

COMISIÓN  
INTERUNIVERSITARIA  
DE GALICIAPAU  
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2025  
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

### PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

#### CONTEXTO

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

**Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.**

**1.1.** ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

**1.2.** Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

**1.3.** Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

### PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).

**Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

**2.1.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**2.1.1.** ¿Qué condición tiene que cumplir  $k$  para que  $A$  sea invertible? Calcule  $A^{-1}$  cuando sea posible.

**2.1.2.** Para  $k = 0$ , calcule la matriz  $X$  que satisfaga la igualdad  $AX - A = B^2 + A^T$  siendo  $A^T$  la traspuesta de  $A$ .

**2.2.** Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema: 
$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + \quad + (3-m)z = 2m \\ my + \quad 2z = 3m \end{cases}$$

### PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos).

**Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

**3.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes:

**3.1.1.** Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

**3.1.2.** Calcule  $\int e^x \cos 3x dx$ .

3.2. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$ .

**PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos).**

**Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**

4.1. Considérense los planos  $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$  y  $\pi': x + z - 1 = 0$  y los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(-1, -2, 3)$ .

4.1.1. Calcule la distancia del punto  $A$  al plano paralelo a  $\pi$  que pasa por  $B$ .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

4.2. Dadas las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$  y  $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$ .

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

## SOLUCIONES

### PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

#### CONTEXTO

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

**Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.**

**1.1.** ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

**1.2.** Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

**1.3.** Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

**1.1.** Nos dicen que tiene 60 pares de zapatillas y el 80% son tradicionales, es decir,  $0.8 \cdot 60 = 48$  pares son zapatillas tradicionales y las restantes  $60 - 48 = 12$  son de diseño.

Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, es decir,  $0.75 \cdot 12 = 9$  zapatillas son de diseño en buen estado. En las tradicionales solo el 50% está en buen estado, es decir,  $0.5 \cdot 48 = 24$  zapatillas son tradicionales en buen estado.

Ponemos todos estos datos ordenados en una tabla de contingencia.

|               | Buen estado | Mal estado |    |
|---------------|-------------|------------|----|
| Diseño        | 9           |            | 12 |
| Tradicionales | 24          |            | 48 |
| TOTALES       |             |            | 60 |

Completamos la tabla.

|               | Buen estado | Mal estado |    |
|---------------|-------------|------------|----|
| Diseño        | 9           | 3          | 12 |
| Tradicionales | 24          | 24         | 48 |
| TOTALES       | 33          | 27         | 60 |

Disponemos de toda la información sobre las zapatillas de Antón y podemos responder a las preguntas que se nos planteen usando la regla de Laplace.

**1.1.** De los 60 pares hay 48 que son tradicionales y 9 que son de diseño en buen estado. La probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado es de  $\frac{48+9}{60} = \frac{19}{20} = 0.95$ .

1.2. De los 60 pares de zapatillas que tiene Antón 9 son de diseño y en buen estado. La probabilidad de no llevar zapatillas tradicionales ni en mal estado es de  $\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0.15$ , la probabilidad de no tener que cambiarse de zapatillas es de 0.15.

1.3. Llamamos B al suceso “zapatillas blancas”, D a “zapatillas de diseño” y T a “zapatillas tradicionales”. Nos dicen que los sucesos B y D son independientes por lo que:

$$P(B \cap D) = P(B)P(D) = P(B)\frac{12}{60} = \frac{P(B)}{5}.$$

Calculamos el valor de  $P(B)$  usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(B \cap T) + P(B \cap D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(B \cap D) = \frac{P(B)}{5} \\ P(B \cap T) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{15} + \frac{P(B)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15P(B) = 2 + 3P(B) \Rightarrow 12P(B) = 2 \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{2}{12} = \frac{10}{60}}$$

Como  $P(B) = \frac{10}{60}$  este valor de la probabilidad nos indica que Antón tiene 10 pares de zapatillas blancas. Como 8 son tradicionales podemos asegurar que Antón tiene  $10 - 8 = 2$  pares de zapatillas blancas de diseño.

#### OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Con tabla de contingencia. Llamamos “x” al número de pares de zapatillas blancas de diseño que tiene Antón.

|               | Blancas | No blancas |    |
|---------------|---------|------------|----|
| Diseño        | x       | 12 - x     | 12 |
| Tradicionales | 8       | 40         | 48 |
| TOTALES       | x + 8   | 52 - x     | 60 |

Nos dicen que los sucesos B y D son independientes por lo que  $P(B \cap D) = P(B)P(D)$ .

