



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

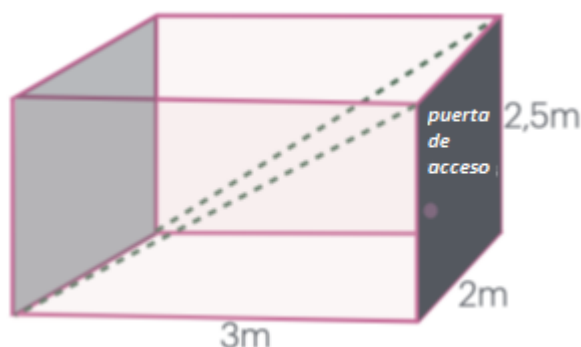
Model 1

La prueba consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, sólo se evaluará al primero.

Justificad las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1. — Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2.5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión 3×2.5 metros, tal y como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



- [1 punto]** Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.
- [1 punto]** Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifica el proceso.
- [0.5 puntos]** Una de las dos caras de dimensión 2×2.5 metros constituye la puerta del contenedor tal y como se muestra en la figura. Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones 2.75×2.75 metros?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Dado el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

- [1.5 puntos]** Discute, según el parámetro k , el número de soluciones que tiene el sistema.
- [1 punto]** Resuelve el sistema cuando sea posible.

Problema B2. — Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 €. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

- (a) [1 punto] ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 € y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.
- (b) [1.5 puntos] Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Parte C. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

- (a) [1 punto] Calcula la recta tangente, r , a la curva y en el punto $(2, 0)$.
- (b) [1.5 puntos] Calcula el área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r .

Problema C2. — La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función

$$H(t) = \frac{20}{1 + e^{-t}},$$

donde el tiempo está medido en segundos.

- (a) [0.5 puntos] ¿Cuál es la concentración inicial?
- (b) [1 punto] Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.
- (c) [1 punto] Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

Parte D. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45% de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40% han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los productos no averiados, se sabe que el 55% también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

- (a) [0.75 puntos] Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?
- (b) [0.75 puntos] Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?
- (c) [1 punto] Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

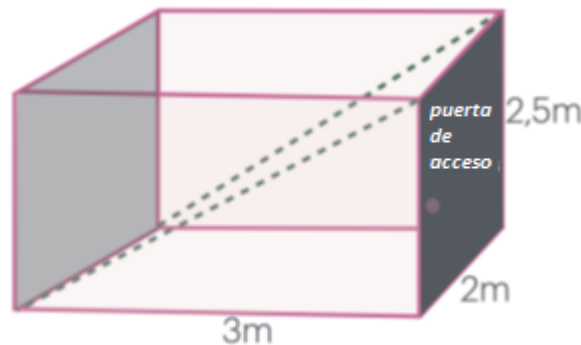
Problema D2. — Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A' y B' los sucesos complementarios de A y B , respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B .

Dadas las probabilidades $P(A) = 0.75$, $P(B') = 0.45$ y $P(A - B) = 0.3$, calcula:

- (a) [0.75 puntos] $P(A \cap B)$.
- (b) [0.75 puntos] $P(B - A)$.
- (c) [1 punto] $P(A' \cap B')$.

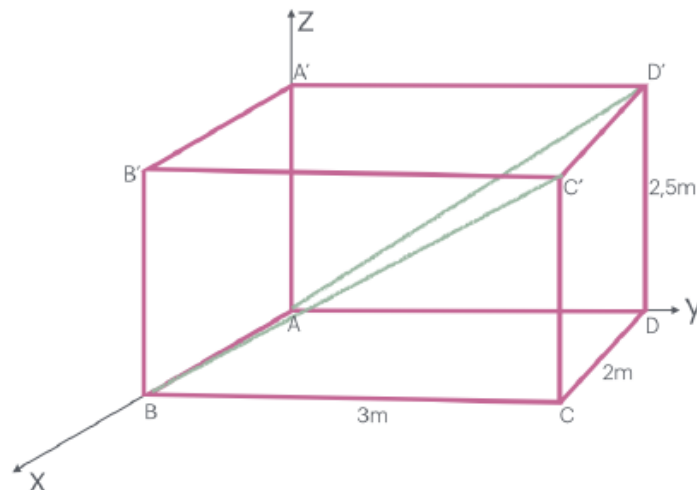
SOLUCIONES

Problema A1. — Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2.5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión 3×2.5 metros, tal y como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



- (a) **[1 punto]** Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.
- (b) **[1 punto]** Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifica el proceso.
- (c) **[0.5 puntos]** Una de las dos caras de dimensión 2×2.5 metros constituye la puerta del contenedor tal y como se muestra en la figura. Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones 2.75×2.75 metros?

