



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El examen consta de una primera pregunta de carácter competencial y obligatoria. Además, hay 3 preguntas más con posibilidad de elección entre apartados.

Cada pregunta se puntúa con 2.5 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

- la desviación típica de la distribución, (1 punto).
- cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).
- el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$$

- b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1} = B$.

- b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

- b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano $\pi: -x - 3y + z + 4 = 0$.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

- a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$.

- b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1.0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

- c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

- la desviación típica de la distribución, (1 punto).
- cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).
- el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

X = El tiempo, en horas, de vida de un foco. $X = N(2000, \sigma)$.

- a) Nos dicen que “la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca más de 1800 horas es 0.8289.” $\Rightarrow P(X > 1800) = 0.8289$.

$$P(X > 1800) = 0.8289 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{1800 - 2000}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{-200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200}{\sigma} = 0.95 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{200}{0.95} = \frac{4000}{19} \approx 210.53 \text{ horas}}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8150	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289

- b) Nos piden hallar “ t ” tal que $P(X < t) = 0.90$.

$$P(X < t) = 0.90 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z < \frac{t - 2000}{4000/19}\right) = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t - 2000}{4000/19} = 1.28 \Rightarrow t - 2000 = \frac{4000 \cdot 1.28}{19} \Rightarrow \boxed{t = \frac{43120}{19} \approx 2269.47}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El percentil 90 está situado en las 2269.47 horas de duración.

b) Calculamos $P(X > 1600)$.

$$P(X > 1600) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1600 - 2000}{4000/19}\right) = P(Z > -1.9) =$$

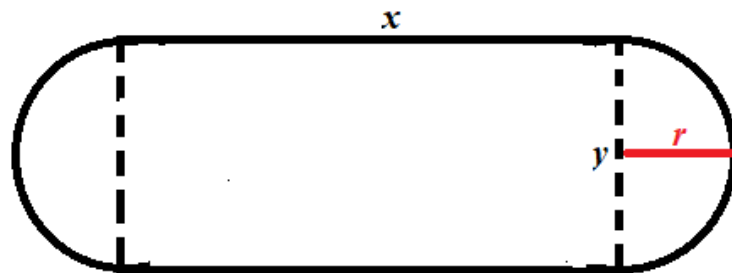
$$= P(Z \leq 1.9) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.9713$$

z	0	
0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1	0,8413	0,
1,1	0,8643	0,
1,2	0,8849	0,
1,3	0,9032	0,
1,4	0,9192	0,
1,5	0,9332	0,
1,6	0,9452	0,
1,7	0,9554	0,
1,8	0,9641	0,
1,9	0,9713	0,

El 97.13% de los focos tienen una duración aceptable.

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

Hacemos un dibujo del campo de atletismo y damos nombre a cada uno de sus componentes.



El radio del semicírculo es la mitad del lado corto del campo: $y = 2r$.

El perímetro vale 1 km $\rightarrow 2x + 2\pi r = 1 \rightarrow 2\pi r = 1 - 2x \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi}$.

Obtenemos la expresión del área de la parte rectangular.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = 2r \\ r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 2xr = 2x \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \right) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi}$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ km}$$

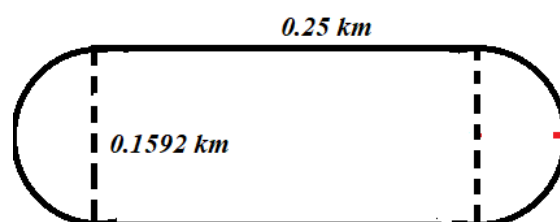
Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} \Rightarrow A''(x) = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow A''(0.25) = -\frac{4}{\pi} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada podemos decir que el área tiene un máximo relativo en $x = 0.25$. Para este valor tenemos que $y = 2 \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1/4}{\pi} \right) = 2 \left(\frac{2}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \right) = 2 \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$.

El campo con área máxima en su parte rectangular tiene el lado recto de longitud 0.25 km y

$\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ km en el lado situado en la parte del semicírculo.