Utilizando los datos de la tabla tenemos que  $P(B \cap D) = \frac{x}{60}$ ,  $P(B) = \frac{x+8}{60}$  y  $P(D) = \frac{12}{60}$ .

Reunimos toda la información y obtenemos el valor de x.

$$\left. \begin{array}{l} P(B \cap D) = P(B)P(D) \\ P(B \cap D) = \frac{x}{60} \\ P(B) = \frac{x+8}{60} \\ P(D) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{x+8}{60} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{x+8}{60} \Rightarrow 5x = x+8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Antón tiene 2 pares de zapatillas blancas de diseño.

**2.1.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**2.1.1.** ¿Qué condición tiene que cumplir  $k$  para que  $A$  sea invertible? Calcule  $A^{-1}$  cuando sea posible.

**2.1.2.** Para  $k = 0$ , calcule la matriz  $X$  que satisfaga la igualdad  $AX - A = B^2 + A^T$  siendo  $A^T$  la traspuesta de  $A$ .

**2.1.1.** Para que la matriz  $A$  sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

Averiguamos el valor de  $k$  para el que se anula el determinante de  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 4k + 2 + 0 - 0 - 4k - 1 = 1 \neq 0$$

El determinante de  $A$  no depende del valor de  $k$  y siempre vale 1 que es un valor no nulo, por lo que la matriz  $A$  es invertible para cualquier valor de  $k$ .

Calculamos la inversa de la matriz  $A$ .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ 1-2k & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.1.2.** Para  $k = 0$  la matriz queda  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y sabemos que es invertible, siendo su

$$\text{inversa } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Despejamos  $X$  en la ecuación matricial.

$$AX - A = B^2 + A^T \Rightarrow AX = B^2 + A^T + A \Rightarrow X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$$

Obtenemos la expresión de  $X$ .

$$B^2 + A^T + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+0+2 & -4+0+4 & -1+0+2 \\ 3+0-1 & 4+0-2 & 1+0-1 \\ -6+4+0 & -8+9+0 & -2+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz solución es  $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

2.2. Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema:

$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + \quad + (3-m)z = 2m \\ my + \quad 2z = 3m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m \\ 0 & m & 2 & 3m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + m - 0 - 2m - m(3-m) = m - 2m - 3m + m^2 = m^2 - 4m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$$

El determinante se anula para  $m = 0$  y  $m = 4$ . Analizamos tres casos por separado.

### CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada  $A/B$  y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

### CASO 2. $m = 0$

El determinante de  $A$  es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 0 & 1 & 0}^{A/B} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de  $A$  es 2, al igual que el rango de  $A/B$ . Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

**CASO 3.**  $m = 4$ 

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 8 \\ -1 \quad -4 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -4 \quad -2 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4 \quad 2 \quad 12 \\ 0 \quad -4 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 16 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & & 16 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

**Resumiendo:** Si  $m \neq 0$  y  $m \neq 4$  el sistema es compatible determinado, si  $m = 0$  el sistema es compatible indeterminado y si  $m = 4$  el sistema es incompatible.

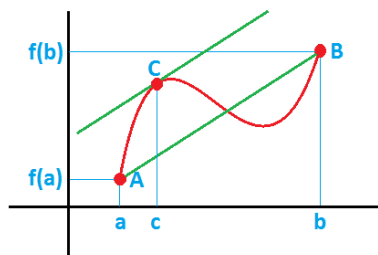
**3.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes:

**3.1.1.** Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

**3.1.2.** Calcule  $\int e^x \cos 3x dx$ .

**3.1.1.** Sea  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a,b)$  entonces existe al menos un valor  $c \in (a,b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



**3.1.2.** Calculamos la expresión de la integral indefinida pedida usando el método de integración por partes.

$$\int e^x \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = \cos 3x \rightarrow du = -3 \operatorname{sen} 3x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos 3x - \int -3 \operatorname{sen} 3x \cdot e^x dx = \dots$$

$$\int \operatorname{sen} 3x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = \operatorname{sen} 3x \rightarrow du = 3 \cos 3x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \operatorname{sen} 3x - \int 3 \cos 3x e^x dx$$

$$\dots = e^x \cos 3x + 3 \left[ e^x \operatorname{sen} 3x - \int 3 \cos 3x e^x dx \right] = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x - 9 \int e^x \cos 3x dx$$

Hemos visto que  $\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x - 9 \int e^x \cos 3x dx$ .

