

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

Criterios de calificación

- A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.
- B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.
- C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.
- D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).
- E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.
- F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.
- G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.
- H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)
- I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

- J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.
- K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.
- L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.
- M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.
- N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.
- O) Las faltas de ortografía se penalizan. A partir de la tercera falta de ortografía se penalizará con 0.1 puntos cada nueva falta ortográfica hasta un máximo de 1 punto sobre el total de la calificación del examen.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN
--

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5t}}$$

- 0.25 a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?
- 0.75 b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.
- 0.75 c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.
- 0.75 d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

Solución:

a) $H(0) = \frac{6400}{1+159e^0} = \frac{6400}{160} = 40$

La colonia de hormigas cuenta, inicialmente, con 40 individuos.

- b) Para calcular la tasa de crecimiento medio del primer año:

$$TVM[0,12] = \frac{H(12)-H(0)}{12-0}, \text{ para lo que se necesita calcular } H(0) \text{ y } H(12):$$

$$H(0) = 40 \text{ (apartado a)}$$

$$H(12) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 12}} = \frac{6400}{1 + 159e^{-6}} = 4591 \text{ individuos}$$

Queda:

$$TVM[0,12] = \frac{H(12) - H(0)}{12 - 0} = \frac{4591 - 40}{12} = 379 \text{ individuos por mes}$$

Para el segundo año será:

$$TVM[12,24] = \frac{H(24) - H(12)}{24 - 12}$$
$$H(24) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 24}} = \frac{6400}{1 + 159e^{-12}} = 6394 \text{ individuos}$$
$$TVM[12,24] = \frac{6394 - 4591}{24 - 12} = \frac{1803}{12} = 150 \text{ individuos por mes}$$

La tasa media de crecimiento el primer año es de 379 hormigas y el segundo año es de 150 hormigas, con lo que se está frenando el crecimiento de la colonia de hormigas en el segundo año.

- c) Para justificar que el modelo siempre es creciente comprobamos que la derivada siempre es positiva. La derivada de la función es:

$$H'(t) = \frac{-6400 \cdot [159 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5t}]}{(1 + 159e^{-0,5t})^2} = \frac{508800e^{-0,5t}}{(1 + 159e^{-0,5t})^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, siempre será positivo.

Y en el numerador tenemos una constante positiva multiplicada por una exponencial, que siempre es positiva.

Esto indica que es creciente.

Comprobamos que no crece sin control.

Calculamos el límite cuando el tiempo se va a infinito para observar su tendencia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6400}{1 + 159e^{-0,5t}} = \frac{6400}{1 + 159e^{-\infty}} = \frac{6400}{1 + 0} = 6400$$

La colonia de hormigas crece todo el tiempo, según este modelo, pero está controlado por la capacidad de carga que, según el modelo propuesto, será de 6400 individuos.

- d) La carga máxima es de 6400 individuos y tenemos que averiguar en qué instante se alcanza la mitad, esto es, $\frac{6400}{2} = 3200$ individuos:

$$H(t) = 3200 \Rightarrow \frac{6400}{1 + 159e^{-0,5t}} = 3200 \Rightarrow \frac{6400}{3200} = 1 + 159e^{-0,5t} \Rightarrow 2 - 1 = 159e^{-0,5t}$$

$$\Rightarrow 1 = 159e^{-0,5t} \Rightarrow \frac{1}{159} = e^{-0,5t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{159}\right) = -0,5t \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{159}\right)}{-0,5} = 10,14$$

La población de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad a los 10 meses.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2.5

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

Solución:

El problema nos facilita la siguiente información:

	Proteína	Grasa	Carbohidratos
P1-Vegetal	20	10	10
P2-Harinas	40	20	30
P3-Carnes	60	10	30
1000 kg	36	12	20

Nos preguntan por la cantidad de cada producto (P1, P2, P3) que necesitamos para poder cumplir con los porcentajes que queremos que estén presentes en los 1000 kg.