2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

Averiguamos los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} y = Ax - x^2, A \in \mathbb{R}^+ \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(A - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ A - x = 0 \Rightarrow x = A > 0 \end{cases}$$

El área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y A de la función.

$$\int_0^A Ax - x^2 dx = \left[\frac{Ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^A = \left[\frac{A \cdot A^2}{2} - \frac{A^3}{3} \right] - \left[\frac{A \cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{A^3}{2} - \frac{A^3}{3} = \frac{A^3}{6} > 0$$

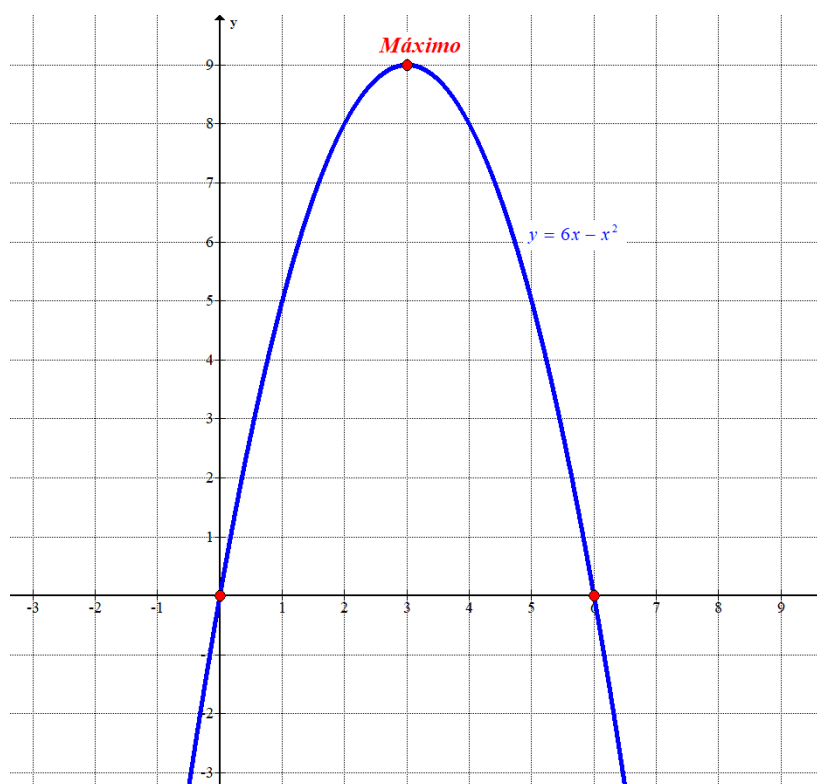
El área tiene un valor de $\frac{A^3}{6}$ unidades cuadradas.

Igualamos el área a 36 y obtenemos el valor de A .

$$\frac{A^3}{6} = 36 \Rightarrow A^3 = 6^3 \Rightarrow A = 6$$

Para $A = 6$ el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas vale 36 unidades cuadradas.

Dibujamos la gráfica de la curva $y = 6x - x^2$. Su gráfica es una parábola con puntos de corte con el eje de abscisas $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$. Por lo que el vértice está situado en $x = 3$. El vértice tiene coordenadas $V(3, 9)$ y es el máximo absoluto de la función.



3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$$

- b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

- b) Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ X = B + Y \end{cases} \Rightarrow 2(B + Y) - 3Y = A \Rightarrow 2B + 2Y - 3Y = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B - Y = A \Rightarrow Y = 2B - A = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & 0-5 \\ 6-4 & 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 0-5 \\ 3+2 & 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

- b) Llamamos “x” al número de unidades de queso e “y” al número de unidades de mantequilla que se fabrican diariamente. Ponemos los datos en una tabla.

	Leche	Horas de mano de obra
Unidades de queso (x)	10x	6x
Unidades de mantequilla (y)	5y	8y
TOTALES	10x + 5y	6x + 8y

“Disponemos cada día de 100000 unidades de leche y 110000 unidades de mano de obra. Considerando que utilizamos todo lo disponible” $\rightarrow 10x + 5y = 100000$; $6x + 8y = 110000$. Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 10x + 5y = 100000 \\ 6x + 8y = 110000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 20000 \\ 3x + 4y = 55000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20000 - 2x \\ 3x + 4y = 55000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 4(20000 - 2x) = 55000 \Rightarrow 3x + 80000 - 8x = 55000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25000 = 5x \Rightarrow \boxed{x = 5000} \Rightarrow \boxed{y = 20000 - 2 \cdot 5000 = 10000}$$

Se producen 5000 unidades de queso y 10000 unidades de mantequilla.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1} = B$.

b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

a) Consideramos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XAX^{-1} = B \Rightarrow XAX^{-1}X = BX \Rightarrow XA = BX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a - 9c & 8b - 9d \\ 6a - 7c & 6b - 7d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ -b = 8b - 9d \\ 2c = 6a - 7c \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a = -9c \\ -9b = -9d \\ 9c = 6a \\ 6d = 6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{6}c = \frac{3}{2}c \\ b = d \\ \frac{9}{6}c = a \\ d = b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$$

