

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de realitzar expressant de forma raonada el procés seguit per resoldre-les, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. Es valorarà el grau d'acompliment amb un màxim de 0,25 punts cada exercici.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tindran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que puguin veure's afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent.
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corregiu-ne els que apareixen primer.

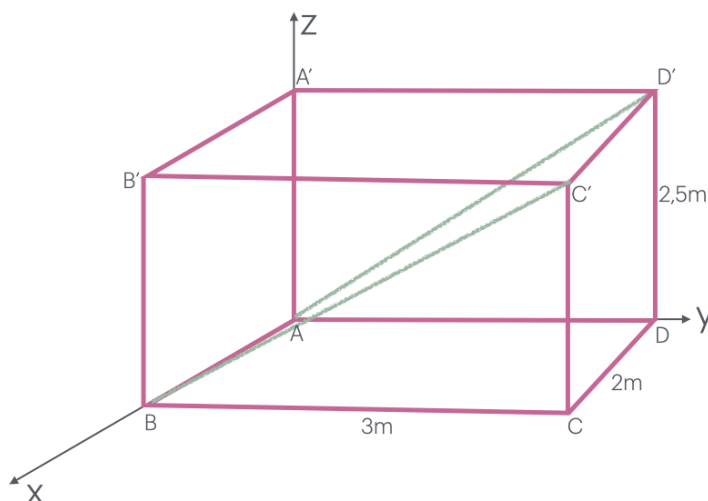
Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

Part A.

Problema A1. — Solució.

- (a) Denotem cada un dels vèrtexs del prisma rectangular tal com es mostra a la figura. Notem que, segons el vèrtex que s'hagi situat a l'origen, les coordenades dels punts podrien canviar.



Notem que el punt B resulta de desplaçar-se, des de l'origen (punt A), 2 m sobre l'eix OX . Llavors $B = (2, 0, 0)$. Similarment, $D = (0, 3, 0)$ i $A' = (0, 0, 2.5)$.

El punt C resulta de desplaçar-se des de B , 3 m sobre la recta paral·lela a l'eix OY . Aleshores, $C = (2, 3, 0)$. Movent-nos des de C 2.5 m paral·lelament a l'eix OZ tenim que $C' = (2, 3, 2.5)$. Similarment, $B' = (2, 0, 2.5)$ i $D' = (0, 3, 2.5)$.

Aleshores, les coordenades dels punts que cercam són:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0), & B &= (2, 0, 0), & C &= (2, 3, 0), & D &= (0, 3, 0), \\ A' &= (0, 0, 2.5), & B' &= (2, 0, 2.5), & C' &= (2, 3, 2.5), & D' &= (0, 3, 2.5). \end{aligned}$$

- (b) Segons l'enunciat i la notació que hem escollit, les bigues que volem calcular uneixen A amb D' i B amb C' . Notem, a més, que, per simetria, ambdues longituds fan la mateixa mida. Aleshores, és suficient en calcular la longitud de la primera (A amb D'). Una manera de fer-ho és calcular el vector que uneix ambdós punts i mirar quin mòdul té. Llavors,

$$\begin{aligned} \vec{AD'} &= (0, 3, 2.5) \\ |\vec{AD'}| &= \sqrt{3^2 + 2.5^2} = \sqrt{15.25} \approx 3.9051 \text{ m.} \end{aligned}$$

Calculem ara el pla que conté les dues bigues que hem posat (AD' i BC').

Per construcció, les dues bigues són paral·leles, i el pla que les conté també conté els segments AB i $C'D'$ del contenidor (segons notació de la figura). Llavors cerquem l'equació del pla que conté el punt A i té vectors directors $\vec{AD'}$ i $\vec{AB}$.

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0), \\ \vec{AD'} &= (0, 3, 2.5), \\ \vec{AB} &= (2, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 2.5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 5, -6).$$

D'aquesta manera, les possibles expressions del pla serien

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 5\gamma, \\ z = -6\gamma, \end{cases} \quad (\text{vectorial}), \quad 5y - 6z = 0 \quad (\text{explícita}).$$

- (c) Notem que la porta del contenidor fa 2.5 m d'altura i 2 m d'amplada, amb una diagonal de $|\vec{BA'}| = |(2, 0, 2.5)| = \sqrt{2^2 + 2.5^2} = \sqrt{10.25} \approx 3.2 > 3$ m. A més, la profunditat del contenidor és de 3 m. Per tant sí que podem introduir la làmina de ferro "diagonalment".