Sean las siguientes variables:

x = cantidad (Kg) de producto vegetal (P1)

y = cantidad (Kg) de producto de harina (P2)

z = cantidad (Kg) de producto cárnico (P3)

Al seleccionar estas cantidades de productos, aportamos los porcentajes correspondientes de proteínas, grasas y energía. Y queremos lograr una mezcla que en 1000 kg verifique los porcentajes señalados en la última fila de la tabla. Así, las ecuaciones serán las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 0.20x + 0.40y + 0.60z = 0.36 \cdot 1000 \\ 0.10x + 0.20y + 0.10z = 0.12 \cdot 1000 \\ 0.10x + 0.30y + 0.30z = 0.20 \cdot 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.20x + 0.40y + 0.60z = 360 \\ 0.10x + 0.20y + 0.10z = 120 \\ 0.10x + 0.30y + 0.30z = 200 \end{array} \right\}$$
$$\left. \begin{array}{l} 20x + 40y + 60z = 36000 \\ \Rightarrow 10x + 20y + 10z = 12000 \\ 10x + 30y + 30z = 20000 \end{array} \right\}$$

Mediante el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 40y + 60z = 36000 \\ 10x + 20y + 10z = 12000 \\ 10x + 30y + 30z = 20000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 40y + 60z = 36000 \\ -20z = -6000 \\ -20y = -4000 \end{array} \right\}$$

Por tanto, la solución del sistema será:

$$Z = 300, y = 200, x = 500$$

En este problema lo que hemos encontrado es que la cantidad que debemos tomar de cada tipo de pienso es:

P1: 500 kg, P2: 200 Kg, P3: 300 kg. Con ello tendremos los 1000kg de pienso en el que se verifican las condiciones anteriormente indicadas para las proteínas, grasas y carbohidratos.

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

2.5

$$\begin{cases} 4X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución.

A. Hay que empezar calculando la inversa de la matriz dada. Para ello será necesario:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos ahora el producto anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

El sistema queda planteado como:

$$\begin{cases} 4X - 5Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X - 5Y = A \\ 6X + 4Y = B \end{cases}$$

El sistema se resuelve por Gauss y queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 4X - 5Y = A \\ 6X + 4Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X - 5Y = A \\ 46Y = 4B - 6A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{4}(A + 5Y) \\ Y = \frac{1}{46}(4B - 6A) \end{cases}$$

Realizamos las operaciones indicadas:

$$Y = \frac{1}{46}(4B - 6A) = \frac{1}{46} \left(4 \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$Y = \frac{1}{46} \left(\begin{pmatrix} 40 & 16 & -40 \\ 48 & 40 & 88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 30 & -6 \\ -48 & 6 & -42 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 46 & 46 & -46 \\ 0 & 46 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}(A + 5Y) = X = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases} \quad \pi: x - y + 2z - 5 = 0$$

- 1.5 a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s , contenida en el plano π , que corta perpendicularmente a r .
- 1 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π .

Solución.

a) Para calcular la intersección del plano y la recta, vamos a pasar a paramétrica la recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} = (2, 1, -3)$$

Averiguamos un punto de la recta r . Para ello hacemos $x = 0$ y resolvemos:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2z = 10 \end{cases}$$

Por lo que, $z = 5, y = -5, x = 0$

El punto de la recta r será: $A(0, -5, 5)$

La ecuación de la recta en paramétrica será:

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -5 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano y buscamos el punto de corte:

$$x - y + 2z - 5 = 2\lambda + 5 - \lambda + 10 - 6\lambda - 5 = 10 - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Con lo que el punto de corte será:

$P(4, -3, -1)$

Ahora buscamos la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y contenida en el plano.

Para ello, el vector director de la recta buscada será perpendicular al vector director de r y al vector normal al plano, por lo que calculamos el producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{v}_r = (2, 1, -3), \vec{n}(1, -1, 2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k} = (-1, -7, -3)$$

$$\vec{v}_s(-1, -7, -3)$$

Además, como la nueva recta s debe ser secante a la recta r y estar en el plano π , utilizamos el punto de corte averiguado anteriormente:

$$P(4, -3, -1)$$

Luego, la ecuación de la recta s será:

$$s: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -3 - 7\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

b) El ángulo entre la recta y el plano será:

$$\vec{v}_r = (2, 1, -3), \vec{n}(1, -1, 2)$$

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|}\right) = \arcsen\left(\frac{|2 - 1 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}}\right) = \arcsen\left(\frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}\right)$$

$$\alpha = \arcsen(0.5455) = 33.06^\circ = 33^\circ 3' 42.83''$$

3B. En el espacio tridimensional, se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \quad s: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$$

- 1.5 a) Comprobar que r y s son coplanarias.
1 b) Hallar la ecuación del plano que las contiene.

Solución.

a) Dos rectas, en el espacio tridimensional, son coplanarias si no se cruzan.

Calculamos los vectores directores de las rectas r y s :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (-4, 2, -1) \quad \vec{v}_s(1, 3, 2)$$

Ahora comprobamos que realmente se cortan y que no se cruzan. Buscamos un punto de cada recta con el que generar un nuevo vector que debe ser linealmente dependiente con los vectores directores.