Despejamos la integral en la igualdad y obtenemos su expresión.

$$\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x - 9 \int e^x \cos 3x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos 3x dx + 9 \int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x \Rightarrow \boxed{\int e^x \cos 3x dx = \frac{e^x (\cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)}{10}}$$

Hemos obtenido que  $\int e^x \cos 3x dx = \frac{e^x (\cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)}{10}$ .

3.2. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$ .

3.2.1. En el intervalo  $(-\infty, 0)$  la función tiene la expresión  $f(x) = xe^{4x}$  que es continua en todo el intervalo pues es producto de funciones continuas.

En el intervalo  $(0, +\infty)$  la función tiene la expresión  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$  cuyo denominador se anula para  $x = -1$  que no pertenece al intervalo de definición y también tenemos que  $x > 0 \rightarrow 1+x > 1 > 0$ , por lo que la función logaritmo neperiano existe y es continua. La función es continua en  $(0, +\infty)$ .

Estudiamos la continuidad en  $x = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\ln(1+0)}{1+0} = \frac{0}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{4x} = 0 \cdot e^{4 \cdot 0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en  $x = 0$ .

La función es continua en todo su dominio  $\mathbb{R}$ .

3.2.2. En el intervalo  $(-\infty, 0)$  la función tiene la expresión  $f(x) = xe^{4x}$  que es derivable en todo el intervalo siendo su derivada  $f'(x) = e^{4x} + x \cdot 4e^{4x} = (1+4x)e^{4x}$ .

En el intervalo  $(0, +\infty)$  la función tiene la expresión  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ . La función es

derivable, siendo su derivada  $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ .

La función es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  siendo su derivada  $f'(x) = \begin{cases} (1+4x)e^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

Estudiamos la derivabilidad en  $x = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+4x)e^{4x} = (1+4 \cdot 0)e^{4 \cdot 0} = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - \ln(1+0)}{(1+0)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 1$$

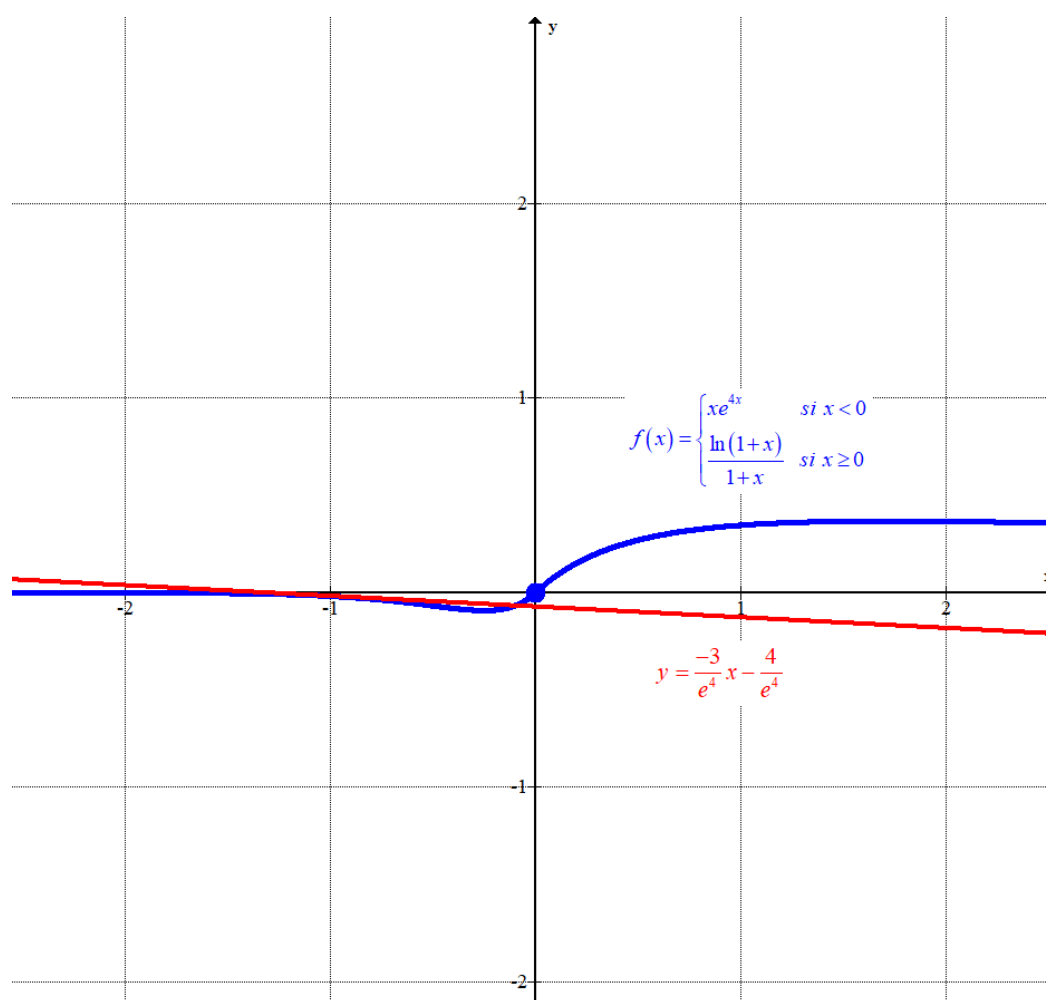
Coinciden las derivadas laterales y la función es derivable en  $x = 0$ .

