

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	F
--	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}$$

- a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
- b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Pregunta 1.2. Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

- a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las

matrices diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

- b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D , distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.
- b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.
- c) (0.75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$,

Pregunta 2.2. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3. Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V1 cuyos extremos son los puntos A(1, 2, -3) y B(1, 6, 1) y V2 cuyos extremos son los puntos C(-2, -8, 7) y D(10, -4, 7).

- a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V1 y V2. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V1 y con V2.
- b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V1 como a V2. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En una empresa tecnológica internacional el 70% de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de software, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de software en la empresa.
- b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan software para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Pregunta 4.2. Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$

- a) (0.5 puntos) Razone si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos sucesos independientes.
- b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.
- b) (1.25 puntos) Calcule $P(\bar{A} / B)$.

SOLUCIONES

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & \lambda & 11 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 5 - 27 + 30 + \cancel{3\lambda} - \cancel{3\lambda} = -2\lambda^2 + 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 8 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más fácil de analizar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad -6 \quad 4 \quad 22 \\ -10 \quad 5 \quad -15 \quad -10 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -4 \quad -2 \quad 18 \\ -6 \quad 3 \quad -9 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \\ 0 \quad 1 \quad 11 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad -1 \quad 3 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $\lambda = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad -6 \quad -4 \quad 22 \\ -10 \quad -5 \quad 15 \quad 10 \\ \hline 0 \quad -11 \quad 11 \quad 32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -4 \quad -2 \quad 18 \\ -6 \quad -3 \quad 9 \quad 6 \\ \hline 0 \quad -7 \quad 7 \quad 24 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 24 \\ 0 & -11 & 11 & 32 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Fila } 3^a - 11 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -77 \quad 77 \quad 224 \\ 0 \quad 77 \quad -77 \quad -168 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 56 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-2 \quad -1 \quad 3 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -7 \quad 7 \quad 24 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 56}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$ el sistema es **compatible determinado**, para $\lambda = 2$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $\lambda = -2$ el sistema es **incompatible**.

a) Si $\lambda = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -y - 11z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -12 - 11z = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 12 + 11z + 3z = 2 \Rightarrow 2x + 14z = -10 \Rightarrow x + 7z = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -5 - 7z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -5 - 7\lambda \\ y = -12 - 11\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x = -5 - 7\lambda$; $y = -12 - 11\lambda$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pregunta 1.2. Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las

matrices diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D , distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

a) Determinamos la expresión de la matriz DA .

$$DA = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 & 0 & x/2 \\ y/3 & y/2 & y/4 \\ z/3 & z/2 & z/4 \end{pmatrix}$$

Para ser una matriz estocástica deben sumar las diagonales 1.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y = 2 - z \\ 2x + y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2 - z + z = 3 \\ 2x + 2 - z + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 2x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \alpha; \text{ siendo } \alpha \geq 0; 2 - \alpha \geq 0 \\ z = \alpha \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \alpha; \text{ siendo } 0 \leq \alpha \leq 2 \\ z = \alpha \end{array} \right\}$$

Las matrices diagonales $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, siendo $z \in [0, 2]$ cumplen que DA es una matriz estocástica.

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal la matriz BD queda

$$BD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by & cz \\ dx & ey & fz \\ gx & hy & iz \end{pmatrix}.$$

Sabemos que la matriz B es estocásticas por lo que todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna vale 1.

Para que la matriz BD sea una matriz estocástica deben ser todos los elementos positivos o cero, por lo que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. También deben sumar 1 los elementos de cada columna.

$$ax + dx + gx = 1 \Rightarrow (a + d + g)x = 1 \Rightarrow \{a + d + g = 1\} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$by + ey + hy = 1 \Rightarrow (b + e + h)y = 1 \Rightarrow \{b + e + h = 1\} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$cz + fz + iz = 1 \Rightarrow (c + f + i)z = 1 \Rightarrow \{c + f + i = 1\} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

La única matriz diagonal que cumple lo pedido es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:**Pregunta 2.1.** Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.

b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.c) (0.75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$,

a) El dominio de la función son todos los números reales que hacen positivo o cero el radicando.

$$x^2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x(x+3) \geq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \geq -3 \end{array} \right\} \rightarrow x \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \leq -3 \end{array} \right\} \rightarrow x \leq -3$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$$

El dominio de la función es $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.Estudiamos la paridad de la función. Obtenemos la expresión de $f(-x)$.

