

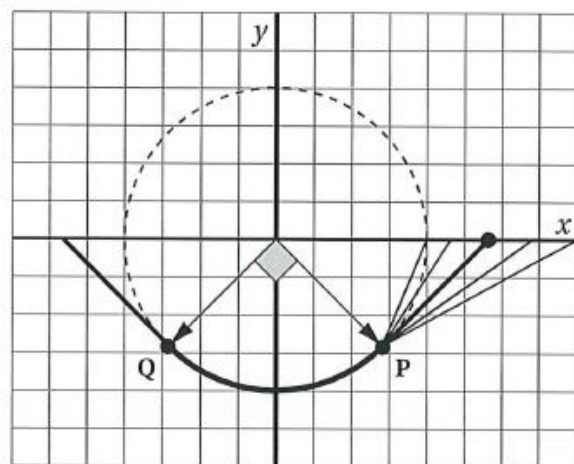
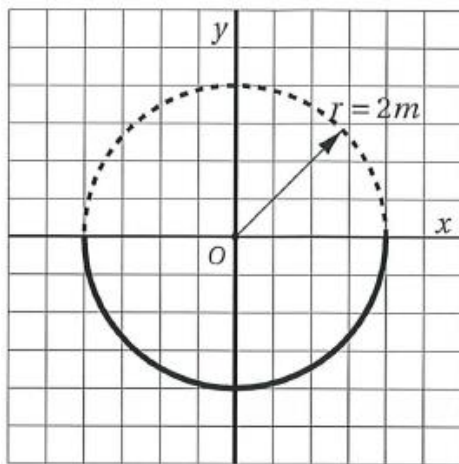
Prueba de Acceso a la Universidad

Curso: 2024-2025

Asignatura: MATEMÁTICAS II

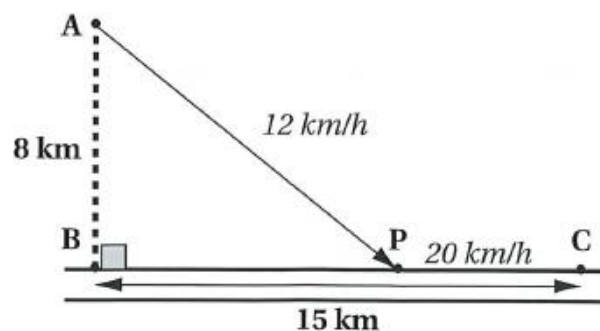
Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



- (a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)
- (b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m^2 - m)x + (2m + 1)y = 2 \\ (m - m^2)x - (2m + 1)y + (m + 2)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3, 3, 5)$ y $B(1, -1, 1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2,5 puntos)

C1) Sea $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$.

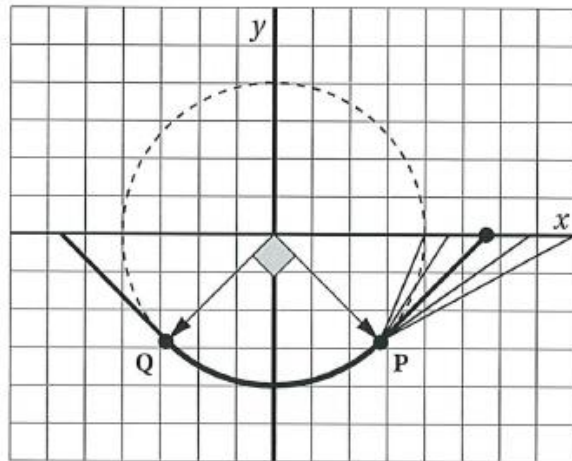
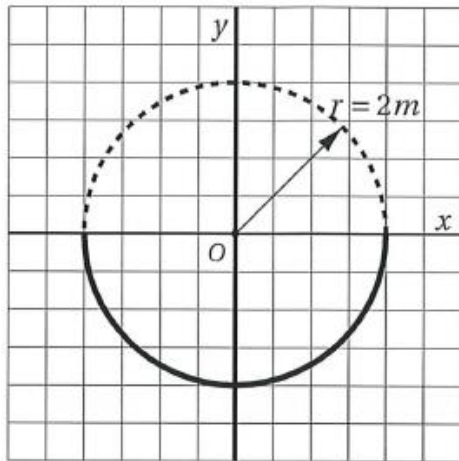
(a) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = \frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

