

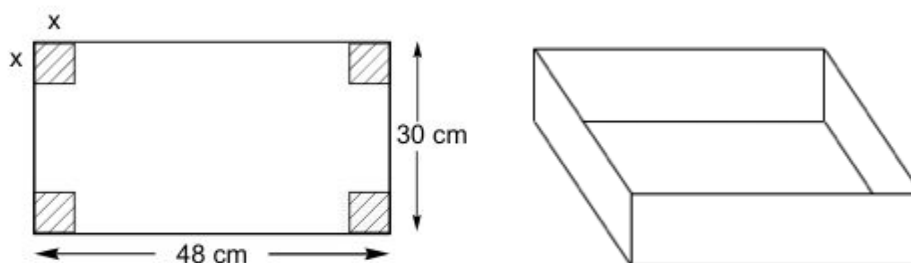


**Prueba de Acceso a la Universidad**  
**Curso 2024/2025**

**Materia: MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:** El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

**EJERCICIO 1. (2,5 PUNTOS)** Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado  $x$  en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



- [0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.
- [1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.
- [0,75 puntos]** Para poder transportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas  $f(t) = t^2 - 4t$  y  $g(t) = 2t - 5$ . Calcula el área de una de las aberturas.

**EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo:  $A(0,1,-2)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(0,0,1)$  y  $D(1,0,m)$ , con  $m \in \mathbb{R}$ .

- [1 punto]** Calcula el valor de  $m$  para que los cuatro puntos sean coplanarios.
- [0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al toldo.
- [0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto  $P(1,2,3)$ , ¿estará correctamente ubicado?

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

- [1 punto]** Calcula la ecuación del plano  $\pi'$  que pasa por  $C(1,1,-2)$ , es paralelo a la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1,0,3)$  y  $B(0,4,-1)$  y perpendicular al plano  $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$ .
- [1,5 puntos]** Determina los valores reales de  $m \in \mathbb{R}$ , para que los puntos  $A(-1,2,3)$ ,  $B(-1,0,-1)$ ,  $C(2,-1,1)$  y  $D(2,3,m)$ , formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

**EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro  $a \in \mathbb{R}$  e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para  $a = 0$ , resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Apartado b) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro  $a$  para que  $A \cdot B$  sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de  $A \cdot B$  en función de  $a$ .

**EJERCICIO 4. (2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

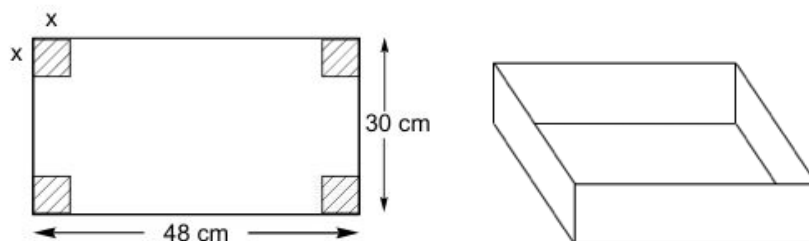
b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

|     |     | $p$    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n$ | $k$ | 0.05   | 0.1    | 0.15   | 0.2    | 0.25   | 0.3    | 0.35   | 0.4    | 0.45   | 0.5    |
| 8   | 0   | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 | 0.0039 |
|     | 1   | 0.2793 | 0.3826 | 0.3847 | 0.3355 | 0.2670 | 0.1977 | 0.1373 | 0.0896 | 0.0548 | 0.0313 |
|     | 2   | 0.0515 | 0.1488 | 0.2376 | 0.2936 | 0.3115 | 0.2965 | 0.2587 | 0.2090 | 0.1569 | 0.1094 |
|     | 3   | 0.0054 | 0.0331 | 0.0839 | 0.1468 | 0.2076 | 0.2541 | 0.2786 | 0.2787 | 0.2568 | 0.2188 |
|     | 4   | 0.0004 | 0.0046 | 0.0185 | 0.0459 | 0.0865 | 0.1361 | 0.1875 | 0.2322 | 0.2627 | 0.2734 |
|     | 5   | 0.0000 | 0.0004 | 0.0026 | 0.0092 | 0.0231 | 0.0467 | 0.0808 | 0.1239 | 0.1719 | 0.2188 |
|     | 6   | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0038 | 0.0100 | 0.0217 | 0.0413 | 0.0703 | 0.1094 |
|     | 7   | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0033 | 0.0079 | 0.0164 | 0.0313 |
|     | 8   | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0007 | 0.0017 | 0.0039 |