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3(-x)} = \sqrt{x^2 - 3x}$$

Esta expresión de $f(-x)$ no es igual ni a $f(x)$ ni a $-f(x)$. La función no es par ni impar.

b) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} = \{x < 0 \rightarrow -x > 0\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2 + 3x}}{-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2} + \frac{3x}{(-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{3}{x}} = -\sqrt{1 + \frac{3}{-\infty}} = -\sqrt{1+0} = \boxed{-1}$$

Comprobamos el resultado obtenido dando un valor muy pequeño $x = -1000$ y valoramos la cercanía a -1 .

$$\frac{f(-1000)}{-1000} = \frac{\sqrt{(-1000)^2 + 3(-1000)}}{-1000} \simeq -0.9985$$

El resultado obtenido parece correcto.

Calculamos el segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \infty - \infty = \text{Indeterminación (Conjugado)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)(\sqrt{x^2 + 3x} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} - \frac{x}{x}} = \{x < 0 \rightarrow -x > 0\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\frac{-\sqrt{x^2 + 3x}}{-x} - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2} + \frac{3x}{(-x)^2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1} = \\
&= \frac{3}{-\sqrt{1 + \frac{3}{\infty}} - 1} = \frac{3}{-\sqrt{1 + 0} - 1} = \frac{3}{-1 - 1} = \boxed{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Comprobamos el resultado obtenido dando un valor muy pequeño $x = -1000$ y valoramos la cercanía a -1.5 .

$$f(-1000) - 1000 = \sqrt{(-1000)^2 + 3(-1000)} - 1000 \approx -1.50113$$

El resultado obtenido parece correcto.

También lo podemos resolver cambiando al principio para que x tienda a $+\infty$ y no tengamos problemas al introducir x en la raíz.

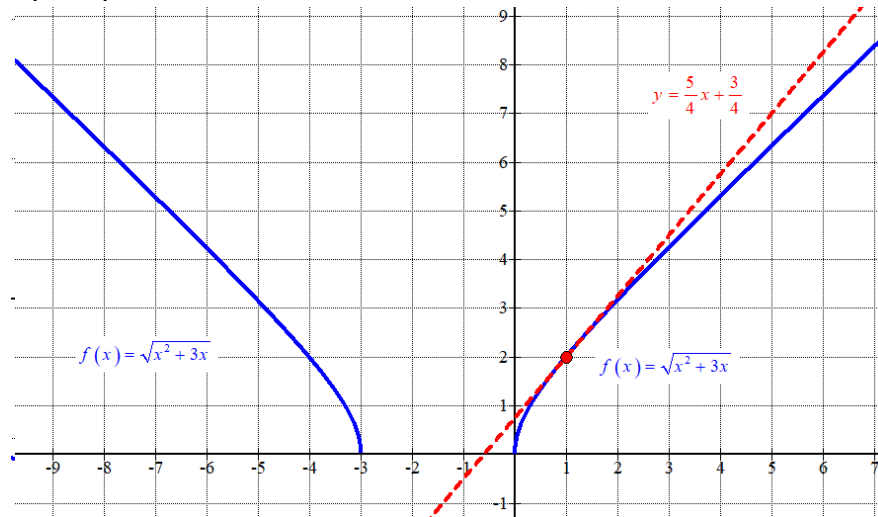
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(-x)^2 - 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) = \\
&= \infty - \infty = \text{Indeterminación (Conjugado)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)(\sqrt{x^2 - 3x} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{+\infty}} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \boxed{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x=1$ tiene la expresión $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2 \cdot 1 + 3}{2\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1}} = \frac{5}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)(x-1) \\ f(1) = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \\ f'(1) = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}}$$

La recta $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x=1$.