(b) Demuestra que existe un punto d en $(0, 2)$ tal que $f''(d) = 0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = x^3 - x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

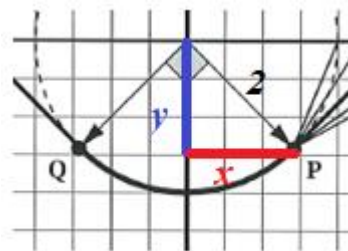
SOLUCIONES

P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



- (a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)
- (b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

- (a) Si el ángulo QOP es de 90° y la figura es simétrica el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto al eje OY es de la mitad de 90° : $(\overrightarrow{OP}, OY) = 45^\circ$, por lo que las coordenadas del punto P son $P(x, -x)$.



Como P está en la circunferencia debe cumplir la ecuación que la define $x^2 + y^2 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ P(x, -x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$$

Las coordenadas del punto P son $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y las del punto Q son $Q(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

- (b) Para que la trayectoria no se vea alterada la recta debe ser tangente a la curva.

La curva tiene ecuación $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}$. Tomamos la raíz negativa pues la función es negativa.

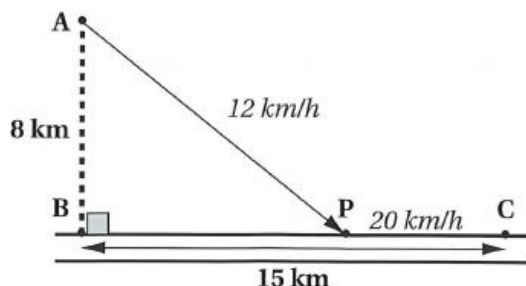
Hallamos la tangente a la función en $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$ en $x = \sqrt{2}$.

$$f(x) = -\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

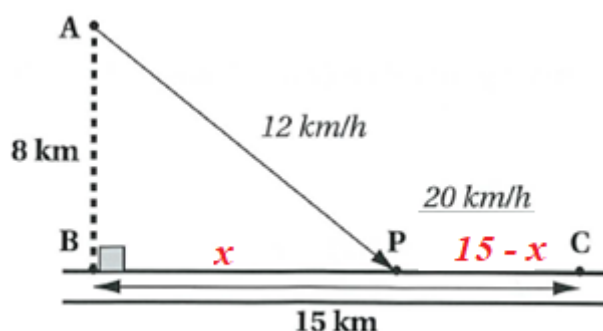
$$\left. \begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= -\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = -\sqrt{4-2} = -\sqrt{2} \\ f'(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \\ y - f(\sqrt{2}) &= f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + \sqrt{2} = 1(x - \sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = x - 2\sqrt{2}}$$

La recta que pasa por el punto P y cumple lo pedido es la recta tangente al círculo y que pasa por P, que tiene ecuación $y = x - 2\sqrt{2}$.

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



Completamos el dibujo para establecer la función tiempo total en hacer el recorrido en función.



La distancia de A a P es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 8 y “x”.

$$\overline{AP}^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{64 + x^2}$$

Esta distancia la recorre a 12 km/h por lo que tarda en recorrerla $\frac{\sqrt{64 + x^2}}{12}$ horas.

La distancia de P a C vale $15 - x$. Se tarda en recorrerla $\frac{15 - x}{20}$.