- (a) Colocamos el origen de coordenadas como indica el dibujo.



Hemos nombrado cada vértice con una letra. Las coordenadas de cada uno son $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $A'(0, 0, 2.5)$, $B'(2, 0, 2.5)$, $C'(2, 3, 2.5)$ y $D'(0, 3, 2.5)$.

- (b) Las dos vigas tienen la misma longitud. Una de las vigas es la diagonal del rectángulo $BB'C'C$. Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener su longitud.

$$\overline{BC'}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CC'}^2 \Rightarrow \overline{BC'}^2 = 3^2 + 2.5^2 = 15.25 \Rightarrow \overline{BC'} = \sqrt{15.25} = \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3.9 \text{ metros}$$

Cada una de las vigas tiene una longitud de $\frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3.9$ metros.

El plano π que contiene las dos vigas contiene el punto $A(0, 0, 0)$ y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi \\ \overrightarrow{AD} = (0,3,2.5) - (0,0,0) = (0,3,2.5) \\ \overrightarrow{AB} = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 3 & 2.5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 5y - 6z = 0}$$

El plano que contiene las vigas tiene ecuación $\pi : 5y - 6z = 0$.

- (c) Hallamos la longitud de la diagonal de la puerta de entrada. Esta será la longitud máxima que puede pasar por la puerta. Si es mayor o igual a 2.75 la lámina podrá entrar en el contenedor (suponemos que la lámina es muy delgada).

$$d^2 = 2^2 + 2.5^2 \Rightarrow d^2 = 10.25 \Rightarrow d = \sqrt{10.25} \approx 3.2016 \text{ metros}$$

La diagonal de la puerta de entrada tiene una longitud mayor de 2.75. La lámina puede entrar en el contenedor, y como la longitud de la base también es mayor de 2.75 puede entrar en su totalidad al contenedor. La lámina puede entrar en el contenedor y debe ser colocada de forma diagonal pues uno de los lados de la base tiene de longitud 2 metros, menor de 2.75 metros.

Problema B1. — Dado el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

(a) **[1.5 puntos]** Discute, según el parámetro k , el número de soluciones que tiene el sistema.

(b) **[1 punto]** Resuelve el sistema cuando sea posible.

(a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 3 + k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1) \cdot 3}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ y $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2.3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Estudiamos el rango de $A = \begin{pmatrix} 2.3 & 1 & 0 \\ 0 & 2.3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor que resulta de

quitar la primera columna y la última fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2.3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 2.3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2.3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1+\sqrt{13}}{2} + 1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \neq 0. \text{ El rango de la matriz } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1.3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Estudiamos el rango de $A = \begin{pmatrix} -1.3 & 1 & 0 \\ 0 & -1.3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor que resulta

de quitar la primera columna y la última fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1.3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1.3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1.3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1-\sqrt{13}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \neq 0. \text{ El rango de la matriz } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ y $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ o $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

(b) Resolvemos el sistema para $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Esto implica que $-k^2 + k + 3 \neq 0$.

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - kx \\ (k-1)y + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)(1-kx) + 3x = 0 \Rightarrow k - k^2x - 1 + kx + 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-k^2 + k + 3)x = 1 - k \Rightarrow \{-k^2 + k + 3 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1 - k}{-k^2 + k + 3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 - k \frac{1 - k}{-k^2 + k + 3} = 1 - \frac{k - k^2}{-k^2 + k + 3} = \frac{-k^2 + k + 3 - k + k^2}{-k^2 + k + 3} = \boxed{\frac{3}{-k^2 + k + 3} = y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -k \frac{3}{-k^2 + k + 3} = \frac{-3k}{-k^2 + k + 3}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{1 - k}{-k^2 + k + 3}$, $y = \frac{3}{-k^2 + k + 3}$, $z = \frac{-3k}{-k^2 + k + 3}$.

Problema B2. — Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 €. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

(a) **[1 punto]** ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 € y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

(b) **[1.5 puntos]** Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

(a) Llamamos “x”, “y” y “z” al número de perritos calientes, hamburguesas y refrescos vendidos en un día. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información de que disponemos.

“Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 € y se han recaudado 328 €” $\rightarrow 3.5x + 4y + 1.5z = 328$.

