



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2025
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 1/2)$ y $C(3/2, 3, 1)$ y el vértice superior, D , se encuentra en una viga recta entre los puntos $E(0, 1, 3)$ y $F(3, 2, 3)$ (es decir, $D = E + \lambda \overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).

a) (1,5 puntos) Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) (1 punto) Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 8x + my - 6z = -8 \\ -x - 2y + m^2z = m \end{cases}$$

Con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) (1,5 puntos) Estudia, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) (1 punto) Resuelve, si es posible, el sistema para $m = 1$.

2.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases} A \cdot B = -B \\ A \cdot C = B - C \end{cases}$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C .

b) (1 punto) Sea D una matriz columna no nula tal que $A \cdot D = D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1} \cdot D = D$.

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 a) (0.5 puntos) Dada la función $f(x) = 2 + \sin(x)\cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) (1 punto) Obtén $\int \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2 + \sin(x)\cos(x)} dx$.

c) (1 punto) Calcula (si existe), en función del valor de $k \in \mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^3 - x^2 - x)}{(x^2 - 1)^{2k}}$$

3.2 Sea $g(x) = x - \sin(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,5 puntos) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x)$.

b) (0,5 puntos) Obtén los máximos y mínimos absolutos de $g(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

c) (1,5 puntos) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x) = xg(x)$, el eje X y las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.

La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.

Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

a) (1 punto) Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) (1 punto) Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?

c) (0,5 puntos) Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PIS.A.	11125	527
RHOM.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) (1,25 puntos) El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?

b) (1,25 puntos) El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

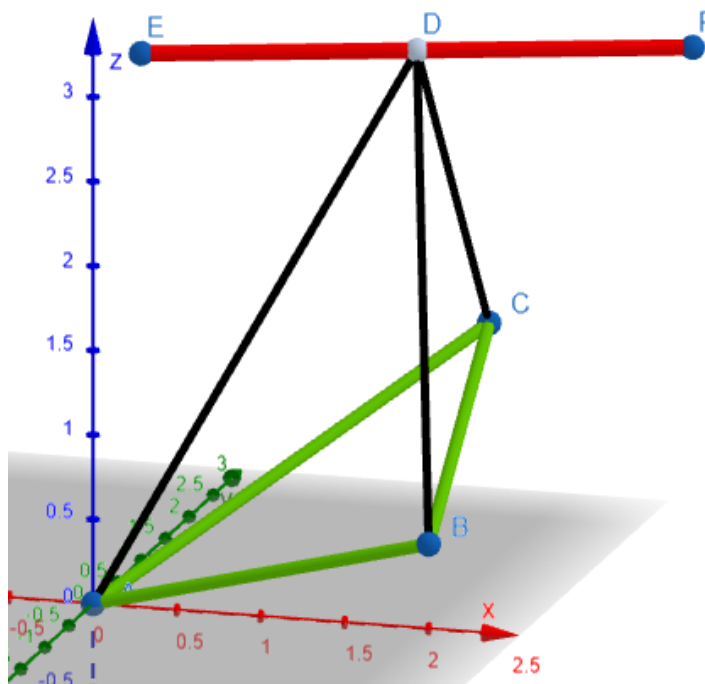
k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

- 1.** Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 1/2)$ y $C(3/2, 3, 1)$ y el vértice superior, D , se encuentra en una viga recta entre los puntos $E(0, 1, 3)$ y $F(3, 2, 3)$ (es decir, $D = E + \lambda \overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).
- a)** (1,5 puntos) Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).
- b)** (1 punto) Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

La situación planteada es la del dibujo donde hemos elegido un punto D de la viga EF .



a) Hallamos las coordenadas del punto D .

$$\overrightarrow{EF} = (3, 2, 3) - (0, 1, 3) = (3, 1, 0)$$

$$D = E + \lambda \overrightarrow{EF} = (0, 1, 3) + \lambda(3, 1, 0) = (3\lambda, 1 + \lambda, 3)$$

El volumen del tetraedro $ABCD$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 0, 0.5) - (0, 0, 0) = (2, 0, 0.5) \\ \overrightarrow{AC} &= (1.5, 3, 1) - (0, 0, 0) = (1.5, 3, 1) \\ \overrightarrow{AD} &= (3\lambda, 1 + \lambda, 3) - (0, 0, 0) = (3\lambda, 1 + \lambda, 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0.5 \\ 1.5 & 3 & 1 \\ 3\lambda & 1 + \lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 18 + 0.75(1 + \lambda) - 4.5\lambda - 2(1 + \lambda) = 18 + 0.75 + 0.75\lambda - 4.5\lambda - 2 - 2\lambda = 16.75 - 5.75\lambda$$

El volumen del tetraedro depende del valor de λ según la expresión:

$$V(\lambda) = \frac{16.75 - 5.75\lambda}{6}; \text{ siendo } \lambda \in [0, 1]$$

El máximo valor se alcanza para el valor de λ más pequeño, es decir, para $\lambda = 0$.