Pregunta 2.2. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Para el cálculo de la primitiva pedida primero realizamos la división y simplificamos la expresión de la función.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x^2 \\ -x^3 & -9x \\ \hline & -x^2 - 9x \\ & x^2 & +9 \\ \hline & & -9x + 9 \end{array} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} = x - 1 + \frac{-9x + 9}{x^2 + 9}$$

Calculamos la primitiva.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} dx = \int x - 1 + \frac{-9x + 9}{x^2 + 9} dx = \\ &= \int x - 1 dx + \int \frac{-9x + 9}{x^2 + 9} dx = \frac{x^2}{2} - x - 9 \int \frac{x - 1}{x^2 + 9} dx = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{x^2 + 9} dx &= \int \frac{x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{\frac{x^2}{9} + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{3}{9} \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} - x - 9 \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \right) = \boxed{\frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

Determinamos el valor de C aplicando que $F(0) = \ln 3$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C \\ F(0) &= \ln 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 3 = \frac{0^2}{2} - 0 - \frac{9}{2} \ln(0^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{3}\right) + C \Rightarrow \ln 3 = -\frac{9}{2} \ln 9 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \ln 3 + \frac{9}{2} \ln 9 = \ln 3 + \frac{9}{2} \ln 3^2 = \ln 3 + \frac{9}{2} \cdot 2 \ln 3 = 10 \ln 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + 10 \ln 3}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + 10 \ln 3$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3. Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V1 cuyos extremos son los puntos A(1, 2, -3) y B(1, 6, 1) y V2 cuyos extremos son los puntos C(-2, -8, 7) y D(10, -4, 7).

- a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V1 y V2. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V1 y con V2.
- b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V1 como a V2. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

a) Determinamos los puntos medios de las vigas V1 y V2.

$$V1 \rightarrow \left. \begin{matrix} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow PM_1 = \frac{(1, 2, -3) + (1, 6, 1)}{2} = (1, 4, -1)$$

$$V2 \rightarrow \left. \begin{matrix} C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow PM_2 = \frac{(-2, -8, 7) + (10, -4, 7)}{2} = (4, -6, 7)$$

Los extremos de la viga añadida V3 son $PM_1(1, 4, -1)$ y $PM_2(4, -6, 7)$.

Hallamos los vectores que define cada viga.

$$V1 \rightarrow \left. \begin{matrix} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (1, 6, 1) - (1, 2, -3) = (0, 4, 4)$$

$$V2 \rightarrow \left. \begin{matrix} C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_2 = \overrightarrow{CD} = (10, -4, 7) - (-2, -8, 7) = (12, 4, 0)$$

$$V3 \rightarrow \left. \begin{matrix} PM_1(1, 4, -1) \\ PM_2(4, -6, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_3 = \overrightarrow{PM_2PM_1} = (1, 4, -1) - (4, -6, 7) = (-3, 10, -8)$$

Hallamos los cosenos de los ángulos que forman la viga V3 con V1 y con V2 usando el producto escalar de los vectores que definen cada viga.

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_3|} = \frac{(0, 4, 4) \cdot (-3, 10, -8)}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} \sqrt{(-3)^2 + 10^2 + (-8)^2}} = \frac{40 - 32}{\sqrt{32} \sqrt{173}} = \frac{2}{\sqrt{346}}$$

$$\cos(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3|} = \frac{(12, 4, 0) \cdot (-3, 10, -8)}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 0^2} \sqrt{(-3)^2 + 10^2 + (-8)^2}} = \frac{-36 + 40}{\sqrt{160} \sqrt{173}} = \frac{1}{\sqrt{1730}}$$

El coseno del ángulo que forman la viga V3 con V1 es $\cos(V1, V3) = \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = \frac{2}{\sqrt{346}}$ y el

coseno del ángulo que forma V3 con V2 es $\cos(V2, V3) = \cos(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \frac{1}{\sqrt{1730}}$.

b) Analizamos la situación de la viga V1 con respecto a la V2.