El tiempo que tarda en ir de A a C pasando por P es la suma de los dos tiempos obtenidos.

$$f(x) = \frac{\sqrt{64 + x^2}}{12} + \frac{15 - x}{20}, \quad x \in [0, 15]$$

Derivamos la función obtenida y obtenemos sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{12} \sqrt{64 + x^2} + \frac{15 - x}{20} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12} \frac{2x}{2\sqrt{64 + x^2}} + \frac{-1}{20} = \frac{x}{12\sqrt{64 + x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{12\sqrt{64 + x^2}} - \frac{1}{20} = 0 \Rightarrow \frac{x}{12\sqrt{64 + x^2}} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20x = 12\sqrt{64 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}x = \sqrt{64 + x^2} \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 64 + x^2 \Rightarrow \frac{16}{9}x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{36} = 6}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz pues estamos trabajando con una distancia que debe ser positiva. Y menor o igual a 15.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

Antes de $x = 6$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{5}{12\sqrt{64+5^2}} - \frac{1}{20} = -0.005 < 0$.

Después de $x = 6$ tomamos $x = 7$ y la derivada vale $f'(7) = \frac{7}{12\sqrt{64+7^2}} - \frac{1}{20} = 0.005 > 0$.

La función decrece antes de $x = 6$ y crece después. La función tiene un mínimo relativo para este valor.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para decidir donde se sitúa el valor mínimo absoluto.

$$f(0) = \frac{1}{12}\sqrt{64+0^2} + \frac{15-0}{20} = \frac{8}{12} + \frac{15}{20} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

$$f(6) = \frac{1}{12}\sqrt{64+6^2} + \frac{15-6}{20} = \frac{10}{12} + \frac{9}{20} = \frac{77}{60} \approx \mathbf{1.283 \text{ mínimo absoluto}}$$

$$f(15) = \frac{1}{12}\sqrt{64+15^2} + \frac{15-15}{20} = \frac{8}{12} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

La distancia de B a la que debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible es de 6 kilómetros.

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m^2 - m)x + (2m + 1)y = 2 \\ (m - m^2)x - (2m + 1)y + (m + 2)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 & 2 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 & 2m + 2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 & 2 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 & 2m + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ m - m^2 \quad -(2m + 1) \quad m + 2 \quad 2m + 2 \\ m^2 - m \quad 2m + 1 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m + 2 \quad 2m + 4 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ m^2 - m \quad 2m + 1 \quad 0 \quad 2 \\ -m^2 + m \quad -m - 2 \quad 1 \quad -1 + m^2 \\ \hline 0 \quad m - 1 \quad 1 \quad m^2 + 1 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ 0 & m - 1 & 1 & m^2 + 1 \\ 0 & 0 & m + 2 & 2m + 4 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 \\ 0 & m - 1 & 1 \\ 0 & 0 & m + 2 \end{vmatrix} = (m + 2)(m - 1)(m^2 - m) = (m + 2)(m - 1)m(m - 1) =$$

$$= m(m + 2)(m - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 2 = 0 \rightarrow m = -2 \\ m - 1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -2$, $m = 0$ y cuando $m = 1$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ 0 & m - 1 & 1 & m^2 + 1 \\ 0 & 0 & m + 2 & 2m + 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + z = m^2 + 1 \\ (m + 2)z = 2(m + 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \{m + 2 \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + z = m^2 + 1 \\ \boxed{z = \frac{2(m + 2)}{m + 2} = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - 2 = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + 2 = m^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y = 3 - m^2 \\ (m - 1)y = m^2 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \{m - 1 \neq 0\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y = 3 - m^2 \\ \boxed{y = \frac{m^2 - 1}{m - 1} = \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1} = m + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m)x + (m + 2)(m + 1) = 3 - m^2 \Rightarrow (m^2 - m)x + m^2 + 2 + m + 2m = 3 - m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m)x = 1 - 3m - 2m^2 \Rightarrow \{m(m - 1) \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}}$$

La solución es $x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}$, $y = m + 1$, $z = 2$.

