

Matemáticas II

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- a) [0.75 puntos] Estudia el rango de A , en función de los valores de a .
- b) [0.75 puntos] Estudia el rango de BA , en función de los valores de a .
- c) [1 punto] Considera $a = 1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.
- b) [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función: $f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right)$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de $f(x)$.

2B) Considera las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

- a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.
- b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.
- c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$ y el punto $P = (-3, 2, 2)$.

- a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
- b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .
- c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.

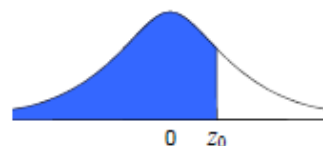
- a) [0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?
- b) [0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
- c) [1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
- c) [1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

SOLUCIONES**1A)** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- a) [0.75 puntos] Estudia el rango de AB , en función de los valores de a .
 b) [0.75 puntos] Estudia el rango de BA , en función de los valores de a .
 c) [1 punto] Considera $a=1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

a) Hallamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & -a & 2 \\ 1+6 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ 7 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -a & 2 \\ 7 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1+3a & 1 & 2a \end{vmatrix} =$$

$$= a(4a - 4 - 12a + 14 - 2 - 6a + 14a - 8) = a \cdot 0 = 0$$

El determinante de AB es 0 por lo que su rango es menor de 3.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la segunda columna y la tercera

fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \neq 0$.

El rango de AB es 2 para cualquier valor de a .b) Obtenemos la expresión de la matriz BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a & 1+2a \\ -3+2 & 3+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1+2a \\ -1 & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Calculamos el determinante de la matriz BA y averiguamos cuando se anula.

$$|BA| = \begin{vmatrix} a-1 & 1+2a \\ -1 & 3+2a \end{vmatrix} = (a-1)(3+2a) + 1 + 2a = 3a + 2a^2 - 3 - 2a + 1 + 2a = 2a^2 + 3a - 2$$

$$|BA| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = a} \\ \frac{-3-5}{4} = \boxed{-2 = a} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

Situación 1. Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de BA es distinto de cero y el rango de BA es 2.

Situación 2. Si $a = \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de BA vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & 1+2\frac{1}{2} \\ -1 & 3+2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. El rango de BA es 1.

Situación 3. Si $a = -2$

En este caso el determinante de BA vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} -2-1 & 1+2(-2) \\ -1 & 3+2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. El rango de BA es 1.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$ el rango de BA es 2 y si $a = -2$ o $a = \frac{1}{2}$ el rango de BA es 1.

c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para $a = 1$ el determinante de BA es distinto de cero y tiene inversa. La calculamos.

$$BA = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+2 \\ -1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |BA| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0+3=3 \neq 0$$

$$(BA)^{-1} = \frac{\text{Adj}((BA)^T)}{|BA|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X .

$$X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15-21 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \rightarrow 2 \times 1$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.
 b) [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
 c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix}$ y la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ a-1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - \text{Fila 3}^a \\ a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -a^2 - a - 1 \\ a & 0 & -a^2 - a \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a & 0 & -a^2 - a \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2 + a + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(-a^2 - a) + 3a = -a^3 - \cancel{a^2} + \cancel{a} + a + 3a = -a^3 + 4a = a(4 - a^2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(4 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de a distinto de 0, -2 y 2 el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

Para $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y + z = 4 \\ -x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$. La primera ecuación y la tercera tienen el

primer miembro igual, pero el segundo distinto. Esta es una situación imposible y el sistema es incompatible.

Para $a = -2$ el sistema queda $\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3z + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = -2 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - z \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow -3(-2 - z) - 3z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 3z - 3z = 2 \Rightarrow 6 = 2 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

El sistema es incompatible.

Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x = 3z + 2 \\ y = -7z \end{cases} \Rightarrow 2(3z + 2) - 7z + z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z + 4 - 7z + z = 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: El sistema es compatible para cualquier valor de a distinto de -2 y 0 .

b) Considerando $a = -1$ el sistema queda $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el

apartado anterior sabemos que el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - z + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 4 \\ -2x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ -2(-4) - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2(-4) - 3z = 2 \Rightarrow -3z = -6 \Rightarrow \boxed{z = 2} \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución $x = -4, y = -2, z = 2$.

c) Considerando $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado

anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado y que sus infinitas soluciones tienen la expresión $x = 2 + 3\lambda; y = -7\lambda; z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2A) Considera la siguiente función: $f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right)$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de $f(x)$.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow f'(x) = (-2)e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) + e^{-2x} (2x - 3) =$$

$$= e^{-2x} (-2x^2 + 6x - 3) + e^{-2x} (2x - 3) = e^{-2x} (-2x^2 + 6x - 3 + 2x - 3) = e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) = 0 \Rightarrow \{e^{-2x} \neq 0\} \Rightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale
 $f'(0) = e^{-2 \cdot 0} (-2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 6) = -6 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale
 $f'(2) = e^{-2 \cdot 2} (-2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6) = \frac{2}{e^4} > 0$. La función crece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale
 $f'(4) = e^{-2 \cdot 4} (-2 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - 6) = \frac{-6}{e^8} < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(1, 3)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda de la función.

