

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .
b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.
b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D.
¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
- b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
- c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
- b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

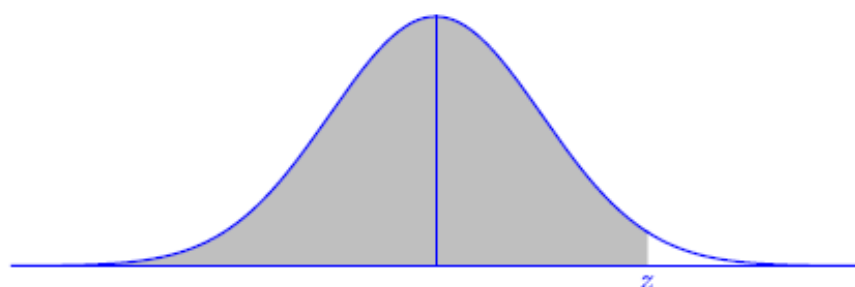
Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
- b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

a) El sistema es $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$. La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada es } A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - k + (k+1)^2 - 1 - 0 + k^2(k+1) =$$

$$= -k + k^2 + 1 + 2k - 1 + k^3 + k^2 = k^3 + 2k^2 + k = k(k^2 + 2k + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k(k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1 \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq -1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el

rango de A y de A/B . La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y de A/B es 2, tienen el mismo rango y es menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 1. $k = -1$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el

rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{-1 \quad 1 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $k = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

- b) Hemos visto en el apartado anterior que para $k = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las determinamos partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.
- b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

a) Calculamos la expresión de la matriz $A + A^2$.

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz simétrica $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Resolvemos la igualdad planteada.

$$BA = (A + A^2)B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a-b = -3a-5b \\ 5a-3b = -3b-5c \\ b-c = a+b \\ 5b-3c = b+c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a+4b=0 \\ 5a=-5c \\ -c=a \\ 4b-4c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=-a \\ a=-c \\ -c=a \\ b=c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=-a \\ -a=c \\ b=c \end{array} \right\} \Rightarrow b=c=-a \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix}}$$

Las matrices B que cumplen lo pedido son $B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix}$, siendo a cualquier número real.

b) Tenemos que $A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A_2 = A_1^2 + A_1 = A^2 + A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2^2 + A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9-5 & 15-5 \\ -3+1 & -5+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= A_3^2 + A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2
 \end{aligned}$$

La secuencia que hemos observado es la siguiente:

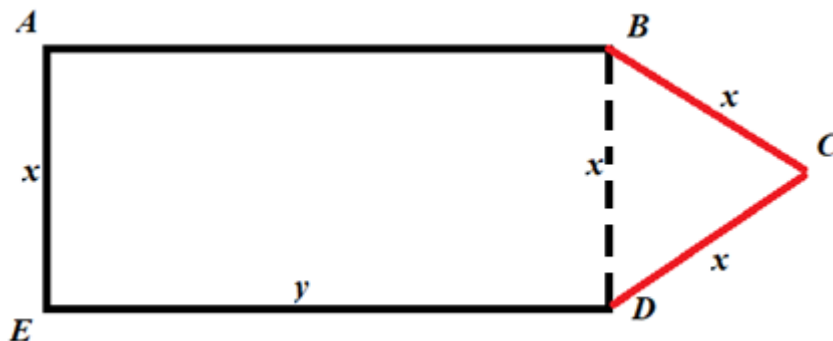
$$A_1, A_2, A_3 = A_1, A_4 = A_2, A_5 = A_1, A_6 = A_2, \dots$$

En las posiciones impares aparece A_1 y en las pares aparece A_2 .

Como 2025 es impar tenemos que $A_{2025} = A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D. ¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

a) Dibujamos la parcela.

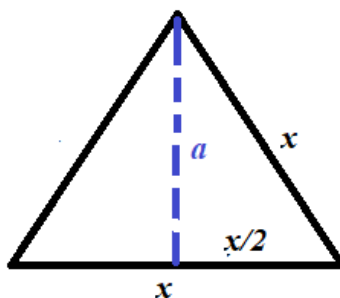


El perímetro de la parcela es $3x + 2y$. Como debe tener 120 metros de longitud obtenemos una igualdad de la que despejamos “y”.

$$3x + 2y = 120 \Rightarrow 2y = 120 - 3x \Rightarrow y = 60 - \frac{3}{2}x$$

Los valores de x e y deben ser positivos $\rightarrow 60 - \frac{3}{2}x \geq 0 \rightarrow 60 \geq \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{120}{3} \geq x \Rightarrow x \leq 40$.

El área de la parcela es el área del rectángulo más el área del triángulo equilátero.



Hallamos el valor de la altura del triángulo equilátero para poder hallar su área.