“Se han vendido 132 artículos al cabo del día” $\rightarrow x + y + z = 132$.

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 132 \\ 3.5x + 4y + 1.5z = 328 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 132 \\ 7x + 8y + 3z = 656 \end{array} \right\}$$

Tenemos 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones. Nos falta información para obtener el precio de cada artículo. Intentamos resolverlo y obtenemos la expresión de las soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 132 \\ 7x + 8y + 3z = 656 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 132 - y - x \\ 7x + 8y + 3z = 656 \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 8y + 3(132 - y - x) = 656 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 8y + 396 - 3y - 3x = 656 \Rightarrow 4x + 5y = 260 \Rightarrow \boxed{y = \frac{260 - 4x}{5} = 52 - \frac{4x}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 132 - 52 + \frac{4x}{5} - x = 80 - \frac{x}{5}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 52 - \frac{4x}{5} \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right.$$

Como el número de artículos tiene que ser entero y positivo solo podemos afirmar que x debe ser múltiplo de 5, que $52 - \frac{4x}{5} \geq 0 \rightarrow 52 \geq \frac{4x}{5} \rightarrow 260 \geq 4x \rightarrow x \leq \frac{260}{4} = 65$ y que

$80 - \frac{x}{5} \geq 0 \rightarrow 80 \geq \frac{x}{5} \rightarrow 400 \geq x$. El número de perritos calientes debe ser un múltiplo de 5 menor o igual a 65.

(b) Añadimos al sistema el valor $y = 20$ y obtenemos el resto de valores.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 52 - \frac{4x}{5} = 20 \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4x}{5} = -32 \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x = 160 \rightarrow \boxed{x = \frac{160}{4} = 40} \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{z = 80 - \frac{40}{5} = 72}$$

Se vendieron 40 perritos calientes, 20 hamburguesas y 72 refrescos.

Problema C1. — Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

(a) [1 punto] Calcula la recta tangente, r , a la curva y en el punto $(2, 0)$.

(b) [1.5 puntos] Calcula el área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r .

(a) Hallamos la ecuación de la recta tangente pedida.

$$\left. \begin{array}{l} y(2) = 0 \\ y'(x) = 2x \rightarrow y'(2) = 4 \\ y - y(2) = y'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 4(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 8}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = 4x - 8$.

(b) Obtenemos los puntos de corte de la recta tangente y la curva. Sabemos que al menos se cortan en $x = 2$. También determinamos los puntos de corte de la curva con el eje OY.

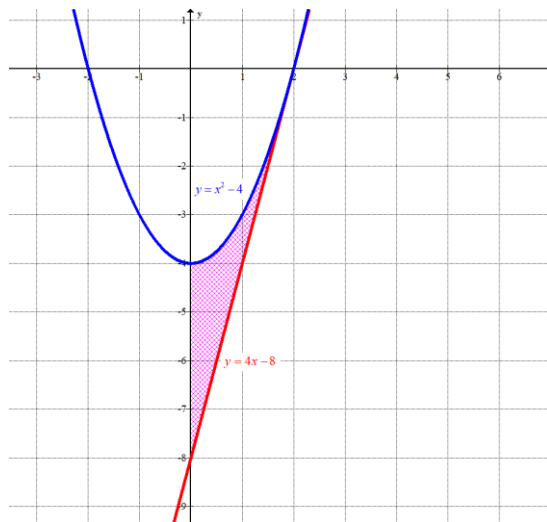
$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^2 - 4 \\ y = 4x - 8 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 4x - 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^2 - 4 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(0) = 0^2 - 4 = -4$$

El área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r es el valor absoluto de la integral definida de la curva menos la tangente entre 0 y 2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 - 4 - (4x - 8) dx &= \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right] = \frac{8}{3} - 8 + 8 = \boxed{\frac{8}{3} \simeq 2.6667} \end{aligned}$$

El área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r tiene un valor de $\frac{8}{3} \simeq 2.6667$ unidades cuadradas.



Problema C2. — La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función

$$H(t) = \frac{20}{1 + e^{-t}},$$

donde el tiempo está medido en segundos.

(a) **[0.5 puntos]** ¿Cuál es la concentración inicial?

(b) **[1 punto]** Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

(c) **[1 punto]** Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

(a) Hallamos el valor de la concentración para $t = 0$: $H(0) = \frac{20}{1 + e^{-0}} = \frac{20}{2} = 10$.

