

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko EZOHIOA

MATEMATIKA IIPRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

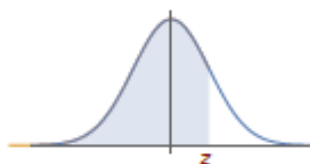
PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2025eko OHIKOA

ORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko EZOHIOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65 % respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe “Las cifras del cáncer en España 2024”, elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).

La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56 % menores de 45 años, de los cuales el 62,86 % son mujeres; 59,77 % mayores de 65 años, de los cuales el 39,11 % son mujeres; del resto, el 42,25 % son mujeres.

- (a) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.
- (b) **(0,75 puntos)** Calcula el número probable de mujeres que han tenido cáncer en 2024 que son mayores de 65 años.
- (c) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.
- (d) **(0,25 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3z = 3 + \alpha y \\ z + \alpha x + y - 2 = 0 \\ x + 2z - y = 1 \end{cases}$$

- (a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α .
- (b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha = 0$.

(2B) Sea α un número real y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.
- (b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha = 0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025} .

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

- (3A) **(2,5 puntos)** Halla el punto P' simétrico de $P(4, -3, 0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2, 0, 1)$ y $B(-2, -1, 0)$.



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko EZOHIOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

(3B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2, 3, 4)$, $B(3, -1, -2)$, $C(5, -1, 2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6, -5, -4)$, $E(7, 1, 4)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r , expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) **(1 punto)** En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π .

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(4A) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

(a) **(1 punto)** Encuentra las asíntotas de la función f .

(b) **(1 punto)** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

(c) **(0.5 puntos)** Calcula la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$.

(4B) Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de $216\pi \text{ cm}^3$. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.

(b) **(1 punto)** Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2 . Calcula el coste de imprimación de una taza.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int (2x + 5)e^{2x} dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+7}{x^2+10x+25} dx$.

(5B) Se consideran la parábola de ecuación $y = x^2 - 3x$ y la recta $x + y = 8$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto limitado por esas dos curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del trozo de ese recinto que queda en el primer cuadrante.

Soluciones

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65 % respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe “Las cifras del cáncer en España 2024”, elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).

La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56 % menores de 45 años, de los cuales el 62,86 % son mujeres; 59,77 % mayores de 65 años, de los cuales el 39,11 % son mujeres; del resto, el 42,25 % son mujeres.

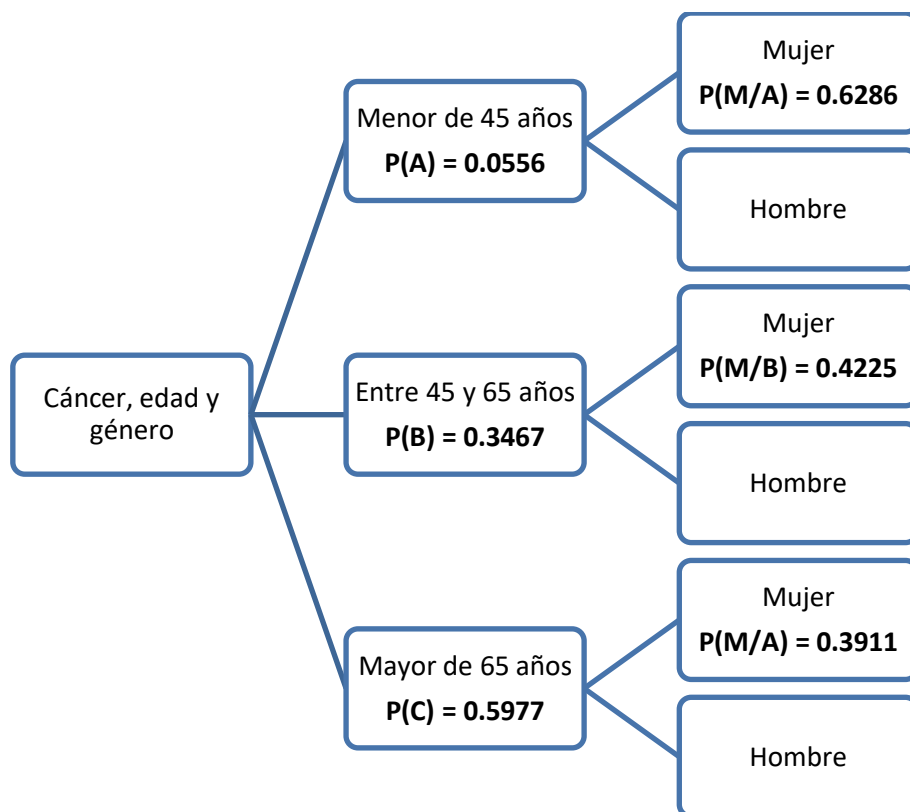
- (a) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.
- (b) **(0,75 puntos)** Calcula el número probable de mujeres que han tenido cáncer en 2024 que son mayores de 65 años.
- (c) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.
- (d) **(0,25 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