La función es derivable en todo su dominio  $\mathbb{R}$ .

**3.2.3.** Hallamos la recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$ . En el entorno de  $x = -1$  la función tiene la expresión  $f(x) = xe^{4x}$ , siendo su derivada  $f'(x) = (1 + 4x)e^{4x}$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)e^{4(-1)} = \frac{-1}{e^4} \\ f'(-1) = (1 + 4(-1))e^{4(-1)} = \frac{-3}{e^4} \\ y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y + \frac{1}{e^4} = \frac{-3}{e^4}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{-3x}{e^4} - \frac{3}{e^4} - \frac{1}{e^4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3x}{e^4} - \frac{4}{e^4}}$$

La recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$  tiene ecuación  $y = \frac{-3}{e^4}x - \frac{4}{e^4}$ .



**4.1.** Considérense los planos  $\pi : 2x + 3y + z + 1 = 0$  y  $\pi' : x + z - 1 = 0$  y los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(-1, -2, 3)$ .

**4.1.1.** Calcule la distancia del punto  $A$  al plano paralelo a  $\pi$  que pasa por  $B$ .

**4.1.2.** Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

**4.1.1.** Un plano paralelo a  $\pi : 2x + 3y + z + 1 = 0$  tiene ecuación  $\pi_1 : 2x + 3y + z + D = 0$ .

Hallamos el valor de  $D$  para que  $\pi_1$  contenga el punto  $B$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + 3y + z + D = 0 \\ B(-1, -2, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1) + 3(-2) + 3 + D = 0 \Rightarrow -2 - 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = 5}$$

El plano paralelo a  $\pi$  que pasa por  $B$  tiene ecuación  $\pi_1 : 2x + 3y + z + 5 = 0$ .

Calculamos la distancia del punto  $A$  al plano  $\pi_1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + 3y + z + 5 = 0 \\ A(2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7} \approx 3.207u$$

**4.1.2.** Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ \pi' : x + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ z = 1 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3y + 1 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 - 3y \Rightarrow z = 1 + 2 + 3y = 3 + 3y \Rightarrow r : \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$  son

$$r : \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**4.2.** Dadas las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$  y  $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$ .

**4.2.1.** Calcule la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

**4.2.2.** Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

**4.2.1.** Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{u}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2,1,1) \\ \vec{v}_s = (4, -2, 2) \rightarrow \vec{w}_s = (2, -1, 1) \end{cases}$$

Como los vectores directores de las rectas son iguales:  $\vec{u}_r = \vec{w}_s = (2, -1, 1)$  estas rectas o son paralelas o coincidentes. Vemos si la recta  $s$  pasa por el punto  $P_r(1,2,1)$  de la recta  $r$ .

$$\left. \begin{array}{l} s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2} \\ \text{¿} P_r(1,2,1) \in s? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{1-2}{4} = \frac{2-1}{-2} = \frac{1-1}{2} ? \Rightarrow \text{¿} \frac{-1}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{0}{2} ? \text{ ¡¡NO!!}$$

El punto  $P_r$  no cumple las igualdades, por lo que la recta  $s$  no pasa por el punto  $P_r$ . Las rectas no son coincidentes y son paralelas.

**4.2.2.** El plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$  tiene como uno de sus vectores directores el vector director de las rectas  $\vec{u}_r = (2, -1, 1)$  y otro de sus vectores directores es  $\overrightarrow{P_r Q_s}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (2,1,1) - (1,2,1) = (1, -1, 0) \\ P_r(1,2,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + y - 2 - 2z + 2 + z - 1 + 0 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y - z - 2 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$  es  $\pi: x + y - z - 2 = 0$ .

