



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
306-MATEMÁTICAS II
 PAU2025 - JULIO

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

- a) [1] Discute el sistema en función del parámetro k .
- b) [0,5] Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.
- c) [1] Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

- a) [0,75] Demuestre que $(A + I)^2 = 2A + I$ y que $(A + I)^3 = 3A + I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) [0,75] Demuestre que la matriz $I - A$ es inversa de la matriz $I + A$.
- c) [1] Resuelva la ecuación matricial $X + AX = A$ expresando X en función de A .

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

b) [0,5] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5}$

c) [1] $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

2B) Considere la función $f(x) = tg^3(x)$.

- a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$
- b) [0,75] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

- c) [0,25] Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) a) [1,25] Determine el valor de a y b para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

- b) [1,25] ¿Para qué valores de a y b corta a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi : x + y + 3z = 0$.

- a) [1] Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π .
b) [0,75] Halle dicho punto.
c) [0,75] Calcule la distancia que debe recorrer.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

- a) [1] Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
b) [0,5] Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.
c) [1] Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

- a) [0,5] Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
b) [0,75] Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
c) [0,5] Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
d) [0,75] Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

SOLUCIONES**CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):**

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

a) [1] Discute el sistema en función del parámetro k .

b) [0,5] Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.

c) [1] Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

a) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = \cancel{1} + k + 2k - 2 - \cancel{1} - k^2 = -k^2 + 3k - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 3k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=k} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=k} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 1$ y $k \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el

de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el

de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) El sistema es compatible indeterminado para $k = 2$. Hallamos la expresión de sus infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=-1-2z \end{cases} \Rightarrow x-1-2z+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema para valores $k \neq 1$ y $k \neq 2$.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x & +2y & +kz & = 2 \\ -2x & -2y & -2z & = -2 \\ \hline & & (k-2)z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x & +ky & +3z & = 0 \\ -x & -y & -z & = -1 \\ \hline & (k-1)y & +2z & = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (k-2)z=0 \Rightarrow \{k-2 \neq 0\} \Rightarrow \\ (k-1)y+2z=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ \boxed{z=0} \\ (k-1)y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+0=1 \\ (k-1)y+2 \cdot 0=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (k-1)y=-1 \Rightarrow \{k-1 \neq 0\} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{y=\frac{1}{1-k}} \end{cases} \Rightarrow x+\frac{1}{1-k}=1 \Rightarrow x=1-\frac{1}{1-k}=\frac{1-k-1}{1-k} \Rightarrow \boxed{x=\frac{k}{k-1}}$$

La solución del sistema es $x=\frac{k}{k-1}$, $y=\frac{1}{1-k}$, $z=0$, para cualquier valor de k distinto de 1 y 2.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) **[0,75]** Demuestre que $(A + I)^2 = 2A + I$ y que $(A + I)^3 = 3A + I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) **[0,75]** Demuestre que la matriz $I - A$ es inversa de la matriz $I + A$.

c) **[1]** Resuelva la ecuación matricial $X + AX = A$ expresando X en función de A .

a) Demostramos la igualdad $(A + I)^2 = 2A + I$.

$$(A + I)^2 = (A + I)(A + I) = A^2 + A \cdot I + I \cdot A + I \cdot I = O + 2A + I = 2A + I$$

Demostramos la igualdad $(A + I)^3 = 3A + I$.

$$(A + I)^3 = (A + I)^2 (A + I) = (2A + I)(A + I) = 2A^2 + 2A + A + I \cdot I = 2O + 3A + I = 3A + I$$

b) Realizamos el producto $(I - A)(I + A)$ y comprobamos que se obtiene como resultado la matriz identidad.

$$(I - A)(I + A) = I \cdot I + I \cdot A - A \cdot I - A^2 = I + A - A - O = I$$

Se cumple que el producto da como resultado la matriz identidad y la matriz $I - A$ es inversa de la matriz $I + A$.

c) Resolvemos la ecuación matricial $X + AX = A$.

$$X + AX = A \Rightarrow X(I + A) = A \Rightarrow X(I + A)(I - A) = A(I - A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \cdot I = A - A^2 \Rightarrow X = A - O \Rightarrow \boxed{X = A}$$