$$f'(x) = e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) = -2e^{-2x} (x^2 - 4x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -2(-2)e^{-2x} (x^2 - 4x + 3) - 2e^{-2x} (2x - 4) =$$

$$= -2e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) - 2e^{-2x} (2x - 4) = -2e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6 + 2x - 4) =$$

$$= -2e^{-2x}(-2x^2 + 10x - 10) = 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5) = 0 \Rightarrow \{e^{-2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx \boxed{3.6 = x} \\ \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx \boxed{1.38 = x} \end{cases}$$

Tenemos dos candidatos a punto de inflexión. Estudiamos la curvatura antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = 4e^{-2 \cdot 0}(0^2 - 5 \cdot 0 + 5) = 20 > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo}$$

$$\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale

$$f''(2) = 4e^{-2 \cdot 2}(2^2 - 5 \cdot 2 + 5) = \frac{-4}{e^4} < 0. \text{ La función es cóncava (∩) en el intervalo}$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale

$$f''(4) = 4e^{-2 \cdot 4}(4^2 - 5 \cdot 4 + 5) = \frac{4}{e^8} > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

La función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ y otro en $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Como } f\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} \left(\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3}{2} \right) = e^{\sqrt{5} - 5} \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2} \text{ y}$$

$$f\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} \left(\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3}{2} \right) = e^{-5 - \sqrt{5}} \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2e^{5 + \sqrt{5}}} \text{ los puntos}$$

$$\text{de inflexión tienen coordenadas } \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2e^{5 - \sqrt{5}}}\right) \text{ y } \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2e^{5 + \sqrt{5}}}\right).$$

c) Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + \frac{3}{2}}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{2e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

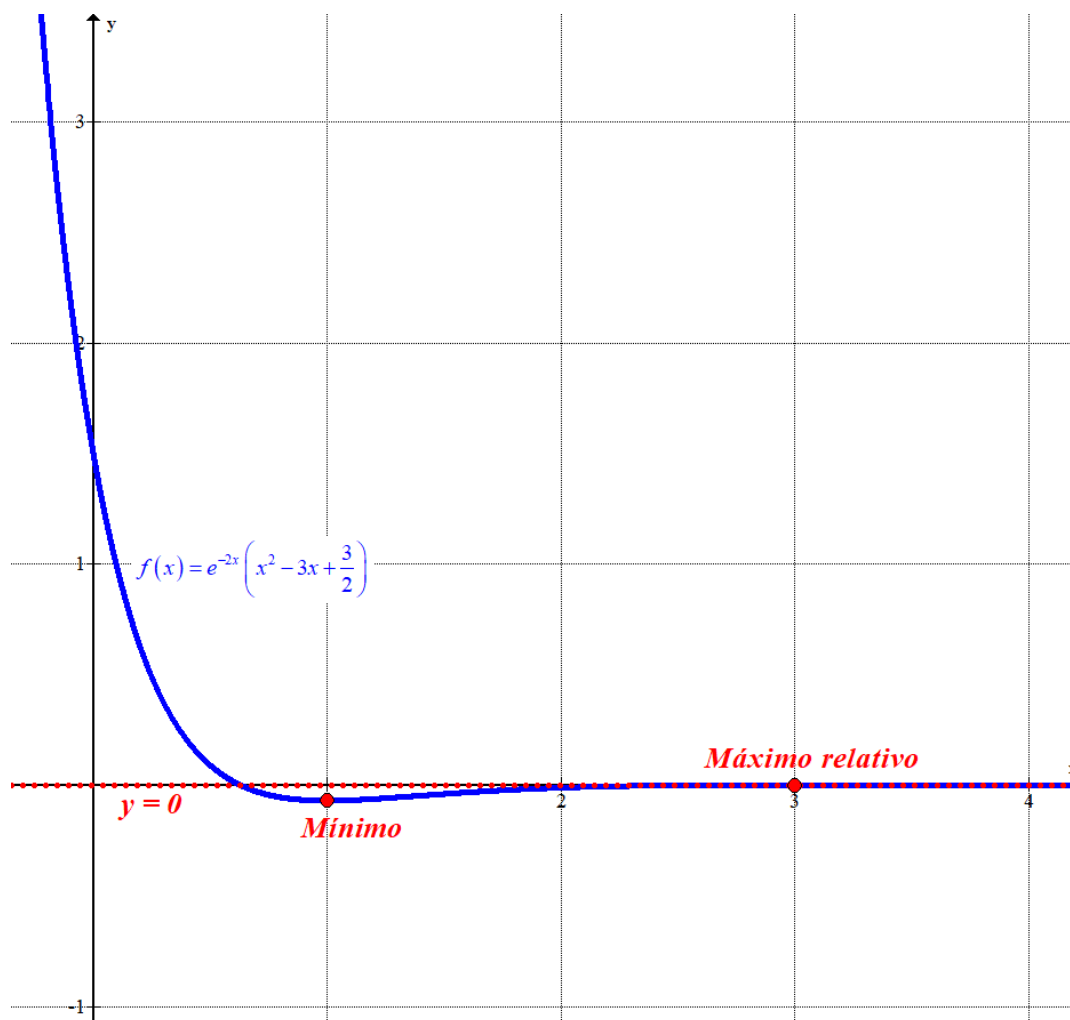
$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) = e^{+\infty} (+\infty) = +\infty$$