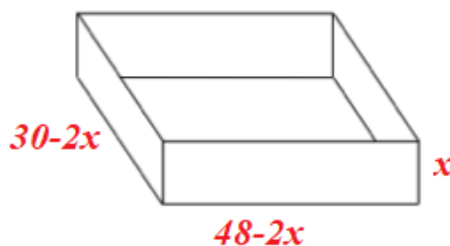
## SOLUCIONES

**EJERCICIO 1. (2,5 PUNTOS)** Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado  $x$  en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



- a) **[0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.  
 b) **[1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.  
 c) **[0,75 puntos]** Para poder transportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas  $f(t) = t^2 - 4t$  y  $g(t) = 2t - 5$ . Calcula el área de una de las aberturas.

a) Hallamos el volumen de la caja como el producto del área de la base por la altura.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = (30 - 2x)(48 - 2x) \\ \text{Altura} = x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen} = V(x) = (30 - 2x)(48 - 2x)x$$

$$V(x) = x(1440 - 60x - 96x + 4x^2) = 1440x - 156x^2 + 4x^3$$

El volumen de la caja tiene la expresión  $V(x) = 1440x - 156x^2 + 4x^3$ , siendo  $0 \leq x \leq 15$ .

b) Hallamos los puntos críticos de la función volumen.

$$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2 = 12(120 - 26x + x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12(120 - 26x + x^2) = 0 \Rightarrow 120 - 26x + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 120}}{2} = \frac{26 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{26+14}{2} = \boxed{20 = x} \\ \frac{26-14}{2} = \boxed{6 = x} \end{cases}$$

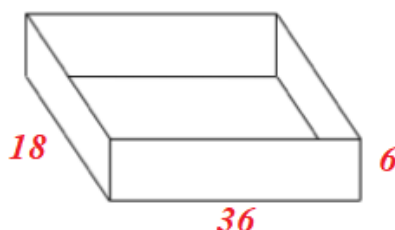
Sustituimos el valor de estos dos puntos críticos en la segunda derivada.

$$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2 \Rightarrow V''(x) = -312 + 24x \Rightarrow \begin{cases} V''(6) = -312 + 24 \cdot 6 = -168 < 0 \\ V''(20) = -312 + 24 \cdot 20 = 168 > 0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo para  $x = 6$  y un mínimo relativo para  $x = 20$ .

El mayor volumen de la caja se obtiene para  $x = 6$ .

Para este valor las dimensiones de la caja son  $48 - 12 = 36$  y  $30 - 12 = 18$  centímetros de lado en la base con 6 centímetros de altura.



c) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = t^2 - 4t \\ g(t) = 2t - 5 \\ f(t) = g(t) \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 4t = 2t - 5 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = \boxed{5=t} \\ \frac{6-4}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

El área de una de las aberturas es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_1^5 t^2 - 4t - (2t - 5) dt = \int_1^5 t^2 - 4t - 2t + 5 dt = \int_1^5 t^2 - 6t + 5 dt =$$

$$= \left[ \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t \right]_1^5 = \left[ \frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right] - \left[ \frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{125}{3} - 75 + 25 - \frac{1}{3} + 3 - 5 = \frac{124}{3} - 52 = \boxed{\frac{-32}{3} \approx -10.6667}$$

El área de una de las aberturas es de  $\frac{32}{3} \approx 10.6667$  centímetros cuadrados.

**EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo:  $A(0,1,-2)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(0,0,1)$  y  $D(1,0,m)$ , con  $m \in \mathbb{R}$ .

a.1) **[1 punto]** Calcula el valor de  $m$  para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al toldo.

a.3) **[0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto  $P(1,2,3)$ , ¿estará correctamente ubicado?

a.1) Hallamos la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,1,-2) \\ B(1,2,0) \\ C(0,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,2,0) - (0,1,-2) = (1,1,2) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,1) - (0,1,-2) = (0,-1,3) \\ C(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - z + 1 - 3y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x - 3y - z + 1 = 0}$$

