

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 punto)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Solución:

(a) Dado que el sistema es homogéneo, siempre tiene solución, al menos la solución $x = 0, y = 0, z = 0$. Para discutir el sistema calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes, $\det(A) = -2a$, por lo que, si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones en caso contrario la solución es única.

También podríamos haber hecho la discusión escalonando la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 5F_1}]{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a+2 \\ 0 & -1 & 5a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a+2 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

y llegamos a la misma conclusión.

(b) Teniendo en cuenta la matriz escalonada obtenida e el apartado anterior la matriz ampliada sería:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a+2 \\ 0 & 0 & 2a \end{array} \right)$$

Que sólo tiene solución para el valor $a = 0$

(c) El sistema del apartado a para $a = 0$ tiene infinitas soluciones. Para calcularlas podemos utilizar la matriz escalonada calculada en el primer apartado lo escribimos como

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{array} \right\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes)

Se pide:

(a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x - 1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudiar si existe algún

valor de x para el que pueda ser $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. calcula los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Solución:

(a) Si $\det(M) = x$, entonces $\det(M^2) = x^2$. Como $\det((x - 1)I) = (x - 1)^2$ entonces

$$x^2 = (x - 1)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow 0 = -2x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(b) $\det(M) = x - 1$ para que existiese dicho valor debería cumplirse que $x = x - 1$, pero esto es imposible. La respuesta es que no existe dicho valor.

(c) Como $M = xM^2$ y teniendo en cuenta el tamaño de M , se tendría que $x = x^3x^2 = x^5$. Dado que $x \neq 0$, $x^4 = 1$ por lo que $x = \pm 1$.

El $\det(M^{-1}) = 1$ si $x = 1$ y $\det(M^{-1}) = -1$ si $x = -1$.

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2 \cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular los máximos y mínimos de la función.
- (b) **(0.75 puntos)** Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
- (c) **(0.75 puntos)** Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Solución:

- (a) **(1 punto)** Calculemos los extremos de la función.

$$f'(t) = -2 \sin(t + \pi/2)$$

Calculemos los puntos críticos:

$$f'(t) = 0 \rightarrow \sin(t + \pi/2) = 0$$

Las posibles soluciones son $t + \pi/2 = 0$ y $t + \pi/2 = \pi$, el resto estarían seguro fuera del intervalo. Es decir las soluciones serían: $t = -\pi/2$ que está fuera del intervalo y $t = \pi - \pi/2 = \pi/2$.

Veamos si se tratan de máximos o mínimos:

$$f''(t) = -2 \cos(t + \pi/2)$$

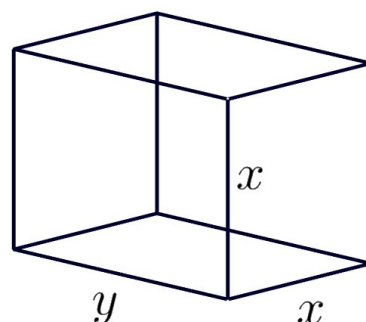
Como $f''(\pi/2) = 2 > 0$, en $x = \frac{\pi}{2}$ tiene un mínimo. $f(\pi/2) = 2 \cos(\pi) + 10 = 8$

(b) En los extremos del intervalo $f(0) = 10$ y $f(4) = 11.51$, por lo tanto 8 es un mínimo absoluto. Por lo tanto el mínimo valor que toma la función en el intervalo es 8, y no se llega a vaciar.

(c) Se buscan los intervalos de crecimiento de la función. Como en el intervalo pedido sólo hay un mínimo, el intervalo de crecimiento sería $[\frac{\pi}{2}, 4]$ y aumenta el volumen durante $4 - \frac{\pi}{2} \approx 2.4292$ horas.

Pregunta 2. Opción B

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcula los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Solución:

La cantidad de material que se utilizaría sería $3 = 2x^2 + 3xy$, es decir, $y = \frac{3 - 2x^2}{3x}$.

La función volumen sería $f(x, y) = x^2y$, por lo tanto $f(x) = x^2 \frac{3 - 2x^2}{3x} = \frac{3x - 2x^3}{3}$.

Para calcular el máximo tendremos $f'(x) = \frac{1}{3}(3 - 6x^2) = 1 - 2x^2$ por lo tanto la función tiene un punto crítico en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (observe que la otra solución es negativa y no es válido como longitud, área o volumen).

Como $f''(x) = -4x$, entonces $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ por lo tanto se trata de un máximo.

Los valores pedidos son $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 2 \frac{\sqrt{2}}{3}$ la capacidad es $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Pregunta 3. Opción A Dada la la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.

- (b) **(1.25 puntos)** Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

- (a) Una primitiva de f se calcula como sigue:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k$$

Como en 0 debe valer 1 se tiene que

$$1 = \frac{1}{2} \ln(1) + k \rightarrow k = 1$$

y la primitiva buscada es

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 1.$$

- (b) Obsérvese que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$, por lo tanto, el área pedida sería:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{-x}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln((0)^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln((-1)^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(0^2 + 1) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) = \ln(2) \approx 0.6931 \end{aligned}$$

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
- (b) **(0.5 puntos)** ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
- (c) **(1 punto)** Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determina la función g .

Solución:

- (a) Si $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$ entonces $G'(x) = g(x)$, por lo tanto

$$g(x) = x^2 + 2ax + b$$

(b) Las primitivas de g son de la forma, una cualquiera más na costante cualquiera, por lo tanto todas las primitivas de g serían

$$G(x) + k = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + K, \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

(c) Si $g(1) = 2$ entonces

$$1 + 2a + b = 2$$

y si $g(0) = 1$ se tiene que

$$b = 1$$

Por lo tanto $a = 0$ y la función sería $g(x) = x^2 + 1$.