$P \in r$, hacemos $z=0$,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow y = 4; \quad P(-1, 4, 0)$$

$Q \in s$, hacemos $z=1$,

$$x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2} \rightarrow x - 1 = \frac{y}{3} = 1 \rightarrow x = 2; y = 3; \quad Q(2, 3, 1)$$

El vector que va de una recta a la otra será: $\overrightarrow{PQ}(3, -1, 1)$

Veamos que no se cruzan:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0$$

Como los vectores son linealmente dependientes, se confirma que las rectas son coplanarias.

b) Para hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas necesitamos un punto y dos vectores directores.

$P(-1, 4, 0)$, $\vec{v}_r(-4, 2, 1)$, $\vec{v}_s(1, 3, 2)$

$$\begin{vmatrix} x + 1 & y - 4 & z \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7x + 7y - 14z - 21 = 0$$

La ecuación del plano que las contiene será: $x + y - 2z = 3$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

- 1.5 a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.
- 1 b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?

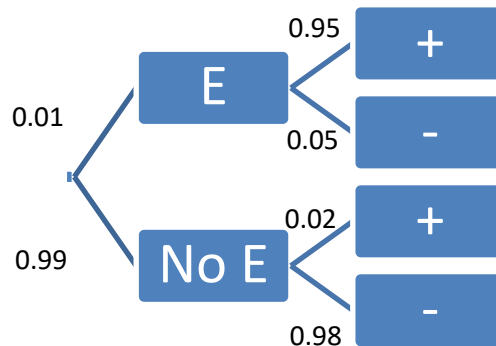
Solución:

Construimos el diagrama de árbol conociendo que:

Definimos los siguientes sucesos: E = 'estar enfermo', $\bar{E}$ = 'no estar enfermo'

$+$ = 'prueba dé positivo', $-$ = 'prueba dé negativo'

Sensibilidad: $P(+ \mid E) = 0.95$; Especificidad: $P(- \mid \bar{E}) = 0.98$



a) Nos piden que calculemos la siguiente probabilidad que se resuelve mediante el teorema de Bayes:

$$P(E \mid +) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(+) = P(E) \cdot P(+ \mid E) + P(\bar{E}) \cdot P(+ \mid \bar{E}) = 0.01 \cdot 0.95 + 0.99 \cdot 0.02 = 0.0095 + 0.0198 = 0.0293$$

$$P(E \mid +) = \frac{0.01 \cdot 0.95}{0.0293} = \frac{0.0095}{0.0293} = 0.3242$$

La probabilidad de que está realmente enfermo es de 0.3242

b) Sabemos que ha dado negativo y nos piden la probabilidad de que estén enfermo, aplicando el teorema de Bayes:

$$P(E \mid -) = \frac{P(E \cap -)}{P(-)}$$

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0.0293 = 0.9707$$

$$P(E \mid -) = \frac{0.01 \cdot 0.05}{0.9707} = 0.00052$$

En una población de 35000 individuos sometidos a esta prueba, cabe esperar:

$35000 \cdot 0.00052 = 18$ individuos que han dado negativo pero, realmente están enfermos.

No es cierto que se esperen más de 50 personas enfermas con resultado negativo en el test.

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

- 1.75 a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.
- 0.75 b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?

Solución.

$X = n^\circ$ de solicitudes de estudiantes de nuevo ingreso para plazas en residencias de estudiantes de islas no capitalinas

Las solicitudes enviadas son independientes.

$$p = 0.27$$

$$X \sim B(1800, 0.27)$$

Además, como, $np=486 > 5$ y $nq = 1314 > 5$ se puede aproximar con la normal

$$N(np, \sqrt{npq}) = N(486, 18.84)$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P(460 \leq X \leq 510) &= P(X \leq 510) - P(X \leq 460) = P\left(Z \leq \frac{510-486}{18.84}\right) - P\left(Z \leq \frac{460-486}{18.84}\right) = P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq -1.38) \\ &= P(Z \leq 0.73) - (1 - P(Z \leq 1.38)) = 0.8980 - (1 - 0.9162) = 0.8142 \end{aligned}$$

La probabilidad de que envíen entre 460 y 510 solicitudes es de 0.8142. Hay menos de un 90% de posibilidades de recibir esa cantidad de solicitudes.

$$\text{b)} \quad P(X > 525) = P\left(Z > \frac{525-486}{18.84}\right) = P(Z > 2.07) = 1 - P(Z \leq 2.07) = 1 - 0.9808 = 0.0192$$

Hay un 1.92% de posibilidades de que se reciban 525 o más solicitudes de estudiantes de otras islas.