Llamamos A = “Ser menor de 45 años”, B = “Edad entre 45 y 65 años”, C = “Mayor de 65 años” y M = “Ser mujer”.

Realizamos un diagrama de árbol.

Nos dicen que $P(A) = 0.0556$, $P(C) = 0.5977$, $P(B) = 1 - 0.0556 - 0.5977 = 0.3467$,

$P(M/A) = 0.6286$, $P(M/B) = 0.4225$ y $P(M/C) = 0.3911$.



- (a) Debemos calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= 0.0556 \cdot 0.6286 + 0.3467 \cdot 0.4225 + 0.5977 \cdot 0.3911 \approx \boxed{0.4152}$$

(b) Calculamos $P(M \cap C)$.

$$P(M \cap C) = P(C)P(M/C) = 0.5977 \cdot 0.3911 = 0.23376047$$

El número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos. El Número esperado de mujeres mayores de 65 años será $0.23376047 \cdot 286.664 = 67010.71$ mujeres.

Aproximadamente serán 67011 las mujeres mayores de 65 años con cáncer en el año 2024.

(c) Calculamos la probabilidad de que elegida al azar una mujer que padece cáncer esta sea mayor de 65 años: $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0.2338}{0.4152} \approx \boxed{0.5631}$$

La probabilidad de que al elegir una mujer con cáncer esta tenga 65 años o menos vale $1 - 0.5631 = 0.4369$.

(d) En el apartado (a) hemos visto que la probabilidad de que una persona enferma de cáncer sea mujer tiene un valor de 0.4152, menor que 0.5, por lo que la probabilidad de que un hombre padezca cáncer es $1 - 0.4152 = 0.5848$.

Como $0.4152 < 0.5848$ podemos afirmar que es más probable que un hombre padezca cáncer.

(2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3z = 3 + \alpha y \\ z + \alpha x + y - 2 = 0 \\ x + 2z - y = 1 \end{cases}$$

(a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α .

(b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha = 0$.

(a) Ponemos orden en el sistema de ecuaciones planteado.

$$\begin{cases} x + 3z = 3 + \alpha y \\ z + \alpha x + y - 2 = 0 \\ x + 2z - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha y + 3z = 3 \\ \alpha x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \alpha - 3\alpha - 3 + 2\alpha^2 + 1 = 2\alpha^2 - 4\alpha$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 4\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha(\alpha - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad 0 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \overbrace{1 \ 0 \ 3 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A & & & \end{array} \right\}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\alpha = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -6 & -6 \\ \hline 0 & 5 & -5 & -4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a & & & \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 5 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -6 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \overbrace{1 \ -2 \ 3 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ -6}_A & & & \end{array} \right\}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha = 2$ el sistema es incompatible.

- (b) Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2), tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \overbrace{1 \ 0 \ 3 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A & & & \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3z = 3 \\ y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 3z \\ y = 2 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2B) Sea α un número real y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.

(b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha = 0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025} .

