

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 Cód 29- MATEMÁTICAS	Convocatoria 2025
---	--	---

Cuestión 1 [2.5 puntos] Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & -0 & -k \end{pmatrix}$$

se pide:

- (a) **[1.5 puntos]** Estudiar el rango de la matriz para los diferentes valores del parámetro k .

SOLUCIÓN:

En primer lugar calcularemos el determinante para determinar aquellos valores del parámetro que hacen que la matriz no tenga rango máximo. Así:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & -0 & -k \end{vmatrix} = -2k^2 + 4k + 8$$

Por tanto, nos interesan aquellos valores que anulan dicho determinante, en estos casos el rango de la matriz A será menor que 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2k^2 + 4k + 8 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{10} = \begin{cases} 1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Luego:

- Si $k \neq 1 \pm \sqrt{5}$ el rango de la matriz A será 3.
- Si $k = 1 \pm \sqrt{5}$, tenemos que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -0 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto, la matriz A tendrá rango 2.

- (b) **[1.0 puntos]** Calcular la inversa de la matriz A para $k = 1$.

SOLUCIÓN:

En este caso,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -0 & -1 \end{vmatrix} = 10$$

y por tanto, sabemos que tiene inversa, siendo esta:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cuestión 2 [2.5 puntos] Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + k \cdot y + k \cdot z = k \\ k \cdot x + y + z = k \\ y + 2z = k \end{cases}$$

Se pide:

- (a) **[1.5 puntos]** Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calcularemos el determinante asociado a la matriz de los coeficientes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - k^2.$$

Entonces, si $\det(A) \neq 0$ el sistema será compatible determinado (teorema de Rouché-Frobenius). Por tanto:

$$1 - k^2 = 0, \Rightarrow k = \pm 1$$

- Luego si $k \neq \pm 1$ el sistema es **compatible determinado**.

- Para $k = 1$, la matriz de los coeficientes A y la ampliada serán: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$.

Como se observa, la primera y segunda fila coinciden. Por otro lado, el rango de la matriz A y el de la ampliada es 2 ya que tenemos una submatriz 2x2 con determinante no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Luego el sistema será compatible indeterminado, siendo las soluciones de la forma $(\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

- Para $k = -1$, la matriz de los coeficientes A y la ampliada serán: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$.

Como se observa, sumado la primer y segunda fila se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Por otro lado, el rango de la matriz A sería 2 y de la ampliada es 3, por tanto, el sistema sería incompatible.

- (b) **[1.0 puntos]** Resolverlo para $k = 2$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Cuestión 3 [2.5 puntos] Calcular el área de la región del plano encerrada entre la función

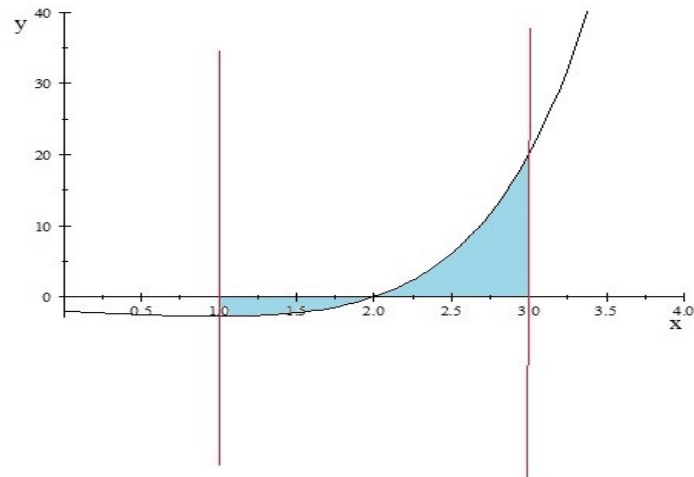
$$f(x) = (x - 2)e^x$$

el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN:

Gráficamente:

$$f(x) = (x - 2)e^x$$



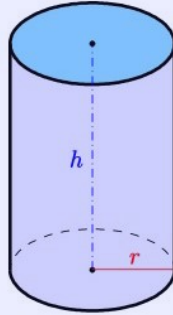
Luego, el área pedida será:

$$\text{Área} = - \int_1^2 (x - 2)e^x dx + \int_2^3 (x - 2)e^x dx = 2e^2 + 2e$$

ya que, aplicando integración por partes, tenemos:

$$\int (x - 2)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = (x - 2) \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = (x - 2)e^x - \int e^x dx = (x - 3)e^x$$