Las vigas no son paralelas pues los vectores que definen no tienen coordenadas proporcionales.

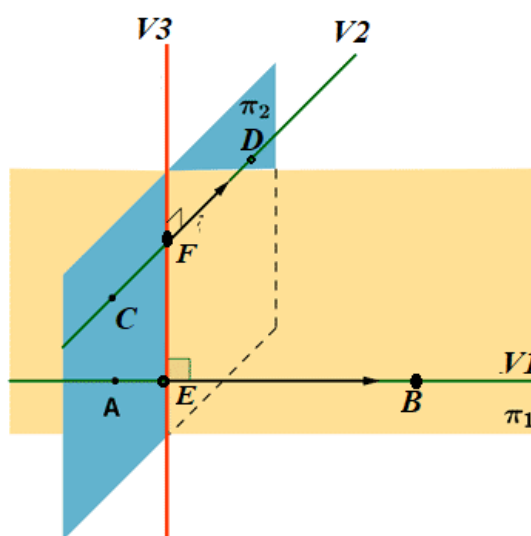
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (0, 4, 4) \\ \vec{v}_2 = (12, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{12} \neq \frac{4}{4} \neq \frac{4}{0}$$

Analizamos si las vigas están en el mismo plano. Para ello los puntos A, B, C y D deben ser coplanarios.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \\ C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 4, 4) \\ \overrightarrow{CD} = (12, 4, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -8, 7) - (1, 2, -3) = (-3, -10, 10) \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 0 \\ -3 & -10 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 480 + 48 - 480 - 0 = -912 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las vigas no están en el mismo plano y se cruzan. Se pueden unir con una viga que sea perpendicular a ambas vigas V1 y V2.



Para hallar los extremos E y F de la viga V3 determinamos el vector perpendicular a las vigas V1 y V2 que es el producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (0, 4, 4) \\ \vec{v}_2 = (12, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 16i + 48k - 48j = (16, -48, 48)$$

Tomamos como vector perpendicular a las vigas el vector:

$$\vec{w} = \frac{1}{16} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \frac{1}{16} (16, -48, 48) = (1, -3, 3)$$

Hallamos las ecuaciones de las rectas que definen cada una de las vigas.

$$V1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = \frac{1}{4} \vec{v}_1 = \frac{1}{4} (0, 4, 4) = (0, 1, 1) \\ A(1, 2, -3) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases}$$

$$V2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = \frac{1}{4} \vec{v}_2 = \frac{1}{4} (12, 4, 0) = (3, 1, 0) \\ C(-2, -8, 7) \in r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = -2 + 3\beta \\ y = -8 + \beta \\ z = 7 \end{cases}$$

Hallamos las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 . El plano π_1 contiene a la recta r_1 y tiene como vector director $\vec{w}$ y el plano π_2 contiene a la recta r_2 y tiene como vector director $\vec{w}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (1, -3, 3) \\ \vec{u}_1 = (0, 1, 1) \\ A(1, 2, -3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1) + z+3 - y+2 - 3(x-1) = 0 \Rightarrow -3x+3+z+3-y+2-3x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 : -6x - y + z + 11 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (1, -3, 3) \\ \vec{u}_2 = (3, 1, 0) \\ C(-2, -8, 7) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y+8 & z-7 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(y+8) + z-7 + 9(z-7) - 3(x+2) = 0 \Rightarrow 9y+72+z-7+9z-63-3x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_2 : -3x + 9y + 10z - 4 = 0}$$

El punto F es el punto de corte del plano π_1 con la recta r_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: -6x - y + z + 11 = 0 \\ r_1: \begin{cases} x = -2 + 3\beta \\ y = -8 + \beta \\ z = 7 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -6(-2 + 3\beta) + 8 - \beta + 7 + 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 - 18\beta + 8 - \beta + 7 + 11 = 0 \Rightarrow -19\beta + 38 = 0 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3 \cdot 2 = 4 \\ y = -8 + 2 = -6 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(4, -6, 7)}$$