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{Área BCD} = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

El área del rectángulo vale $xy = x\left(60 - \frac{3}{2}x\right) = 60x - \frac{3}{2}x^2$

El área total de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 60x - \frac{3}{2}x^2 = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 60x, \text{ siendo } 0 \leq x \leq 40$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 60x \Rightarrow A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}-6)x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-120}{\sqrt{3}-6} = \frac{120\sqrt{3}+720}{36-3} = \frac{40\sqrt{3}+240}{11} \approx 28.12 \text{ metros}$$

Comprobamos si para este valor la segunda derivada es negativa.

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60 \Rightarrow A''(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} \Rightarrow A''(28.12) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$$

La segunda derivada es negativa y el área es máxima para $x = \frac{40\sqrt{3}+240}{11} \approx 28.12$ metros.

Para este valor determinamos el valor de y.

$$y = 60 - \frac{3}{2} \left(\frac{40\sqrt{3}+240}{11} \right) = 60 - \frac{60\sqrt{3}+360}{11} = \frac{300-60\sqrt{3}}{11} \approx 17.83 \text{ metros.}$$

El área de la parcela es máxima cuando situamos el punto B a 17.83 metros de A y el E a 28.12 metros de A.

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
 b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
 c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

a) Hallamos los vectores que definen el tetraedro ABCD. Si su volumen es nulo quiere decir que los puntos son coplanarios y no definen un tetraedro. Si el volumen es distinto de cero es que los puntos no son coplanarios y definen un tetraedro.

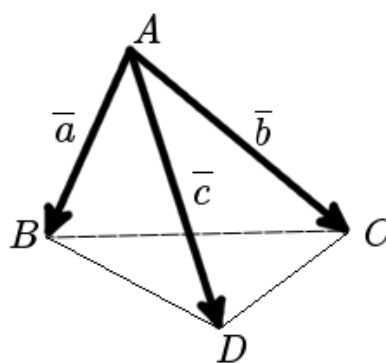
El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,2) \\ B(2,-1,0) \\ C(-2,0,3) \\ D(2,-3,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-1,0) - (1,1,2) = (1,-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,3) - (1,1,2) = (-3,-1,1) \\ \overrightarrow{AD} = (2,-3,-1) - (1,1,2) = (1,-4,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 24 - 2 + 18 + 4 = -3 \neq 0$$

El producto mixto es distinto de cero y los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

El volumen del tetraedro definido por ellos vale $\frac{3}{6} = 0.5$ unidades cúbicas.



b) La cara ABC es un triángulo hallamos su área como la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - k - 6k - j - 2i =$$

$$= -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (-4, 5, -7)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-7)^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \approx 4.74 \text{ u}^2$$

Si dividimos el volumen del paralelepípedo ABCD entre el área del rectángulo de la base tendremos el valor de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

$$\text{Altura} = \frac{\text{Volumen paralelepípedo } ABCD}{\text{Área Base } ABC} = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.3162 \text{ u}$$

c) La recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$.

La recta s determinada por los puntos B y D tiene como vector director $\vec{u}_s = \overrightarrow{BD}$.

$$\vec{u}_s = \overrightarrow{BD} = (2, -3, -1) - (2, -1, 0) = (0, -2, -1)$$

Las rectas tienen vectores con coordenadas no proporcionales, por lo que se cortan o se cruzan (no son ni paralelas ni coincidentes).

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B}]$.

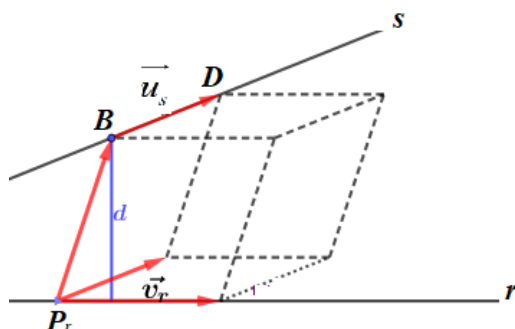
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} P_r(1, -1, 0) \\ B(2, -1, 0) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{P_r B} = (2, -1, 0) - (1, -1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 2 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan y la distancia entre ellas se obtiene

con la fórmula $d(r, s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, -2, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3i - 2j + 4k = (3, -2, 4)$$

$$d(r, s) = \frac{|\llbracket \vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B} \rrbracket|}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \boxed{\frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557 \text{ unidades}}$$

La distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D tiene un valor de $\frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557$ unidades.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

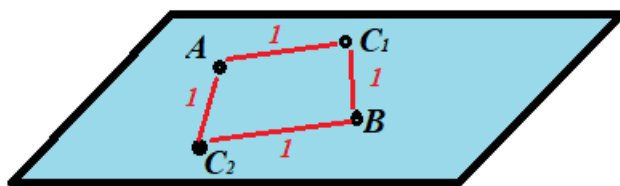
- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
 b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

a) El eje OZ es una recta con vector director $\vec{v} = (0,0,1)$. El plano paralelo al eje OZ tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{v} = (0,0,1)$. Otro de sus vectores directores es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0) \\ \vec{v} = (0,0,1) \\ A(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y = 0$$

El plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B tiene ecuación $\pi: y = 0$.