Cuestión 4 [2.5 puntos] Diseñar un recipiente cilíndrico de chapa con 10l (10.000 cm^3) de capacidad con el fin de que el gasto de chapa sea mínimo. (Justificar tanto el planteamiento como la resolución)

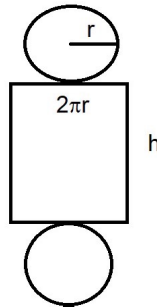


SOLUCIÓN:

Sabemos que el volumen del cilindro viene dado por

$$Vol = \pi * r^2 * h = 10000 \rightarrow h = \frac{10000}{\pi * r^2}$$

por otro lado, el gasto de chapa será:



$$Chapa = h * 2 * \pi * r + 2 * \pi * r^2$$

de donde:

$$\begin{aligned} Chapa(r) &= \frac{10000}{\pi * r^2} * 2 * \pi * r + 2 * \pi * r^2 \\ &= \frac{20000}{r} + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Para buscar los candidatos a extremos, resolveremos:

$$\begin{aligned} Chapa(r)' &= 0 \\ 4\pi r - \frac{20000}{r^2} &= 0 \rightarrow 4\pi r^3 = 20000 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{20000}{4\pi}} cm \end{aligned}$$

Se trata de un mínimo ya que:

$$Chapa(r)'' = 4\pi + \frac{40000}{r^3} > 0 \text{ en } r = \sqrt[3]{\frac{20000}{4\pi}}$$

Cuestión 5 [2.5 puntos] Dada la siguiente recta y plano:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z-4 \quad \pi: 3x-2y+z=3$$

Se pide:

- (a) [1.0 puntos] Determinar un vector director de la recta r y un vector normal al plano π .

SOLUCIÓN:

Un vector director de la recta r viene dado por $(3, 2, 1)$, mientras que un vector normal al plano π será $(3, -2, 1)$.

- (b) [1.5 puntos] Determinar su posición relativa.

SOLUCIÓN:

Por otro lado, sabemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0. Así:

$$(3, 2, 1) \cdot (3, -2, 1) = 9 - 4 + 1 = 6 \neq 0$$

Luego ambos vectores no son perpendiculares y por tanto, la recta y el plano no serían paralelos cortándose en el punto solución del sistema de ecuaciones formado por la recta y el plano. Así:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z-4 \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

sustituyendo en la ecuación del plano, se tiene:

$$3x - 2y + z = 3 \rightarrow 3(1 + 3\lambda) - 2(2\lambda) + (4 + \lambda) = 3 \rightarrow \lambda = -2/3$$

Luego el punto de corte será:

$$(-1, -4/3, 10/3)$$

Cuestión 6 [2.5 puntos] Dados los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} A &= (0, 1, 1) & B &= (0, 1, 2) \\ C &= (-2, 1, 3) & D &= (\alpha, \alpha - 1, 2) \end{aligned}$$

Se pide:

- (a) [1.5 puntos] Hallar el plano que contiene a los puntos A , B y C .

SOLUCIÓN:

Calulemos en primer lugar los vectores correspondientes $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$. A partir de aquí, un vector normal a estos dos viene dado por:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2j \rightarrow (0, -2, 0)$$

: $-2j$ Por tanto, la ecuación del plano que pasa por esos tres puntos viene dada por:

$$-2y = k$$

Como debe pasar por los puntos dados, calculamos el valor de k para que cualquiera de los tres puntos cumpla dicha ecuación, por ejemplo el punto A . Así:

$$-2 * 1 = k \rightarrow k = -2$$

Por tanto, el plano que contiene a los puntos A , B y C será el plano $\pi: y = 1$

(b) [1.0 puntos] Hallar el valor del parámetro α para que los cuatro puntos sean coplanarios.

SOLUCIÓN:

Para que sean coplanarios, es suficiente con imponer que el punto D verifique la ecuación del plano anterior, por tanto, la segunda coordenada debe ser 1,

$$\alpha - 1 = 1 \rightarrow \alpha = 2$$

Otra opción sería ver que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, son linealmente dependientes, siendo $\overrightarrow{AD} = (\alpha, \alpha - 2, 1)$, luego el determinante formado por dichos vectores debería ser nulo. Así:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 2$$

Cuestión 7 [2.5 puntos] Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C.