Para que los cuatro puntos sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano definido por A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x - 3y - z + 1 = 0 \\ D(1,0,m) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - m + 1 = 0 \Rightarrow 5 - m + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

El valor buscado es  $m = 6$ .

a.2) La ecuación del plano que contiene el toldo es  $\pi: 5x - 3y - z + 1 = 0$ .

a.3) Hallamos la distancia del toldo al punto  $P(1,2,3)$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,3) \\ \pi: 5x - 3y - z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}} \approx 0.5m$$

El punto P está situado a menos de 1 metro del toldo, por lo que no está correctamente ubicado.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

- b.1) **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano  $\pi'$  que pasa por  $C(1,1,-2)$ , es paralelo a la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1,0,3)$  y  $B(0,4,-1)$  y perpendicular al plano  $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$ .
- b.2) **[1,5 puntos]** Determina los valores reales de  $m \in \mathbb{R}$ , para que los puntos  $A(-1,2,3)$ ,  $B(-1,0,-1)$ ,  $C(2,-1,1)$  y  $D(2,3,m)$ , formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

b.1) El plano  $\pi'$  que es paralelo a la recta  $r$  tiene su mismo vector director  $\overrightarrow{AB}$ . Al ser también perpendicular al plano  $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$  otro de sus vectores directores es el vector normal del plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,3) \\ B(0,4,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,4,-1) - (1,0,3) = (-1,4,-4)$$

$$\pi \equiv -x + y + 2z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (-1,1,2)$$

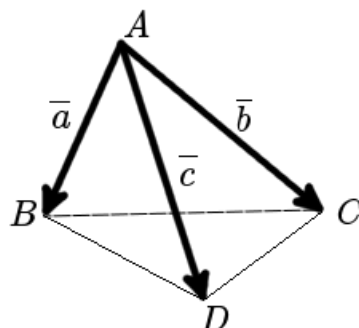
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,4,-4) \\ \vec{v} = \vec{n} = (-1,1,2) \\ C(1,1,-2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 8 + 4y - 4 - z - 2 + 4z + 8 + 2y - 2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x + 6y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x + 2y + z - 4 = 0}$$

El plano  $\pi'$  que pasa por el punto C, es paralelo a la recta  $r$  y perpendicular al plano  $\pi$  tiene ecuación  $\pi': 4x + 2y + z - 4 = 0$ .

b.2) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ .



$$\left. \begin{array}{l} A(-1,2,3) \\ B(-1,0,-1) \\ C(2,-1,1) \\ D(2,3,m) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1,0,-1) - (-1,2,3) = (0,-2,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (2,-1,1) - (-1,2,3) = (3,-3,-2) \\ \overrightarrow{AD} = (2,3,m) - (-1,2,3) = (3,1,m-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 12 - 36 + 6m - 18 - 0 = 6m - 54$$

Averiguamos cuando  $\text{Volumen tetraedro } ABCD = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = 8.$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = 8 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 6m - 54 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 48 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 6m - 54 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6m - 54 = 48 \rightarrow 6m = 102 \rightarrow \boxed{m = \frac{102}{6} = 17} \\ 6m - 54 = -48 \rightarrow 6m = 6 \rightarrow \boxed{m = 1} \end{array} \right.$$

Para  $m = 17$  o  $m = 1$  el volumen del tetraedro ABCD vale 8 unidades cúbicas.

**EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro  $a \in \mathbb{R}$  e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para  $a = 0$ , resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

a.1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 4 + 2a - 4 - 0 = 2a - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

**CASO 1.**  $a \neq 3$ .

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

**CASO 2.**  $a = 3$ .

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -3 \quad 3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 4 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \\ -4 \quad -4 \quad 4 \quad -8 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 4 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 4 \quad -5 \\ 0 \quad 2 \quad -4 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 2}^{A/B} & & \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3).  
El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

**Resumiendo:** Si  $a \neq 3$  el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si  $a = 3$  el sistema es compatible indeterminado ( $\infty$  soluciones).

a.2) Para  $a = 0$  el sistema es compatible determinado (CASO 1 del apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - z - z = 2 \\ 2x + 1 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2z \\ 2x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2z) - z = -1 \Rightarrow 2 + 4z - z = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3z = -3 \Rightarrow \boxed{z = -1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 + 2(-1) = -1} \\ \boxed{y = 1 - (-1) = 2} \end{cases} \end{aligned}$$

La solución del sistema es  $x = -1$ ,  $y = 2$ ,  $z = -1$ .