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

b) [0,5] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$

c) [1] $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

a) Calculamos el primer límite.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) &= \frac{1}{0^+} - \frac{1}{\sin(0^+)} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = +\infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \frac{\sin(0) - 0}{0 \cdot \sin(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} = \frac{\cos(0) - 1}{\sin(0) + 0 \cdot \cos(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{-\sin(0)}{\cos(0) + \cos(0) - 0 \cdot \sin(0)} = \frac{0}{2} = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

b) Calculamos el segundo límite.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}}{18x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{36x\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{9\sqrt{2x^2+1}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

c) Calculamos el tercer límite.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) &= (+\infty)(e^{1/\infty} - 1) = (+\infty)(e^0 - 1) = (+\infty)(0) = \\
 &= \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{1/\infty} - 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \\
 &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^{1/\infty} = e^0 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

2B) Considere la función $f(x) = \operatorname{tg}^3(x)$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) [0,75] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$.

c) [0,25] Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

a) Calculamos la integral utilizando equivalencias trigonométricas y realizando un cambio de variable.

$$\int f(x) dx = \int \operatorname{tg}^3(x) dx = \int \operatorname{tg}^2(x) \operatorname{tg}(x) dx = \dots$$

$$\operatorname{tg}^2(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

$$\dots = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right) \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \operatorname{tg}(x) dx - \int \operatorname{tg}(x) dx = \dots$$

$$\begin{aligned} 1^a \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)} \operatorname{tg}(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}(x) \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} \\ 2^a \rightarrow \int \operatorname{tg}(x) dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\operatorname{sen}(x) dx \rightarrow \frac{dt}{-\operatorname{sen}(x)} = dx \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{t} \frac{dt}{-\operatorname{sen}(x)} = - \int \frac{1}{t} dt = -\ln t = -\ln |\cos(x)| \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} - (-\ln |\cos(x)|) = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln |\cos(x)| + C$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x) dx = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln |\cos(x)| + C$.

b) La función tangente no se anula entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y además es una función positiva.

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$ es el valor de la integral definida de la función entre estos dos valores.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi/4} f(x) dx = \left[\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| \right]_0^{\pi/4} = \\ &= \left[\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \right] - \left[\frac{\operatorname{tg}^2(0)}{2} + \ln|\cos(0)| \right] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \ln 1 = \\ &= \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} - \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{\frac{1}{2}(1 - \ln 2)} \end{aligned}$$

c) Comprobamos si el valor obtenido $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{2} (\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

Es cierta la igualdad y el valor del área se puede expresar como $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):3A) a) [1,25] Determine el valor de a y b para que el plano $\pi: 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) [1,25] ¿Para qué valores de a y b corta a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

a) Para que el plano contenga a la recta debe contener a todos los puntos de la recta.

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = x + 2y \end{cases} \Rightarrow x + y + x + 2y = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y + 2y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow A_r(-1, 1, 1)$$

$$\lambda = -1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow B_r(2, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + az = b \\ A_r(-1, 1, 1) \in \pi \\ B_r(2, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 1 + a = b \\ 4 - 1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + a = b \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = -1 + a \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = 3$.

b) La recta corta al plano cuando el vector director de la recta no es perpendicular al vector normal del plano. Para ello el producto escalar de ambos vectores no debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + az = b \rightarrow \vec{n} = (2, 1, a) \\ r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 1, a) \cdot \left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = -3 + 1 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - 2$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - 2 \neq 0 \Rightarrow a - 4 \neq 0 \Rightarrow \boxed{a \neq 4}$$

Para cualquier valor de a distinto de 4 la recta corta el plano.

Para $a = 0$ y $b = 7$ la recta corta al plano en un punto P ($a \neq 4$). Determinamos las coordenadas de ese punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r: \begin{cases} \pi: 2x + y = 7 \\ x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) + \lambda = 7 \Rightarrow 1 - 3\lambda + \lambda = 7 \Rightarrow -2\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(-3) = 5 \\ y = -3 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(5, -3, -1)}$$

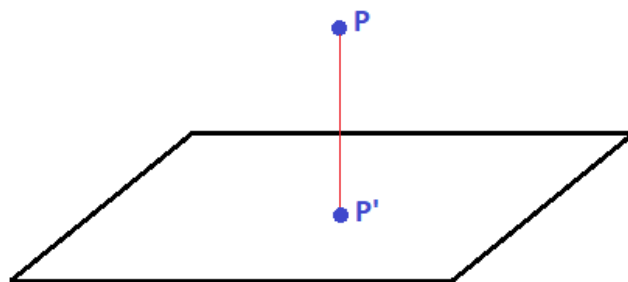
La recta corta al plano en el punto $P(5, -3, -1)$.