Criteris:

- (a) **[1 punt]** 0.2 punts per situar correctament els eixos de referència. 0.1 punts per cada conjunt de coordenades ben calculades (0.8 punts per trobar A , B , C , D , A' , B' , C' , D').
- (b) **[1 punt]** 0.5 punts per calcular la longitud de les bigues (0.25 punts per cada una) i 0.5 punts per calcular l'equació del pla que les conté (0.15 punts per cada vector director ben calculat i 0.2 punts per indicar l'equació del pla).
- (c) **[0.5 punts]** 0.25 punts per l'explicació del procediment a seguir i 0.25 punts per l'execució del plantejament i la solució correcta.

Part B.

Problema B1. — *Solució.* Considerem el sistema en la seva forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

- (a) Notem que aquest apartat es podria resoldre de diverses maneres, entre elles, emprant el teorema de Rouché-Frobenius (comparar rangs) o Gauss. Facem-ho comparant rangs.

– $|A| = -k^2 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ o $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Aleshores, si $k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ i $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$ i tenim 3 incògnites. Per tant, el sistema és compatible determinat (una única solució).

– si $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ o $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, notem que el determinant de menor M_{33} és

$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2 \neq 0.$$

Aleshores, $\text{Rang}(A) = 2$ en ambdós casos.

Això no obstant, si miram el rang de la matriu ampliada $(A|\mathbf{b})$ resultant d'orlar sobre aquest menor (i per tant, substituint la tercera columna de A pel vector $\mathbf{b}$ es té que

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3k \neq 0,$$

per a qualsevol valor de k . Aleshores, en ambdós casos $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$. Per tant, el sistema no té solucions per a aquests dos valors del paràmetre k .

Taula resum:

Valor de k	$\text{Rang}(A)$	$\text{Rang}(A \mathbf{b})$	Nombre d'incògnites	Tipus de sistema
$k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ i $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$	3	3	3	SCD - una solució
$k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$	2	3	3	SI - cap solució
$k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$	2	3	3	SI - cap solució

- (b) Suposem $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ i $k \neq \frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Resolent el sistema directament pel mètode de substitució, tenim que

$$y = 1 - kx$$

$$z = -ky = -k(1 - kx) = -k + k^2x$$

$$3x - (1 - kx) - (-k + k^2x) = 0 \Rightarrow 3x - 1 + kx + k - k^2x = 0 \Rightarrow (3 + k - k^2)x = 1 - k$$

Notem que podem calcular x , ja que suposam que $3 + k - k^2 \neq 0$ (determinant de A). Aleshores, la solució del sistema és

$$x = \frac{1 - k}{3 + k - k^2}, \quad y = 1 - \frac{k(1 - k)}{3 + k - k^2}, \quad z = -k + \frac{k^2(1 - k)}{3 + k - k^2}.$$

Criteris:

- (a) **[1.5 punts]** 0.3 punts per calcular bé el determinant de A , 0.4 punts per discutir correctament cada cas.
- (b) **[1 punt]** Es lleven 0.4 punts per cada variable mal calculada. Els errors de càlcul es penalitzen amb -0.2 punts, màxim 3 errors. Si resolen un cas particular, la puntuació màxima és de 0 punts.

Problema B2. — *Solució.*

- (a) Sigui x el nombre de frànkfurts venuts, y el nombre d'hamburgueses i z el nombre de refrescs, de l'enunciat s'extreuen les dues informacions següents:

$$\begin{cases} 3.50x + 4y + 1.5z = 328, \\ x + y + z = 132. \end{cases}$$

Com que tenim 2 equacions i 3 incògnites, no podem resoldre unívocament el sistema i, per tant, no podem reportar la informació que se'ns demana. Només es podrien reportar dos articles en funció d'un tercer, ja que

$$\begin{vmatrix} 3.50 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -0.5 \neq 0.$$

- (b) Ara ens diuen, a més, que s'han venut 20 hamburgueses. Llavors $y = 20$ i el sistema es reescriu com a

$$\begin{cases} 3.50x + 80 + 1.5z = 328, \\ x + 20 + z = 132, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3.50x + 1.5z = 248, \\ x + z = 112, \end{cases}$$

el qual és un sistema de 2 equacions i 2 incògnites. Resolent-lo s'obté que $x = 40$ i $z = 72$. Aleshores, s'han venut 40 frànkfurts, 20 hamburgueses i 72 refrescs.