El volumen máximo es de $V(0) = \frac{-5.75 \cdot 0 + 16.75}{6} = \frac{16.75}{6} \approx 2.79167$ metros cúbicos.

b) Para $\lambda = 1$ el volumen de la pirámide es $V(1) = \frac{-5.75 + 16.75}{6} = \frac{11}{6}$ metros cúbicos.

El área de la base es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0.5) \\ \overrightarrow{AC} = (1.5, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0.5 \\ 1.5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.75j + 6k - 2j - 1.5i = (-1.5, -1.25, 6)$$

$$\text{Área Base} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-1.5)^2 + (-1.25)^2 + 6^2}}{2} = \frac{7\sqrt{13}}{8}$$

Despejamos la altura de la pirámide en la expresión del volumen.

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Área base} \cdot \text{Altura}}{3} \Rightarrow \frac{11}{6} = \frac{\frac{7\sqrt{13}}{8} \cdot \text{Altura}}{3} \Rightarrow \frac{11}{2} = \frac{7\sqrt{13}}{8} \cdot \text{Altura} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Altura} = \frac{88}{14\sqrt{13}} = \boxed{\frac{44\sqrt{13}}{91} \approx 1.7433 \text{ metros}}$$

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 8x + my - 6z = -8 \\ -x - 2y + m^2z = m \end{cases}$$

Con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) (1,5 puntos) Estudia, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) (1 punto) Resuelve, si es posible, el sistema para $m = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ -1 & -2 & m^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & m & -6 & -8 \\ -1 & -2 & m^2 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ -1 & -2 & m^2 \end{vmatrix} = \{ \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ 0 & 0 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = \{ \text{Fila } 2^a - 8 \cdot \text{Fila } 1^a \} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m - 16 & 2 \\ 0 & 0 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = (m - 16)(m^2 - 1) = (m - 16)(m - 1)(m + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m - 16)(m - 1)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 16 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 16$, $m = 1$ y $m = -1$. Analizamos cuatro casos por separado.

CASO 1. $m \neq 16$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 16$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 16 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 256 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -2 \quad 256 \quad 16 \\ \hline 1 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 255 \quad 15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 8 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 8 \quad 16 \quad -6 \quad -8 \\ -8 \quad -16 \quad 8 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 255 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 510 \quad 30 \\ 0 \quad 0 \quad -510 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m=1$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 8 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 8 \quad 1 \quad -6 \quad -8 \\ -8 \quad -16 \quad 8 \quad 8 \\ \hline 0 \quad -15 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 4. $m=-1$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & -1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 8 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 8 \quad -1 \quad -6 \quad -8 \\ -8 \quad -16 \quad 8 \quad 8 \\ \hline 0 \quad -17 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -17 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 16$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el sistema tiene 1 solución, si $m = 16$ o $m = -1$ el sistema tiene 0 soluciones y si $m = 1$ el sistema ∞ soluciones.

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 & 2 & -1 & -1}^{A/B} \\ \hline 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = -1 \\ -15y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = -1 \\ 2z = 15y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = -1 \\ z = \frac{15}{2}y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2y - \frac{15}{2}y = -1 \Rightarrow x - \frac{11}{2}y = -1 \Rightarrow x = -1 + \frac{11}{2}y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 + \frac{11}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{15}{2}\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = -1 + \frac{11}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{15}{2}\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

2.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases} A \cdot B = -B \\ A \cdot C = B - C \end{cases}$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) (1 punto) Sea D una matriz columna no nula tal que $A \cdot D = D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1} \cdot D = D$.

a) Para que sean posibles los productos $A \cdot B$ y $A \cdot C$ las matrices columna deben ser de dimensiones 4×1 .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ -c+d \\ -d \end{pmatrix} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e+f \\ f \\ -g+h \\ -h \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A \cdot B = -B \\ A \cdot C = B - C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ -c+d \\ -d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e+f \\ f \\ -g+h \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -a \rightarrow b = -2a \\ b = -b \rightarrow \boxed{b=0} \\ -c+d = -c \rightarrow \boxed{d=0} \\ -d = -d \rightarrow 0=0 \\ e+f = a-e \rightarrow 2e+f = a \\ f = b-f \rightarrow 2f = b \\ -g+h = c-g \rightarrow h = c \\ -h = d-h \rightarrow \boxed{0=d} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -2a \rightarrow \boxed{a=0} \\ 2e+f = a \\ 2f = 0 \rightarrow \boxed{f=0} \\ h = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2e+0 = 0 \rightarrow \boxed{e=0} \\ h = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{h=c}$$

Las matrices columna que cumplen lo pedido son $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ c \end{pmatrix}$

b) Suponemos que se cumple $A \cdot D = D$ y sabemos que existe la inversa de la matriz A.