El punto E es el punto de corte del plano π_2 con la recta r_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2: -3x + 9y + 10z - 4 = 0 \\ r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + 9(1 + 2\alpha) + 10(-3 + \alpha) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 9 + 18\alpha - 30 + 10\alpha - 4 = 0 \Rightarrow 28\alpha - 28 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = -3 + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(1, 3, -2)}$$

Los puntos de apoyo de la viga V3 son $E(1, 3, -2)$ y $F(4, -6, 7)$.

Solo faltaría comprobar que el punto F está situado entre C y D, por lo que se apoya en la viga V2. También que el punto E está situado entre A y B y que la viga V3 se apoya en la viga V1.

Comprobamos que los vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{EB}$ tienen el mismo sentido

$$\left. \begin{array}{l} E(1, 3, -2) \\ A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = (1, 3, -2) - (1, 2, -3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{EB} = (1, 6, 1) - (1, 3, -2) = (0, 3, 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AE}$$

Comprobamos que los vectores $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{FD}$ tienen el mismo sentido.

$$\left. \begin{array}{l} F(4, -6, 7) \\ C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CF} = (4, -6, 7) - (-2, -8, 7) = (6, 2, 0) \\ \overrightarrow{FD} = (10, -4, 7) - (4, -6, 7) = (6, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD}$$

El punto F es el punto medio de la viga V2.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En una empresa tecnológica internacional el 70% de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de software, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de software en la empresa.
- (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan software para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Pasamos estos valores porcentuales a valores absolutos para obtener toda la información sobre el grupo de empleados. Podremos aplicar la regla de Laplace y responder a las cuestiones planteadas.

Supongamos que hay 100 empleados. El 70% de los empleados son europeos, es decir, hay 70 empleados que son europeos y por tanto hay $100 - 70 = 30$ empleados que no son europeos. Una tercera parte de los empleados no europeos (30) se dedica al desarrollo de software $\rightarrow 30/3 = 10$ empleados no europeos desarrollan software, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos $\rightarrow \frac{3}{7} \cdot 70 = 30$ empleados europeos desarrollan software.

Colocamos estos datos en una tabla para tenerlos organizados y fácilmente localizables.

	Desarrollan Software	No desarrollan software	
Europeos	30		70
No europeos	10		30
			100

Completamos la tabla.

	Desarrollan Software	No desarrollan software	
Europeos	30	40	70
No europeos	10	20	30
	40	60	100

- De los 100 empleados solo 40 son europeos que no desarrollan software. La probabilidad de que al elegir a un empleado sea europeo y no desarrolle software es $\frac{40}{100} = 0.4$.

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de empleados que desarrollan software de un grupo de 10 empleados elegidos al azar. Esta variable es binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.4$. $X = B(10, 0.4)$

Nos piden calcular $P(X \leq 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \\
 &+ \binom{10}{2} 0.4^2 \cdot 0.6^8 = 0.6^{10} + 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^9 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^8 = \boxed{0.1673}
 \end{aligned}$$

Pregunta 4.2. Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$

a) (0.5 puntos) Razone si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos sucesos independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.

b) (1.25 puntos) Calcule $P(\bar{A} / B)$.

a) Para que dos sucesos sean independientes debe cumplirse que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

$$\left. \begin{array}{l} P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3 \\ P(\bar{B}) = 0.2 \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \neq 0.06 = 0.3 \cdot 0.2 = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ no son independientes.

b) Hallamos la probabilidad de la unión de los sucesos A y B aplicando una de las leyes de Morgan.

$$\left. \begin{array}{l} P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.1 = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.1 = 0.9$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 0.9 \\ P(A) = 0.7 \\ P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.2 = 0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = 0.7 + 0.8 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.9 = 0.6}$$

c) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 - 0.6}{0.8} = \boxed{0.25}$$