Criteris:

- (a) **[1 punt]** 0.25 punts per la resposta correcta i 0.75 punts per la justificació. Si algun alumne ha indicat que sí que és possible, però especificant que és deixant-ho en funció d'un dels articles, es dona per correcte. És a dir, si veuen que és un SCI i especifiquen que hi ha més d'una solució, es dona per vàlid. Si no especifiquen que hi pot haver moltes solucions, -0.25 punts.
- (b) **[1.5 punts]** 0.25 punts per indicar què representa cada variable, 0.5 punts per escriure el sistema a resoldre correctament, 0.5 punts per resoldre el sistema (-0.2 per error de càlcul), i 0.25 punts per indicar la solució final.

Part C.

Problema C1. — *Solució.*

(a) Volem calcular la recta tangent a la corba $y = x^2 - 4$ en el punt $(2, 0)$. Així doncs,

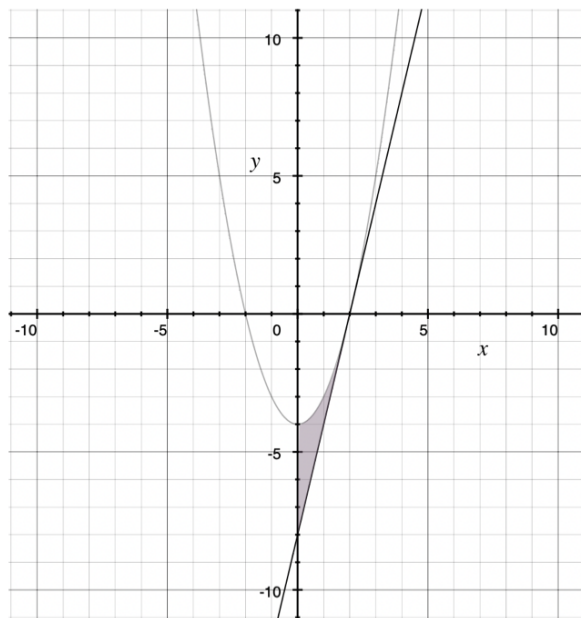
- El pendent de la recta tangent és $m = y'(2)$. Notem que $y'(x) = 2x$, per tant, $y'(2) = 4$.
- La recta passa pel punt $(2, 0)$ i té pendent $m = 4$. Aleshores, l'equació de la recta tangent és

$$y = 0 + 4(x - 2) = 4x - 8.$$

(b) Representem ara les corbes $y = x^2 - 4$, $y = 4x - 8$ i l'eix OY per veure la superfície que volem considerar:

- $y = x^2 - 4$ és una paràbola que té el vèrtex a $(0, -4)$ i passa pels punts $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.
- $y = 4x - 8$ és una recta que passa pels punts $(2, 0)$ i $(0, -8)$.

Per tant, la regió que hem de considerar és la regió morada de la figura.



Notem que ja tenim calculat que els extrems d'integració són $x = 0$ i $x = 2$. Així, hem de resoldre la integral

$$\int_0^2 (x^2 - 4) - (4x - 8) dx = \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx = \left. \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 4\frac{2^2}{2} + 8 - 0 = \frac{2^3}{3} \approx 2.67u^2$$

Criteris:

- (a) **[1 punt]** 0.5 punts per calcular correctament el pendent de la recta i 0.5 punts per donar l'expressió correcta de la recta tangent.

- (b) **[1.5 punts]** 0.75 punts per plantejar correctament la integral a calcular (es penalitza amb -0.5 punts si només calculen correctament una de les dues coses - extrems o la diferència de funcions). 0.5 punts per resoldre bé la integral (0.25 punts per integrar i 0.25 punts per avaluar bé els extrems). 0.25 punts per les unitats.

Problema C2. — *Solució.*

- (a) Volem calcular $H(t)$ quan $t = 0$. Aleshores,

$$H(0) = \frac{20}{1 + e^{-0}} = \frac{20}{2} = 10\%.$$

Per tant, la concentració inicial és del 10%.