Cuando x tiende a $-\infty$ no existe asíntota horizontal.



2B) Considera las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

- a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.
 b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.
 c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a) Hallamos los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 1 - x^2 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

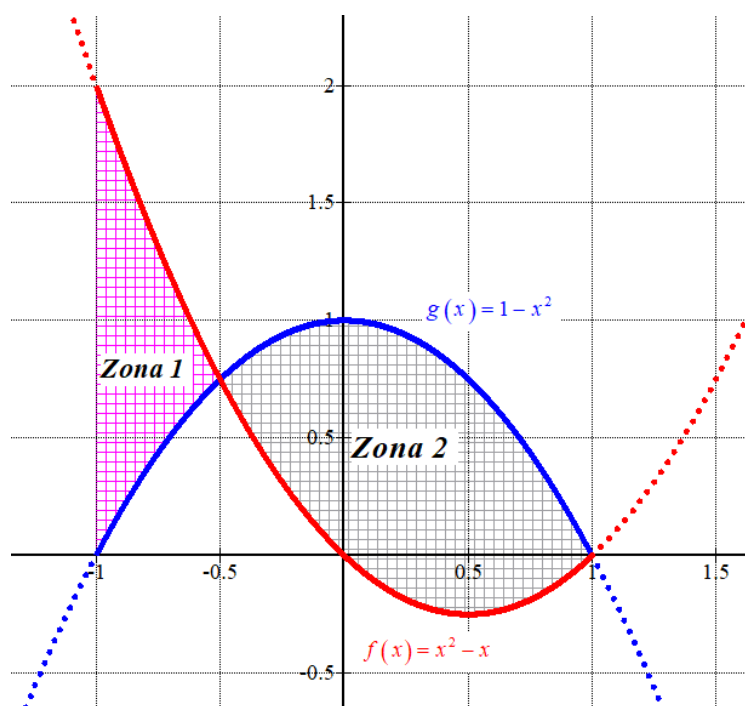
b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - x \\ g(x) = 1 - x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \boxed{1 = x} \\ \frac{1-3}{4} = \boxed{\frac{-1}{2} = x} \end{cases}$$

Las dos gráficas coinciden en $x = \frac{-1}{2}$ y en $x = 1$. Se cortan en $(-0.5, 0.75)$ y $(1, 0)$.

c) El recinto delimitado por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ lo dividimos en dos partes y el área la obtenemos como la suma de las áreas de los dos trozos-



Calculamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-0.5} f(x) - g(x) dx &= \int_{-1}^{-0.5} x^2 - x - (1 - x^2) dx = \int_{-1}^{-0.5} x^2 - x - 1 + x^2 dx = \\&= \int_{-1}^{-0.5} 2x^2 - x - 1 dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^{-0.5} = \\&= \left[\frac{2(-0.5)^3}{3} - \frac{(-0.5)^2}{2} + 0.5 \right] - \left[\frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 1 \right] = -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \boxed{\frac{11}{24}}\end{aligned}$$

Calculamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned}\int_{-0.5}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{-0.5}^1 1 - x^2 - (x^2 - x) dx = \int_{-0.5}^1 1 - x^2 - x^2 + x dx = \\&= \int_{-0.5}^1 -2x^2 + x + 1 dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-0.5}^1 = \\&= \left[-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[-\frac{2(-0.5)^3}{3} + \frac{(-0.5)^2}{2} - 0.5 \right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

El área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es la suma de las dos áreas obtenidas y tiene un valor de $\frac{11}{24} + \frac{9}{8} = \frac{19}{12} \approx 1.5833$ unidades cuadradas.

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases}$ y el punto $P=(-3,2,2)$.

a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.

b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .

c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

a) Hallamos la ecuación continua de la recta.