Como debe existir la inversa de la matriz X su determinante debe ser distinto de cero.

$$|X| = \begin{vmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{vmatrix} = \frac{3bc}{2} - bc = \frac{bc}{2} \left. \begin{matrix} \Rightarrow \frac{bc}{2} \neq 0 \Rightarrow b \neq 0, c \neq 0 \\ |X| \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

Determinamos la inversa de X .

$$X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^T)}{|X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3c/2 & c \\ b & b \end{pmatrix}}{bc/2} = \frac{2}{bc} \begin{pmatrix} b & -b \\ -c & 3c/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$ y $X^{-1} = \begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$, siendo $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

b) Sumamos a la segunda ecuación la primera.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ -2x \quad -y \quad +3z \quad = b \\ 2x \quad +y \quad -3z \quad = a \\ \hline 0 \quad = b + a \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3z = a \\ 0 = a + b \end{array} \right.$$

El sistema es compatible cuando $a + b = 0 \rightarrow b = -a$.

El sistema nunca puede ser compatible determinado pues hay 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones. El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada nunca puede ser igual al número de incógnitas (3), como mucho pueden ser iguales a 2 y obtener un sistema compatible indeterminado.

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano

$$\pi: -x - 3y + z + 4 = 0.$$

a) Son 4 planos y su punto de corte, si existe, se obtiene de la resolución del sistema formado por sus ecuaciones. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x - z \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 - x - z - z = 4 \\ mx + 2 - x - z + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 2z \\ (m-1)x + 2z = 4 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)x + x - 2 = 4 \\ x - x + 2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx = 6 \\ 2 = m \end{cases} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow 3 - 2 = 2z \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y = 2 - 3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}}$$

El sistema tiene solución cuando $m = 2$ y la solución es el punto $P\left(3, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Estudiamos la posición relativa de la recta y el plano. Comprobamos si el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano.

$$\left. \begin{aligned} r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5} \\ \pi: -x - 3y + z + 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{u}_r &= (-1, 2, 5) \\ \vec{n} &= (-1, -3, 1) \end{aligned} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n} = (-1, 2, 5) \cdot (-1, -3, 1) = 1 - 6 + 5 = 0$$

El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y por tanto la recta o está contenida en el plano o es paralela al plano. En cualquiera de los dos casos podemos calcular la distancia de la recta al plano como la distancia de cualquiera de sus puntos al plano. Sabemos que $P_r(3, 1, -2)$ es un punto de la recta.

$$\left. \begin{aligned} P_r(3, 1, -2) \\ \pi: -x - 3y + z + 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|-3 - 3 \cdot 1 - 2 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{11}}{11} \approx 1.21u$$

La distancia de la recta r al plano π es de $\frac{4\sqrt{11}}{11} \approx 1.21$ unidades.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$.

b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1.0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

a) Un plano π' paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$ tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + z + D = 0$.

Determinamos el valor de D que hace que el plano paralelo contenga el punto $P \equiv (0, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P \equiv (0, 2, 1) \in \pi' \\ \pi': 2x - 5y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow -9 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = 9}$$

El plano que buscamos tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + z + 9 = 0$.

b) El plano perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta. Hallamos el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 4 = z \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y - 5x - y + 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 3y = 1 \Rightarrow -1 - 3x = 3y \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{3} - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 5x - \frac{1}{3} - x - 4 = \frac{-13}{3} + 4x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-1}{3} - \lambda \\ z = \frac{-13}{3} + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 4)$$

Hallamos la ecuación del plano que contiene el punto P y con vector normal $\vec{v}_r = (1, -1, 4)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 4) \\ P \equiv (1.0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x - y + 4z + D = 0 \\ P \equiv (1.0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + 4(-3) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + 4z + 11 = 0}$$

El plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r tiene ecuación $\pi: x - y + 4z + D = 0$.

- c) Estudiamos la posición relativa de las rectas. Determinamos primero un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5, -1, 8) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 2) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2, 2, -1) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{2}{4}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(5, -1, 8) \\ Q_s(2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (2, 2, -1) - (5, -1, 8) = (-3, 3, -9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-3, 3, -9) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 18 - 6 - 0 - 12 = 9 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan.

Calculamos su distancia entre las rectas r y s con la fórmula $d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 6j - k + 0 - 4j + 2i = 2i + 2j - k = (2, 2, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \boxed{3}$$

La distancia entre las rectas r y s vale 3 unidades.