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{0 \quad 2 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -2}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m=1$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad 6 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y - z = 0 \\ \boxed{z = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow 3y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}}$$

$$\text{Las soluciones del sistema son } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

CASO 4. $m=-2$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de

$$A/B. \text{ La matriz ampliada queda } A/B = \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x - z = -3 \\ -3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3 = z \\ -3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 6x + 3 = 5 \Rightarrow 6x - 2 = 3y \Rightarrow y = -\frac{2}{3} + 2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

Resumiendo: Si $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$$x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}, y = m + 1, z = 2 .$$

Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} , \\ z = 2 \end{cases}$

Si $m = 0$ el sistema es incompatible.

Si $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Como no tenemos las matrices A ni B solo podemos utilizar las propiedades de los determinantes para determinar el valor de $|C|$.

$$|C| = \left| 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1} \right| = 3^3 \left| (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1} \right| = 3^3 \left| (A^t)^2 \right| \cdot \left| (A \cdot B)^{-1} \right| =$$

$$= 27 \cdot |A^t|^2 \cdot \frac{1}{|A \cdot B|} = 27 \cdot |A|^2 \cdot \frac{1}{|A| \cdot |B|} = \frac{27 \cdot \cancel{|A|} \cdot |A|}{\cancel{|A|} \cdot |B|} = \frac{27|A|}{|B|} = \frac{27 \cdot \frac{1}{3}}{3} = \frac{9}{3} = \boxed{3}$$

He utilizado varias propiedades de los determinantes.

1. Si M es una matriz 3×3 entonces $\text{Det}(3M) = 3^3 \text{Det}(M)$.
2. Si M y N son dos matrices entonces $\text{Det}(M \cdot N) = \text{Det}(M) \cdot \text{Det}(N)$.
3. Si M es una matriz entonces $\text{Det}(M^t) = \text{Det}(M)$.
4. Si M es una matriz invertible entonces $\text{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(M)}$.

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x = 3 - z \end{cases} \Rightarrow 3 - z + y - 2z - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 7 + 3z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 7 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(3, 7, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ Q_s(4, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4 - \alpha \\ y = -1 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -\alpha \end{cases}$$

Debemos determinar la posición relativa de las dos rectas.

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(3, 7, 0) \\ Q_s(4, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (4, -1, 0) - (3, 7, 0) = (1, -8, 0)$$

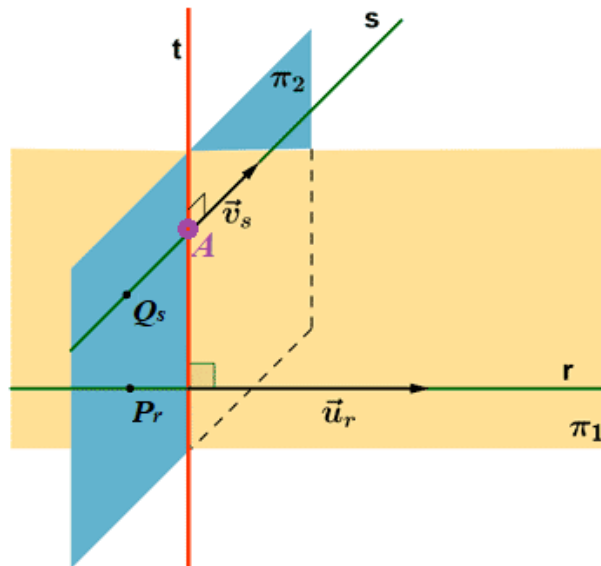
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, -8, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 8 - 1 - 0 + 8 = 12 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas no se cortan. Las rectas se cruzan.

Un vector director de la recta t perpendicular común a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 2j + 2k = (-4, -2, 2)$$

Tomamos como vector director de la recta t el vector $\vec{w}_t = \frac{-1}{2} \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \frac{-1}{2} (-4, -2, 2) = (2, 1, -1)$.



Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y que tiene como otro de sus vectores directores el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(3, 7, 0) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+y-7+6z+z-2y+14+3x-9=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 4x-y+7z-5=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π_1 y la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 4x-y+7z-5=0 \\ s: \begin{cases} x=4-\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4(4-\alpha)+1-\alpha-7\alpha-5=0 \Rightarrow 16-4\alpha+1-\alpha-7\alpha-5=0 \Rightarrow$$

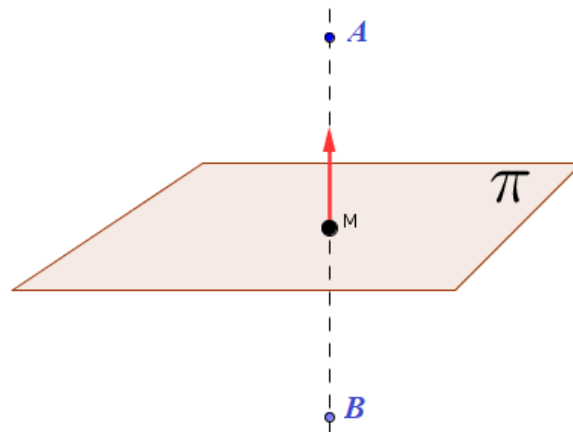
$$\Rightarrow -12\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} x=4-1=3 \\ y=-1+1=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3, 0, -1)}$$

La ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s es la ecuación de la recta que pasa por A con vector director $\vec{w}_t = (2, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, 0, -1) \in t \\ \vec{w}_t = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

La recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s tiene ecuación $t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2.5 puntos)



El plano que equidista de los puntos A y B contiene el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y tiene como vector normal el vector $\overline{AB}$ o un vector proporcional (en la misma dirección).

$$\left. \begin{matrix} A(3,3,5) \\ B(1,-1,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1,-1,1) - (3,3,5) = (-2,-4,-4)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{n} = \frac{-1}{2} \overline{AB} = \frac{-1}{2}(-2,-4,-4) = (1,2,2) \\ M = \frac{(1,-1,1) + (3,3,5)}{2} = (2,1,3) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi : x + 2y + 2z + D = 0 \\ M = (2,1,3) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow 10 + D = 0 \Rightarrow D = -10 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0}$$

La ecuación del plano que equidista de los puntos A y B es $\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Un plano π' paralelo a π tienen ecuación $\pi' : x + 2y + 2z + D = 0$.

Como el punto M pertenece al plano π determinamos el valor de D para que la distancia del punto M a otro plano π' paralelo a él valga 6 unidades.

$$\left. \begin{matrix} \pi' : x + 2y + 2z + D = 0 \\ M = (2,1,3) \\ d(M, \pi') = 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|10 + D|}{3} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |10 + D| = 18 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 10 + D = 18 \rightarrow D = 8 \rightarrow \boxed{\pi_1 : x + 2y + 2z + 8 = 0} \\ 10 + D = -18 \rightarrow D = -28 \rightarrow \boxed{\pi_2 : x + 2y + 2z - 28 = 0} \end{matrix} \right.$$

Los planos que equidistan 6 unidades del plano π son $\pi_1 : x + 2y + 2z + 8 = 0$ y

$\pi_2 : x + 2y + 2z - 28 = 0$.

C1) Sea $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$.

- a) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)
- b) Demuestra que existe un punto d en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

a) Vamos a utilizar el teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux):

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, para todo valor u comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.

La función $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$ es una función continua pues el exponente es producto de funciones continuas. La función es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $[0, 3]$.