La concentración inicial es del 10%.

(b) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$H(t) = \frac{20}{1 + e^{-t}} \Rightarrow H'(t) = \frac{0 - (-e^{-t})20}{(1 + e^{-t})^2} = \frac{20e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} = \frac{20}{e^t(1 + e^{-t})^2}$$

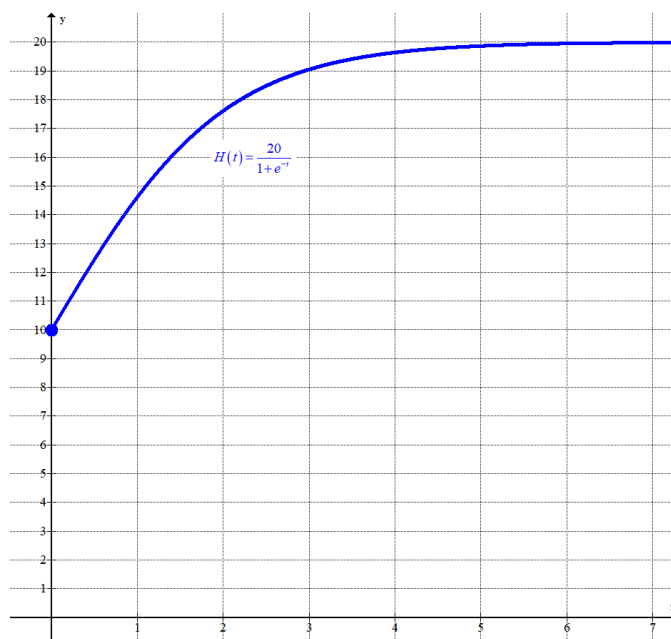
Esta expresión de la derivada nunca se anula. Además, el denominador es siempre positivo por lo que la derivada siempre es positiva y la función siempre es creciente.

$$\left. \begin{array}{l} 20 > 0 \\ e^t > 0 \\ e^{-t} > 0 \rightarrow (1 + e^{-t})^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow H'(t) = \frac{20}{e^t(1 + e^{-t})^2} > 0$$

(c) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{1 + e^{-t}} = \frac{20}{1 + e^{-\infty}} = \frac{20}{1 + 0} = 20$$

La concentración a medida que pasa el tiempo tiende a acercarse al 20%.



Problema D1. — Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45% de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40% han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los productos no averiados, se sabe que el 55% también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

- (a) **[0.75 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?
- (b) **[0.75 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?
- (c) **[1 punto]** Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

Llamamos A al suceso “el dron se avería antes de los 5 años” y M a “el dron ha tenido un mal uso”. Sabemos que $P(A) = 0.45$, $P(M / A) = 0.40$ y $P(M / \bar{A}) = 0.55$.

- (a) Nos piden calcular $P(\bar{A})$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.45 = \boxed{0.55}$$

- (b) Debemos calcular $P(\bar{M} / \bar{A})$.

$$P(\bar{M} / \bar{A}) = 1 - P(M / \bar{A}) = 1 - 0.55 = \boxed{0.45}$$

- (c) Nos piden calcular $P(\bar{A} / M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} / M) &= \frac{P(\bar{A} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(\bar{A})(M / \bar{A})}{P(M)} = \frac{P(\bar{A})(M / \bar{A})}{P(\bar{A})(M / \bar{A}) + P(A)(M / A)} = \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.55}{0.55 \cdot 0.55 + 0.45 \cdot 0.4} = \boxed{\frac{121}{163} \approx 0.6269} \end{aligned}$$

Problema D2. — Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A' y B' los sucesos complementarios de A y B , respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B .

Dadas las probabilidades $P(A) = 0.75$, $P(B') = 0.45$ y $P(A - B) = 0.3$, calcula:

(a) [0.75 puntos] $P(A \cap B)$.

(b) [0.75 puntos] $P(B - A)$.

(c) [1 punto] $P(A' \cap B')$.

El suceso $A - B$ se puede expresar también como $A \cap B'$. Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados y que nos permitirá obtener el resto de información.

	B	B'	
A		0.3	0.75
A'			
		0.45	1

Completamos la tabla

	B	B'	
A	0.45	0.3	0.75
A'	0.10	0.15	0.25
	0.55	0.45	1

(a) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(A \cap B) = 0.45$.

(b) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(B - A) = P(B \cap A') = 0.1$.

(c) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(A' \cap B') = 0.15$.