Apartado b) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro  $a$  para que  $A \cdot B$  sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de  $A \cdot B$  en función de  $a$ .

b.1) Determinamos la expresión de la matriz  $A \cdot B$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} = 1+2a - (3+2a)(1-a) =$$

$$= 1 + \cancel{2a} - 3 + 3a - \cancel{2a} + 2a^2 = 2a^2 + 3a - 2$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = a} \\ \frac{-3-5}{4} = \boxed{-2 = a} \end{cases}$$

La matriz es invertible para cualquier valor de  $a$  distinto de  $-2$  y de  $\frac{1}{2}$ .

b.2) Calculamos la inversa para los valores de  $a$  distinto de  $-2$  y de  $\frac{1}{2}$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B| = 2a^2 + 3a - 2 \neq 0$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1+2a & 1-a \\ 3+2a & 1 \end{pmatrix}}{2a^2 + 3a - 2} = \frac{1}{2a^2 + 3a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ a-1 & 1+2a \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 4. (2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

Llamamos A, B y C a los sucesos “elegir la fotocopadora A, B y C, respectivamente”. Y llamamos F al suceso “falla la fotocopadora”.

Por los datos proporcionados sabemos que  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ ,  $P(F/A) = 0.03$ ,

$P(F/B) = 0.05$  y  $P(F/C) = 0.04$ .

a.1) Nos piden calcular  $P(\bar{F})$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\bar{F}) &= P(A)P(\bar{F}/A) + P(B)P(\bar{F}/B) + P(C)P(\bar{F}/C) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.03) + \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.05) + \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.04) = \boxed{0.96} \end{aligned}$$

a.2) Nos piden calcular  $P(B/F)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B)P(F/B)}{1 - P(\bar{F})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.05}{1 - 0.96} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

$X$  = El número de restaurantes que no pasará una inspección de un grupo de 8.  $X = B(8, 0.05)$

b.1) Debemos calcular  $P(X = 3)$ .

Mirando en la tabla proporcionada tenemos que  $P(X = 3) = 0.0054$

| $n$ | $k$ | $p$    |        |        |        |        |        |
|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     |     | 0.05   | 0.1    | 0.15   | 0.2    | 0.25   | 0.3    |
| 8   | 0   | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 |
|     | 1   | 0.2793 | 0.3826 | 0.3847 | 0.3355 | 0.2670 | 0.1977 |
|     | 2   | 0.0515 | 0.1488 | 0.2376 | 0.2936 | 0.3115 | 0.2968 |
|     | 3   | 0.0054 | 0.0331 | 0.0839 | 0.1468 | 0.2076 | 0.2547 |

b.2) Debemos calcular  $P(X = 0)$ .

Mirando en la tabla proporcionada tenemos que  $P(X = 0) = 0.6634$

| $n$ | $k$ | $p$    |        |        |        |        |        |
|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     |     | 0.05   | 0.1    | 0.15   | 0.2    | 0.25   | 0.3    |
| 8   | 0   | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 |
|     | 1   | 0.2793 | 0.3826 | 0.3847 | 0.3355 | 0.2670 | 0.1977 |

b.3) Que al menos dos restaurantes pasen la inspección (2,3,4,5,6,7 u 8 pasan la inspección) es lo mismo que 6 o menos no pasen la inspección (6,5,4,3,2,1 o 0 no pasan la inspección).

Debemos calcular  $P(X \leq 6)$ . Usamos el suceso contrario para hacer el cálculo más sencillo.

$$P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)] = 1 - [0 + 0] = 1$$

| $n$ | $k$ | $p$    |        |
|-----|-----|--------|--------|
|     |     | 0.05   | 0.1    |
| 8   | 0   | 0.6634 | 0.4305 |
|     | 1   | 0.2793 | 0.3826 |
|     | 2   | 0.0515 | 0.1488 |
|     | 3   | 0.0054 | 0.0331 |
|     | 4   | 0.0004 | 0.0084 |
|     | 5   | 0.0000 | 0.0011 |
|     | 6   | 0.0000 | 0.0001 |
|     | 7   | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 8   | 0.0000 | 0.0000 |