A partir de esta información, se pide:

- (a) [1.5 puntos] Calcular razonadamente la probabilidad de que una resistencia seleccionada al azar resulte defectuosa.

SOLUCIÓN:

Definamos los sucesos:

A = "El producto es producido por A"

B = "El producto es producido por B"

C = "El producto es producido por C"

D = "El producto es defectuoso"

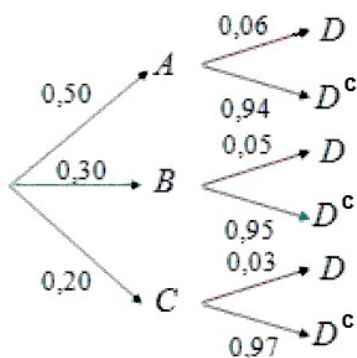
A partir del enunciado, tenemos las siguientes probabilidades:

$$\Pr(A) = 0.5 \quad \Pr(B) = 0.30 \quad \Pr(C) = 0.20$$

$$\Pr(D/A) = 0.06 \quad \Pr(D/B) = 0.05 \quad \Pr(D/C) = 0.03$$

$$\Pr(D^c/A) = 0.94 \quad \Pr(D^c/B) = 0.95 \quad \Pr(D^c/C) = 0.97$$

Gráficamente:



Como nos piden $\Pr(D)$, aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$\begin{aligned} \Pr(D) &= \Pr(D/A) \cdot \Pr(A) + \Pr(D/B) \cdot \Pr(B) + \Pr(D/C) \cdot \Pr(C) = \\ &= 0.06 * 0.5 + 0.05 * 0.30 + 0.03 * 0.20 = 0.051 \end{aligned}$$

- (b) [1.0 puntos] Si se ha seleccionado una resistencia defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga del operario A?

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\begin{aligned}\Pr(A/D) &= \frac{\Pr(D \cap A)}{\Pr(D)} = \frac{\Pr(D/A) \cdot \Pr(A)}{\Pr(D/A) \cdot \Pr(A) + \Pr(D/B) \cdot \Pr(B) + \Pr(D/C) \cdot \Pr(C)} \\ &= \frac{0.06 \cdot 0.5}{0.051} = 0.588\end{aligned}$$

Cuestión 8 [2.5 puntos] Se sabe que el tiempo necesario para la finalización de un determinado proceso industrial se puede modelar como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

A partir de esta información, se pide:

- (a) [0.75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 20 minutos en finalizarse la tarea?

SOLUCIÓN:

Definamos la variable:

$$X = \text{"Tiempo (minutos) dedicado al proceso industrial"}$$

Nos indican que X sigue una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos, esto es: $X \sim N(15, \sigma = 5)$.

Así:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 20) &\stackrel{\text{Tipificando}}{\rightarrow} \Pr(Z > \frac{20 - 15}{5}) = \Pr(Z > 1) = 1 - \Pr(Z \leq 1) = \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587\end{aligned}$$

- (b) [0.75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 10 y 20 minutos?

SOLUCIÓN:

En este caso tenemos $X \sim N(\mu = 15, \sigma = 5)$ y nos piden:

$$\begin{aligned}\Pr(X \in (10, 20)) &= \Pr(X < 20) - \Pr(X \leq 10) \stackrel{\text{Tipificando}}{\rightarrow} \Pr(Z < \frac{20 - 15}{5}) - \Pr(Z \leq \frac{10 - 15}{5}) \\ &= \Pr(Z < 1) - \Pr(Z \leq -1) = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826\end{aligned}$$

- (c) [1.0 puntos] Determinar el percentil 25, es decir, el tiempo x que determinará que el 25% de las veces el procedimiento ha finalizado.

SOLUCIÓN:

Nos piden determinar el valor x que verifica:

$$\Pr(X < x) = 0.25 \stackrel{\text{Tipificando}}{\rightarrow} \Pr(Z < \frac{x - 15}{5}) = 0.25$$

Por tanto, por simetría de la $N(0, 1)$, tenemos:

$$z_{0.25} = -z_{0.75} = -0.675$$

Luego:

$$\frac{x - 15}{5} = -0.675 \rightarrow x = 15 - 5 \cdot 0.675 = 11.625$$