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$.

- a) **[1]** Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π .
 b) **[0,75]** Halle dicho punto.
 c) **[0,75]** Calcule la distancia que debe recorrer.

a) Debemos calcular la proyección ortogonal del punto P en el plano.

Hallamos la trayectoria que es la recta perpendicular al plano que pasa por P. Al ser ortogonal al plano el vector director de la recta es el vector normal del plano.



$$\pi: x + y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$$

La ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que sigue el helicóptero para llegar al punto más cercano a π es $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$.

b) El punto P' al que llega el helicóptero lo determinamos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + 3z = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + 2 + \alpha + 3(1 + 3\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \alpha + 2 + \alpha + 3 + 9\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -\frac{6}{11} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} \\ y = 2 - \frac{6}{11} = \frac{16}{11} \\ z = 1 - \frac{18}{11} = -\frac{7}{11} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, -\frac{7}{11} \right)$$

El punto donde aterriza el helicóptero tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right)$.

c) La distancia que debe recorrer es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\left. \begin{array}{l} P'\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right) \\ P(1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right) - (1, 2, 1) = \left(\frac{-6}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-18}{11}\right)$$

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{-6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-18}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{396}{121}} = \frac{6\sqrt{11}}{11} \approx 1.8 \text{ unidades}$$

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

- a) **[1]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
 b) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.
 c) **[1]** Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

Ponemos estos datos en una tabla para obtener la información implícita y tener más cómodo acceso a toda la información.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$		240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$		180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$		80
TOTALES			

Completamos la tabla.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$	144	240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$	90	180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$	8	80
TOTALES	258	242	500

- a) De los 500 espectadores le gustó la película a 258. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al espectador elegido al azar le guste la película vale $\frac{258}{500} = 0.516$.
- b) A los espectadores de la sala S3 le ha gustado la película al 90%. La probabilidad de que al elegir un espectador de la sala S3 le guste la película vale 0.9.
- c) La película le ha gustado a 258 espectadores y de estos solo 72 estuvieron en la sala S3. La probabilidad de que el espectador al que le ha gustado la película haya estado en la sala S3 vale $\frac{72}{258} = \frac{12}{43} \approx 0.28$

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

- [0,5] Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
- [0,75] Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
- [0,5] Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
- [0,75] Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

a) Denominamos X = el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo $n = 280$ y p = probabilidad de que un pasajero se presente = 0.95. $X = B(280, 0.95)$.

Existen 280 repeticiones del experimento “el pasajero se presenta” y cada repetición es independiente de las demás.

La media es $n \cdot p = 280 \cdot 0.95 = 266$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{280 \cdot 0.95 \cdot 0.05} \approx 3.647$.

Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de probabilidades aproximamos esta binomial a una normal de media 266 y desviación típica 3.647. $Y = N(266, 3.647)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 266 > 5$ y $nq = 280 \cdot 0.05 = 14 > 5$.

b) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten 261 pasajeros o más. Determinamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X \geq 261) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 260.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{260.5 - 266}{3.647}\right) = P(Z \geq -1.51) = P(Z \leq 1.51) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9345}$$

z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9345	0.9345	0.9

La probabilidad de que falten plazas en el avión es de 0.9345.

c) La probabilidad pedida es la del suceso contrario al suceso “faltan plazas en el avión”. La probabilidad de que no falten vale $1 - 0.9345 = 0.0655$.

d) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten exactamente 260 pasajeros.

$$\begin{aligned}
 P(X = 260) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(259.5 \leq Y \leq 260.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(\frac{259.5 - 266}{3.647} \leq Z \leq \frac{260.5 - 266}{3.647}\right) = P(-1.78 \leq Z \leq -1.51) = \\
 &= P(Z \leq -1.51) - P(Z \leq -1.78) = P(Z \geq 1.51) - P(Z \geq 1.78) = \\
 &= [1 - P(Z \leq 1.51)] - [1 - P(Z \leq 1.78)] = P(Z \leq 1.78) - P(Z \leq 1.51) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9625 - 0.9345 = \boxed{0.028}
 \end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625

La probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión es de 0.028.