Si consideramos el intervalo $[0, 3]$ tenemos que $f(0) = e^{0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right)} = e^0 = 1$ y

$$f(3) = e^{3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{3(-1)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx 0.0498.$$

Como $f(1) \approx 0.0498 < \frac{1}{2} < 1 = f(0)$ podemos aplicar el teorema de Darboux y afirmar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$.

b) Vamos a utilizar el teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Como $f(0) = 1$ y $f(2) = e^{2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{2 \cdot \sin(\pi)} = e^0 = 1$ se cumple que $f(0) = f(2)$ por lo que aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

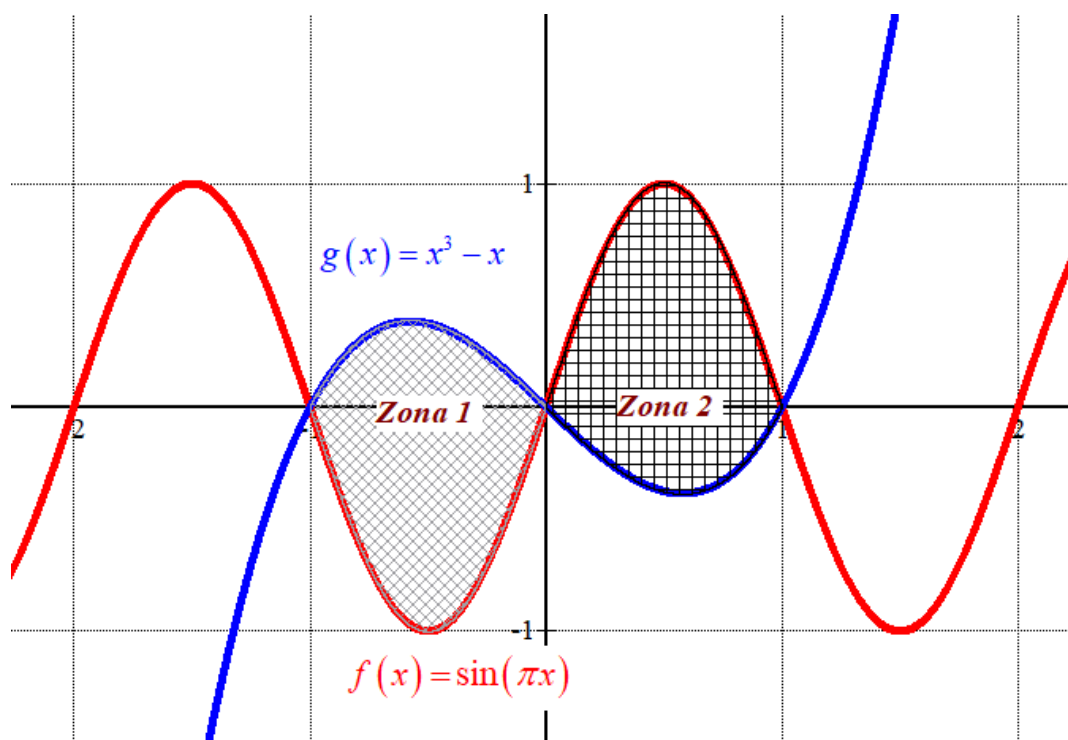
C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = x^3 - x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin(\pi x) \\ g(x) = x^3 - x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \sin(\pi \cdot 0) = 0 = 0^3 - 0 \\ x = 1 \rightarrow \sin(\pi) = 0 = 1^3 - 1 \\ x = -1 \rightarrow \sin(-\pi) = 0 = (-1)^3 - (-1) \end{cases}$$

Los tres puntos de corte son A(0, 0), B(-1, 0) y C(1, 0).

Dibujamos las funciones para establecer los límites de integración.



Hallamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-1}^0 x^3 - x - \sin(\pi x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi(-1)) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\cos(-\pi)}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Hallamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned}
 \text{Área } 2 &= \int_0^1 \sin(\pi x) - x^3 + x dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\
 &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi) - \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} \right] - \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) - \frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

El área encerrada entre ambas curvas es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$\text{Área} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \simeq 1.77 u^2$$