Multiplicamos en ambos lados de la igualdad por la inversa de A.

$$A \cdot D = D \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot D = A^{-1} \cdot D \Rightarrow I \cdot D = A^{-1} \cdot D \Rightarrow A^{-1} \cdot D = D$$

3.1 a) (0.5 puntos) Dada la función $f(x) = 2 + \sin(x)\cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) (1 punto) Obtén $\int \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2 + \sin(x)\cos(x)} dx$.

c) (1 punto) Calcula (si existe), en función del valor de $k \in \mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^3 - x^2 - x)}{(x^2 - 1)^{2k}}$$

a) Determinamos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x) = 2 + \sin(x)\cos(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

b) Acabamos de ver que la derivada del denominador del integrando es el numerador.

$$\int \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2 + \sin(x)\cos(x)} dx = \ln|2 + \sin(x)\cos(x)| + K$$

c) Para el cálculo del límite influye el signo del exponente del denominador. Analizamos tres situaciones diferentes, en función de que el exponente sea negativo, cero o positivo.

CASO 1. $k \in \mathbb{Z}$ y $k \leq -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^3 - x^2 - x)}{(x^2 - 1)^{2k}} = \begin{cases} 2k < 0 \\ -2k > 0 \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + x^3 - x^2 - x)(x^2 - 1)^{-2k} =$$

$$= (1^4 + 1^3 - 1^2 - 1)(1^2 - 1)^{-2k} = 0 \cdot 0^{-2k} = \boxed{0}$$

CASO 2. $k \in \mathbb{Z}$ y $k = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^3 - x^2 - x)}{(x^2 - 1)^{2k}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^3 - x^2 - x)}{(x^2 - 1)^0} = \lim_{x \rightarrow 1} x^4 + x^3 - x^2 - x = 1^4 + 1^3 - 1^2 - 1 = \boxed{0}$$

CASO 3. $k \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^3 - x^2 - x)}{(x^2 - 1)^{2k}} = \frac{1^4 + 1^3 - 1^2 - 1}{(1^2 - 1)^{2k}} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{2k(x^2 - 1)^{2k-1}(2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{4kx(x^2 - 1)^{2k-1}} = \frac{4 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1}{4k \cdot 1(1^2 - 1)^{2k-1}} =$$

$$= \begin{cases} k \geq 1 \rightarrow 2k \geq 2 \rightarrow 2k-1 \geq 1 \\ 2k-1 \text{ es impar} \end{cases} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{4kx(x^2 - 1)^{2k-1}} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{4kx(x^2 - 1)^{2k-1}} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} = \boxed{\infty}$$

Resumiendo: Si $k \leq 0$ el límite vale 0 y si $k \geq 1$ el límite vale ∞ .

3.2 Sea $g(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,5 puntos) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x)$.

b) (0,5 puntos) Obtén los máximos y mínimos absolutos de $g(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

c) (1,5 puntos) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x) = xg(x)$, el eje X y las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