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.

(b) **(1 punto)** Calcula las distancias de A y B al plano π .

(c) **(0.5 puntos)** Tome un punto cualquiera del plano π distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Solución:

(a) El punto medio es $P = \frac{1}{2}((1, 1, 1) + (-1, 1, 3)) = (0, 1, 2)$. Un vector normal al plano puede ser el vector $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 3) - (1, 1, 1) = (-2, 0, 2)$

El plano, por lo tanto, tendría la forma $-2x + 2z + D = 0$ como pasa por P , $4 + D = 0$ y $D = -4$ por lo que el plano es $-2x + 2z - 4 = 0$, o lo que es lo mismo $x - z + 2 = 0$.

(b) La distancia de cada uno de estos puntos es la mitad de la distancia entre ellos:

$$d(A, \pi) = d(B, \pi) = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)^2 + (1-1)^2 + (1-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

(c) **(0.5 puntos)** Un punto cualquiera puede ser $Q(-2, 0, 0)$ ya que verifica la ecuación del plano.

$$d(Q, A) = \sqrt{(-2-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$d(Q, B) = \sqrt{(-2+1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

Pregunta 4. Opción B Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x-y+z &= 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+\beta z = 3$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.

(c) **(1 punto)** Para $\beta = 0$ calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Solución:

(a) Tomando dos puntos de r , por ejemplo, $A = (0, 1, 1)$ y $B(-2, 0, 4)$. El vector $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 3)$, debe ser perpendicular al vector normal al plano, es decir, su producto escalar debe ser 0. Un vector normal al plano es $(2, 1, \beta)$,

$$(-2, -1, 3) \cdot (2, 1, \beta) = -4 - 1 + 3\beta = 0 \rightarrow \beta = \frac{5}{3}$$

(b) Para que la recta y el plano sean perpendiculares, el vector director de la recta debe ser proporcional al normal del plano

$$(-2, -1, 3) = \lambda(2, 1, \beta) \rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -1 = \lambda \\ 3 = \beta\lambda \end{cases} \rightarrow \beta = -3$$

(c) Tomamos el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$. Calculamos la recta perpendicular a π que pasa por $(-1, 0, 1)$. La recta es

$$(x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano

$$2(-1 + 2\lambda) + \lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

El punto $(1, 1, 1)$ es la intersección del plano π y la recta perpendicular al plano y que pasa por $(-1, 0, 1)$. Este punto es el punto medio del segmento con extremos en el simétrico pedido y $(-1, 0, 1)$. Por lo tanto el punto P que buscamos es

$$\frac{1}{2}(P + (-1, 0, 1)) = (1, 1, 1) \rightarrow P = 2(1, 1, 1) - (-1, 0, 1) = (3, 2, 1)$$

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

(a) **(1.25 puntos)** Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?

(b) **(1.25 puntos)** Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Solución:

(a) Para calcular la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro, calcularemos la probabilidad de que ninguna sea de 1 euro que es el suceso complementario, ya que

$$P(\text{Al menos una moneda es de un euro}) = 1 - P(\text{ninguna sea de 1 euro}).$$

Los casos posibles son extraer 3 monedas de las 10 de total, que son $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$

Los casos favorables serían extraer 3 monedas de las 5 que no son de 1 euro, es decir $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Por lo tanto la probabilidad pedida es

$$1 - \frac{10}{120} = 0.9167$$

(b) Llamaremos 1c al suceso, la primera extracción ha sido de 10 céntimos, $\overline{1c}$ al suceso, la primera extracción no ha sido de 10 céntimos y 2c al suceso la segunda extracción ha sido de 10 céntimos.

Podemos decir que

$$P(1c) = \frac{2}{10} = 0.2, \quad P(\overline{1c}) = 1 - P(1c) = 0.8$$

Llamemos 2c al suceso, la segunda extracción es de 10 céntimos. Utilizando el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$P(2c) = P(2c \cap 1c) + P(2c \cap \overline{1c}) = P(2c/1c)P(1c) + P(2c/\overline{1c})P(\overline{1c}) = \frac{1}{9}0.2 + \frac{2}{9}0.8 = 0.2$$

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
- (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
- (c) **(1 punto)** Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98 % de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

Solución: Llamaremos X a la variable aleatoria número de años que vive el elefante.

(a) **(0.75 puntos)** Se pide:

$$P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - P\left(Z \leq \frac{100 - 82}{30}\right) = 1 - P(Z \leq 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

Por lo tanto se espera que el 27.43 % de los elefantes vivan más de 100 años.

(b) **(0.75 puntos)** Se trata de una distribución $B(4, 0.2743)$. La probabilidad buscada, entonces, sería

$$1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2743^0 (1 - 0.2743)^4 = 0.2774.$$

(c) **(1 punto)** $P(X \leq 82 + a) = 0.98$ entonces:

$$P\left(X \leq \frac{82 + a - 82}{30}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{30}\right) = 0.98$$

Buscamos s tal que $P(Z \leq s) = 0.98$, como $F(2.06) = 0.98$ entonces $\frac{a}{30} = 2.06$ y $a = 30 \times 2.06 = 61.8$.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.



Criterios de corrección

Pregunta 1. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque A: Sentido numérico.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto el apartado (c) y 0.75 puntos los apartados (a) y (b).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 1. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque A: Sentido numérico.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto el apartado (a) y 0.75 los apartados (b) y (c).

PORCENTAJE: asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 2. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos el apartado (a) 0.75 puntos los apartados (b) y (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 2. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 3. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.



- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 3. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (c), 0.5 puntos el apartado(b).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 4. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (b), 0.5 puntos el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 4. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b), 1 puto el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 5. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 5. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:



Universidad de
Oviedo

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b), 1 punt el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.