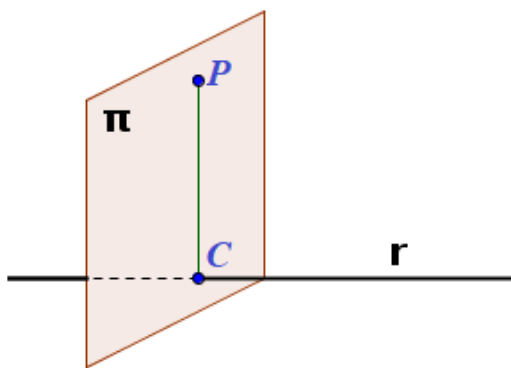
$$r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2z \\ y=3-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(2,3,0) \\ \vec{v}_r=(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}}$$

b) El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, -1, 1) \left\{ \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + D = 0 \\ P = (-3, 2, 2) \in \pi \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} \pi: 2x - y + z + D = 0 \\ P = (-3, 2, 2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 2(-3) - 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow D - 6 = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + z + 6 = 0} \end{aligned}$$

La ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P es $\pi: 2x - y + z + 6 = 0$.

c) La distancia entre r y P es la distancia entre P y el punto C de corte de la recta r con el plano π hallado en el apartado anterior.



Hallamos el punto C .

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=2+2z \\ y=3-z \end{cases} \\ \pi: 2x-y+z+6=0 &\Rightarrow \begin{cases} 2(2+2z)-(3-z)+z+6=0 \\ 2x-y+z+6=0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4+4z-3+z+z+6=0 \Rightarrow 6z+7=0 \Rightarrow \boxed{z = -\frac{7}{6}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 + 2 \cdot \frac{-7}{6} = \frac{-1}{3}} \\ \boxed{y = 3 + \frac{7}{6} = \frac{25}{6}} \end{cases} \end{aligned}$$

El punto de corte de recta y plano es $C\left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right)$.

Hallamos la distancia del punto P a la recta r como la distancia del punto P al punto C .

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right) \\ P(-3, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right) - (-3, 2, 2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{13}{6}, \frac{-19}{6}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{6}\right)^2 + \left(\frac{-19}{6}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{786}}{6} \simeq 4.67u}$$

La distancia del punto P a la recta r tiene un valor de $\frac{\sqrt{786}}{6} \simeq 4.67$ unidades.

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.

- a) [0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?
- b) [0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
- c) [1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

- a) La probabilidad de sacar una bola roja de la urna A vale $\frac{3}{5}$. En la extracción de la segunda bola de la urna A quedan 4 bolas, siendo 2 bolas rojas y 2 bolas verdes, la probabilidad de que la segunda bola sea roja, habiendo sacado una primera bola roja vale $\frac{2}{4}$.

La probabilidad de que al extraer de la urna A dos bolas de forma simultánea estas sean dos bolas rojas vale $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0.3$.

- b) Este es un experimento compuesto donde primero elegimos una urna entre la A y la B, y luego extraemos una bola de la urna elegida. El suceso sacar bola roja puede pasar de dos formas distintas: una eligiendo la urna A y luego sacando bola roja o bien eligiendo la urna B y luego extraer bola roja.

La probabilidad del suceso es $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$.

- c) En el experimento elegir una urna y extraer una bola de la urna elegida la probabilidad de sacar bola verde (suceso complementario de “sacar bola roja”) es $1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

La probabilidad de elegir la urna A y sacar bola verde de la urna A vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$.

Si de cada 15 repeticiones del experimento sabemos que 8 saldrá bola verde y de estas 3 serán extraídas de la urna A entonces la probabilidad de que al sacar bola verde esta haya sido extraída de la urna A vale $\frac{3}{8} = 0.375$

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
 b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
 c) [1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

Sea X = Altura en centímetros de un habitante de una población. $X = N(170, 16)$.

- a) Nos piden calcular $P(X > 190)$.

$$P(X > 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{190-170}{16}\right) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115

- b) Nos piden calcular $P(160 < X < 190)$.

$$P(160 < X < 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{160-170}{16} < Z < \frac{190-170}{16}\right) =$$

$$= P(-0.625 < Z < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < -0.625) =$$

$$= P(Z < 1.25) - P(Z > 0.625) = P(Z < 1.25) - [1 - P(Z < 0.625)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 1 + \frac{0.7324 + 0.7357}{2} = \boxed{0.62845}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115

c) La información que vamos a manejar para responder en este apartado es: “En una población, el 85% de las personas son rubias, sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm”.

Llamamos R al suceso “elegir una persona rubia” y A a “elegir una persona que mide más de 190 cm”.

Sabemos que $P(A/R) = 0.12$ y $P(R) = 0.85$.

Nos piden calcular $P(R \cap A)$.

$$P(R \cap A) = P(R)P(A/R) = 0.85 \cdot 0.12 = \boxed{0.102}$$