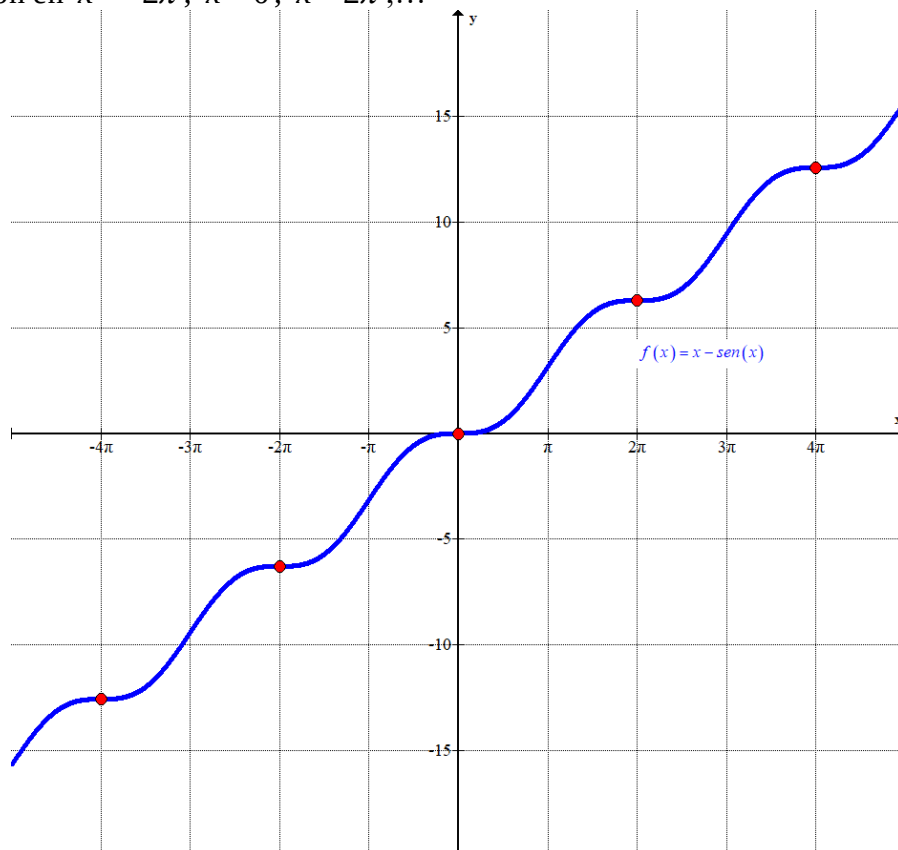
a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$g(x) = x - \operatorname{sen}(x) \Rightarrow g'(x) = 1 - \cos(x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ x = -2\pi \\ x = 0 \\ x = 2\pi \\ \dots \end{cases}$$

La derivada es siempre positiva pues $\cos(x) \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1 - \cos(x) \rightarrow$

$g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. La función crece en todo su dominio $\mathbb{R}$. La función tiene puntos de inflexión en $x = -2\pi, x = 0, x = 2\pi, \dots$



b) Como la función es siempre creciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ el mínimo absoluto lo tiene

en $x = \frac{\pi}{2}$ y el máximo absoluto se tiene en $x = \pi$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$ la función vale $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$. El mínimo absoluto tiene coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Para $x = \pi$ la función vale $g(\pi) = \pi - \operatorname{sen}(\pi) = \pi$. El máximo absoluto tiene coordenadas (π, π) .

c) Hallamos los puntos de corte de la función $h(x) = xg(x) = x(x - \operatorname{sen}(x)) = x^2 - x\operatorname{sen}(x)$ con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = xg(x) = x(x - \operatorname{sen}(x)) \\ \text{Eje } X \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(x - \operatorname{sen}(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - \operatorname{sen}(x) = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

La gráfica de la función corta el eje X fuera del intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

El área delimitada por la gráfica de la función $h(x) = xg(x)$, el eje X y las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$ es el valor de la integral definida entre $\frac{\pi}{2}$ y π de la función.

Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\int h(x) dx = \int x^2 - x\operatorname{sen}(x) dx = \int x^2 dx - \int x\operatorname{sen}(x) dx = \dots$$

$$\int x\operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) \end{array} \right\} =$$

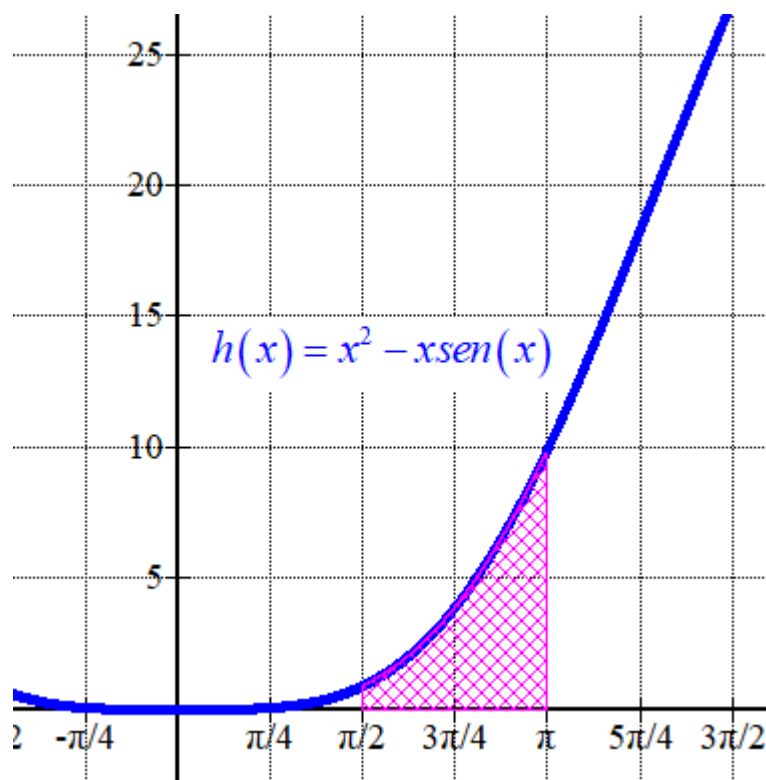
$$= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx = -x\cos(x) + \int \cos(x) dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + K$$