- b) La recta perpendicular al plano $z=1$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n} = (0,0,1)$. Para definir la recta solo falta un punto por el que pase. Este punto puede ser un punto del plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B. Determinamos las coordenadas de este punto o puntos.



$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,1) \\ B(1,0,1) \\ C \in z=1 \Rightarrow C(a,b,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (a,b,1) - (0,0,1) = (a,b,0) \\ \overrightarrow{BC} = (a,b,1) - (1,0,1) = (a-1,b,0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} d(A,C)=1 \\ d(B,C)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}|=1 \\ |\overrightarrow{BC}|=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2+b^2+0^2}=1 \\ \sqrt{(a-1)^2+b^2+0^2}=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ (a-1)^2+b^2=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b^2=1-a^2 \\ (a-1)^2+b^2=1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a-1)^2+1-a^2=1 \Rightarrow a^2+1-2a+1-a^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \Rightarrow b^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \end{array} \right.$$

Una de las rectas que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y pasa por el punto $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (0, 0, 1) \\ C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La otra recta que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y pasa por el punto $C_2\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (0, 0, 1) \\ C_2\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 1\right) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Llamamos X a la variable aleatoria que da la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población. $X = N(75.67, 11.05)$

- a) Nos piden calcular $P(60 \leq X \leq 80)$.

$$\begin{aligned}
 P(60 \leq X \leq 80) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{60 - 75.67}{11.05} \leq Z \leq \frac{80 - 75.67}{11.05}\right) = \\
 &= P(-1.42 \leq Z \leq 0.39) = P(Z \leq 0.39) - P(Z \leq -1.42) = \\
 &= P(Z \leq 0.39) - P(Z \geq 1.42) = P(Z \leq 0.39) - [1 - P(Z \leq 1.42)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6517 - 1 + 0.9222 = \boxed{0.5739}
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

- b) Nos piden calcular $P(X > 100)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > 100) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{100 - 75.67}{11.05}\right) = P(Z > 2.2) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 2.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9861 = \boxed{0.0139}
 \end{aligned}$$

z		
	0,00	
0,0	0,5000	C
0,1	0,5398	C
0,2	0,5793	C
0,3	0,6179	C
0,4	0,6554	C
0,5	0,6915	C
0,6	0,7257	C
0,7	0,7580	C
0,8	0,7881	C
0,9	0,8159	C
1,0	0,8413	C
1,1	0,8643	C
1,2	0,8849	C
1,3	0,9032	C
1,4	0,9192	C
1,5	0,9332	C
1,6	0,9452	C
1,7	0,9554	C
1,8	0,9641	C
1,9	0,9713	C
2,0	0,9772	C
2,1	0,9821	C
2,2	0,9861	C

- c) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de hombres que superan los 100 kilogramos de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.0139$. $Y = B(10, 0.0139)$.

Nos piden hallar $P(Y \leq 1)$.

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \binom{10}{0} 0.0139^0 \cdot 0.9861^{10} + \binom{10}{1} 0.0139^1 \cdot 0.9861^9 =$$

$$= 0.9861^{10} + 10 \cdot 0.0139 \cdot 0.9861^9 = \boxed{0.9919}$$

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
 b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

Llamamos L al suceso “Llueve ese día” y C a “el corredor sufre una caída”.

Nos dicen que $P(C/L) = 0.08$, $P(C/\bar{L}) = 0.004$ y $P(L \cap C) = 0.032$.

Obtenemos la probabilidad de que llueva un día cualquiera:

$$P(C/L) = \frac{P(L \cap C)}{P(L)} \Rightarrow 0.08 = \frac{0.032}{P(L)} \Rightarrow P(L) = \frac{0.032}{0.08} = 0.4$$

- a) Nos piden hallar el valor de $P(\bar{C})$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\bar{C}) &= P(L)P(\bar{C}/L) + P(\bar{L})P(\bar{C}/\bar{L}) = \\ &= P(L)[1 - P(C/L)] + [1 - P(L)][1 - P(C/\bar{L})] = \\ &= 0.4(1 - 0.08) + (1 - 0.4)(1 - 0.004) = \boxed{0.9656} \end{aligned}$$

La probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído es de 0.9656.

- b) Nos piden calcular $P(\bar{L}/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{L}/C) = \frac{P(\bar{L} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\bar{L})P(C/\bar{L})}{1 - P(\bar{C})} = \frac{(1 - 0.4)0.004}{1 - 0.9656} = \boxed{\frac{3}{43} \approx 0.0698}$$

La probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo vale $\frac{3}{43} \approx 0.0698$.