- (b) Volem comprovar que la funció $H(t)$ és sempre creixent. Per això calcularem la derivada i veurem que aquesta sempre és positiva. En efecte,

$$H'(t) = \frac{-20(-e^{-t})}{(1 + e^{-t})^2} = \frac{20e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} > 0, \text{ ja que } e^{-t} > 0 \quad \forall t > 0.$$

- (c) Volem calcular el límit de $H(t)$ quan t tendeix a $+\infty$. És a dir,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \frac{20}{1 + 0} = 20\%.$$

Criteris:

- (a) **[0.5 punts]** 0.25 punts pel plantejament, 0.25 punts per l'execució correcta.
 (b) **[1 punt]** 0.5 punts pel plantejament i notació, 0.5 punts per l'execució correcta.
 (c) **[1 punt]** 0.5 punts pel plantejament i notació, 0.5 punts per l'execució correcta.

Part D.

Problema D1. — *Solució.* Sigui E l'esdeveniment “espenyat abans dels 5 anys” i M l'esdeveniment “mal ús per part dels usuaris”. De l'enunciat, sabem que

$$P(E) = \frac{45}{100}, \quad P(M|E) = \frac{40}{100}, \quad P(M|\text{no } E) = \frac{55}{100}.$$

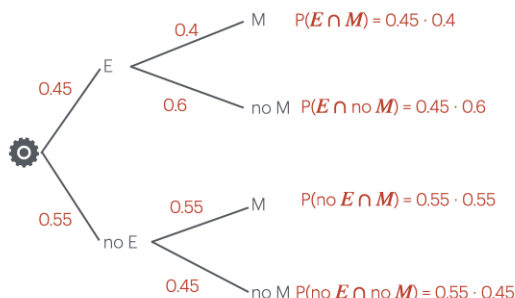
Aleshores,

$$(a) \quad P(\text{no } E) = 1 - P(E) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}.$$

$$(b) \quad P(\text{no } M|\text{no } E) = 1 - P(M|\text{no } E) = 1 - \frac{55}{100} = \frac{45}{100}.$$

$$(c) \quad P(\text{no } E|M) = \frac{P(\text{no } E \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{55}{100} \cdot \frac{55}{100}}{\frac{40}{100} \cdot \frac{45}{100} + \frac{55}{100} \cdot \frac{55}{100}} = \frac{0,3025}{0,18 + 0,3025} \approx 0,6269.$$

Tot seguit determinam el diagrama d'arbre amb totes les probabilitats calculades.



Criteris:

- (a) **[0.75 punts]** 0.25 punts pel plantejament correcte i notació, 0.25 punts per la resposta correcta i 0.25 punts per l'execució.
- (b) **[0.75 punts]** 0.25 punts pel plantejament correcte i notació, 0.25 punts per la resposta correcta i 0.25 punts per l'execució.
- (c) **[1 punt]** 0.25 punts pel plantejament correcte i notació, 0.25 punts per la resposta correcta i 0.5 punts per l'execució.

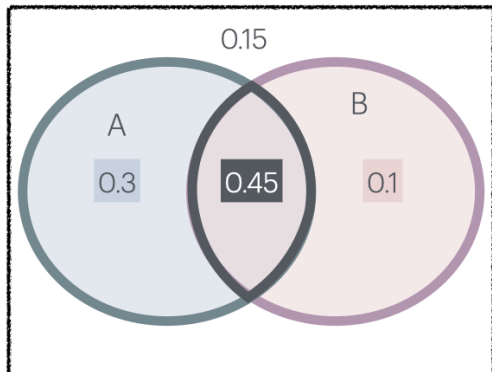
Es penalitza tot l'apartat (puntuació 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0, 1]$).

Problema D2. — *Solució.*

(a) $P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = 0.75 - 0.3 = 0.45.$

(b) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(B') - P(A \cap B) = 1 - 0.45 - 0.45 = 0.1.$

(c) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B - A)] = 1 - 0.75 - 0.1 = 0.15.$



Criteris:

(a) **[0.75 punts]** 0.5 punts pel procediment escrit i la notació, 0.25 punts per la resposta correcta.

(b) **[0.75 punts]** 0.5 punts pel procediment escrit i la notació, 0.25 punts per la resposta correcta.

(c) **[1 punt]** 0.5 punts pel procediment escrit i la notació, 0.5 punts per la resposta correcta.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0, 1]$).