$$\dots = \frac{x^3}{3} + x\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{\pi/2}^{\pi} h(x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 - x\operatorname{sen}(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\cos(x) - \operatorname{sen}(x) \right]_{\pi/2}^{\pi} = \\ &= \left[\frac{\pi^3}{3} + \pi\cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi) \right] - \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{\pi^3}{3} - \pi - \frac{\pi^3}{24} + 1 = \frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 \approx 6.902 u^2 \end{aligned}$$

El área buscada tiene un valor de $\frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 \approx 6.902$ unidades cuadradas.



4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.

La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.

Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

- a) (1 punto) Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- b) (1 punto) Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?
- c) (0,5 puntos) Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

- a) En total hay matriculados en Teruel $1550 + 250 + 150 = 1950$ estudiantes. Son mujeres el 74% de los estudiantes matriculados en la FCS, es decir, $0.74 \cdot 1550 = 1147$ mujeres estudian en la FCS. Son mujeres el 18% de los estudiantes de la Politécnica, es decir, $0.18 \cdot 250 = 45$ mujeres estudian en la Politécnica. El 76% de los matriculados en Enfermería son mujeres, es decir, $0.76 \cdot 150 = 114$ mujeres están matriculadas en Enfermería.

Colocamos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Mujeres	Hombres	
Facultad de Ciencias Sociales	1147		1550
Politécnica	45		250
Enfermería	114		150
TOTALES			1950

Completamos la tabla.

	Mujeres	Hombres	
Facultad de Ciencias Sociales	1147	403	1550
Politécnica	45	205	250
Enfermería	114	36	150
TOTALES	1306	644	1950

De los 1950 estudiantes de Teruel 1306 son mujeres. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante de Teruel este sea mujer tiene un valor de $\frac{1306}{1950} = \frac{653}{975} \approx 0.6697$.

- b) De las 1306 mujeres matriculadas en Teruel solo 45 lo están en la Politécnica. La probabilidad de que al elegir un estudiante de la Politécnica este sea mujer tiene un valor de $\frac{45}{1306} \approx 0.0345$.

- c) Hay 644 hombres matriculados y solo 205 en la Politécnica. La probabilidad de que al elegir un hombre esté matriculado en la Politécnica tiene un valor de $\frac{205}{644} \approx 0.3183$.

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PIS.A.	11125	527
RHOM.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

- a)** (1,25 puntos) El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?
- b)** (1,25 puntos) El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

a) Llamamos X = Beneficio mensual de PI S.A. en euros. Y = Beneficio mensual de RHO M.A. en euros. $X = N(11125, 527)$. $Y = N(10950, 430)$.

Hallamos $P(X > 10000)$ y $P(Y > 10000)$.

$$P(X > 10000) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{10000 - 11125}{527}\right) = P(Z > -2.135) =$$

$$= P(Z < 2.135) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \frac{0.9834 + 0.9838}{2} = \boxed{0.9836}$$

$$P(Y > 10000) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{10000 - 10950}{430}\right) = P(Z > -2.21) =$$

$$= P(Z < 2.21) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9864}$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838
2,2	0,9854	0,9858	0,9861	0,9864	0,9868

Comparamos ambas probabilidades.

$$P(Y > 10000) = 0.9864 > 0.9836 = P(X > 10000)$$

La probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 € es mayor con la empresa RHO M.A.

b) Hallamos $P(X < 0)$ y $P(Y < 0)$.

$$P(X < 0) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{0 - 11125}{527}\right) = P(Z < -21.11) = P(Z > 21.11)$$

$$P(Y < 0) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{0 - 10950}{430}\right) = P(Z < -25.46) = P(Z > 25.46)$$

Ambas probabilidades son prácticamente nulas, pero aunque las diferencias sean mínimas, si las comparamos:

$$25.46 > 21.11 \Rightarrow P(Z > 25.46) < P(Z > 21.11) \Rightarrow P(Y < 0) < P(X < 0)$$

La probabilidad de tener pérdidas es menor en la empresa RHOM.A.