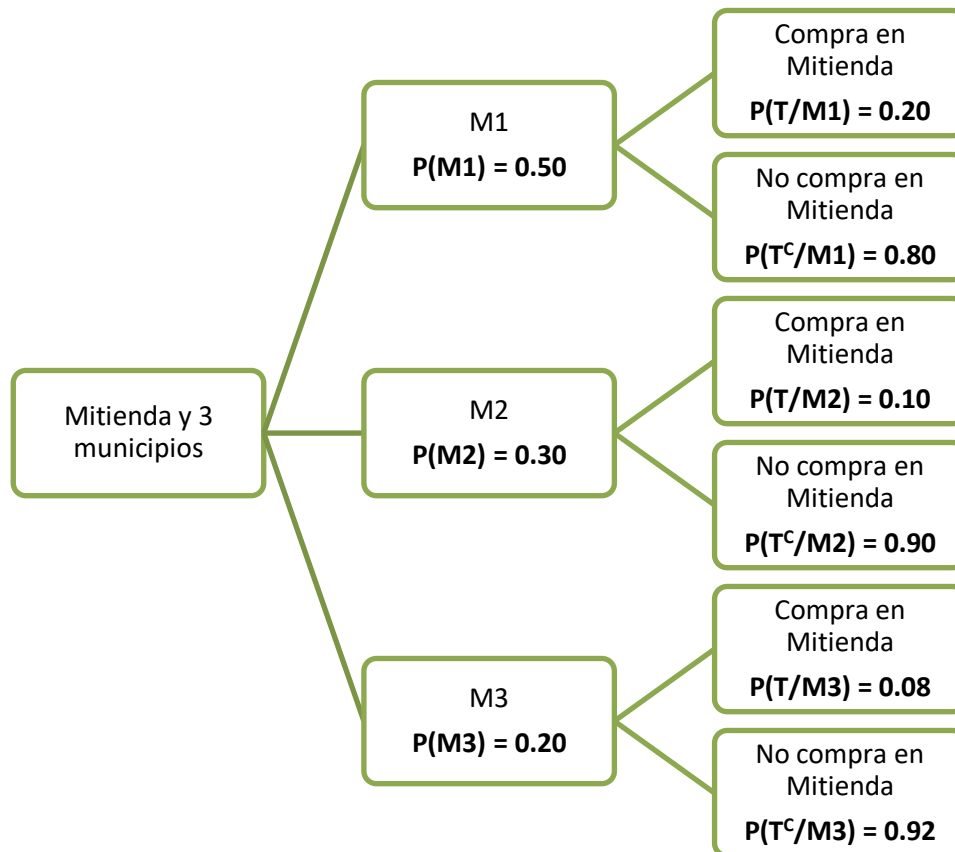
Pregunta 4.2

Los clientes potenciales de un comercio local, Mitienda, vienen de alguno de los municipios M1, M2 o M3. En M1 el 20% de la población compra en Mitienda, siendo estos porcentajes del 10% en M2 y del 8% en M3. Además se sabe que el 50% de la población vive en M1, el 30% en M2 y el 20% en M3.

4.2.a) (1,25 puntos) Se elige al azar un habitante de uno de los tres municipios. Calcule la probabilidad de que compre en Mitienda.

4.2.b) (1,25 puntos) Se elige al azar un individuo que ha comprado en Mitienda. Obtenga la probabilidad de que sea de los municipios M2 o M3.

Realizamos un diagrama de árbol.



4.2.a) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M1)P(T/M1) + P(M2)P(T/M2) + P(M3)P(T/M3) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.08 = \boxed{0.146}
 \end{aligned}$$

4.2.b) Calculamos la probabilidad de que sea del municipio M1: $P(M1/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M1/T) = \frac{P(M1 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M1)P(T/M1)}{P(T)} = \frac{0.5 \cdot 0.2}{0.146} = \frac{50}{73}$$

Si se elige al azar un individuo que ha comprado en Mitienda la probabilidad de que sea de los municipios M2 o M3 vale $1 - P(M1/T) = 1 - \frac{50}{73} = \frac{23}{73} \approx 0.3151$.