(a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Cuando $\alpha \neq 1$ el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

(b) Si $\alpha = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

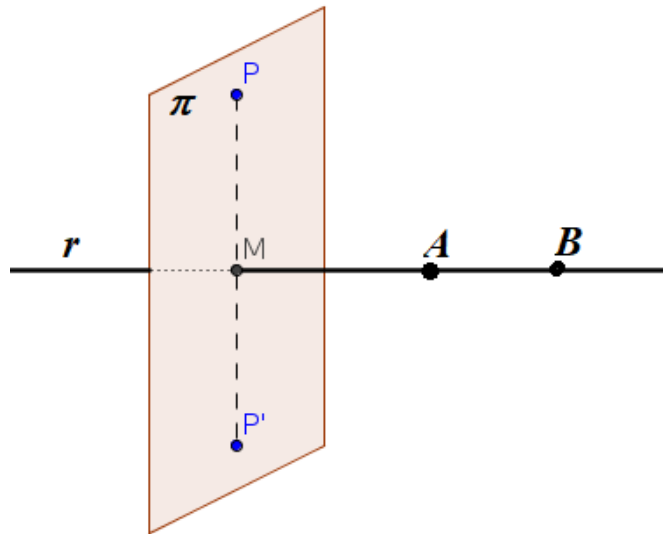
Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+1 \\ 0 & 1 & 1+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+2 \\ 0 & 1 & 1+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que $A^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2025 \\ 0 & 1 & 2025 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3A) (2,5 puntos) Halla el punto P' simétrico de $P(4, -3, 0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2, 0, 1)$ y $B(-2, -1, 0)$.



Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A(-2, 0, 1) \\ B(-2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, -1, 0) - (-2, 0, 1) = (0, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{BA} = (0, 1, 1) \\ A(-2, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Al ser el plano perpendicular a la recta el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ P(4, -3, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: y + z + D = 0 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow -3 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow \boxed{\pi: y + z + 3 = 0} \end{array} \right.$$

Hallamos el punto M de intersección del plano $\pi: y + z + 3 = 0$ y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ \pi: y + z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 1 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(-2, -2, -1)}$$

Obtenemos el punto P' sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\left. \begin{array}{l} M(-2, -2, -1) \\ P(4, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-2, -2, -1) - (4, -3, 0) = (-6, 1, -1)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (-2, -2, -1) + (-6, 1, -1) = (-8, -1, -2)$$

El punto P' simétrico de $P(4, -3, 0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2, 0, 1)$ y $B(-2, -1, 0)$ tiene coordenadas $P'(-8, -1, -2)$.

(3B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2,3,4)$, $B(3,-1,-2)$, $C(5,-1,2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6,-5,-4)$, $E(7,1,4)$.

(a) (1,5 puntos) Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r , expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) (1 punto) En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π .

(a) Hallamos la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(2,3,4) \in \pi \\ B(3,-1,-2) \in \pi \\ C(5,-1,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3,-1,-2) - (2,3,4) = (1,-4,-6) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (5,-1,2) - (2,3,4) = (3,-4,-2) \\ C(5,-1,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-2 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 40 - 18y - 18 - 4z + 8 + 12z - 24 + 2y + 2 - 24x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16x - 16y + 8z + 48 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 2y - z - 6 = 0}$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos D y E.

$$\left. \begin{array}{l} D(6,-5,-4) \in r \\ E(7,1,4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{DE} = (7,1,4) - (6,-5,-4) = (1,6,8) \\ E(7,1,4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 7 + \alpha \\ y = 1 + 6\alpha \\ z = 4 + 8\alpha \end{cases}$$

Determinamos el ángulo que forman el vector normal del plano con el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 2y - z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 6, 8) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} =$$

$$= \frac{(2, 2, -1)(1, 6, 8)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{2 + 12 - 8}{\sqrt{9} \sqrt{101}} = \frac{6}{3\sqrt{101}} = \frac{2}{\sqrt{101}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{101}}\right) = \boxed{78^\circ 31' 16''}$$

El ángulo que forma la recta con el plano es de $90^\circ - 78^\circ 31' 16'' = 11^\circ 28' 44''$.

- (b) La recta y el plano forman un ángulo aproximado de 11° , por lo que no pueden ser paralelos. La recta debe cortar al plano en un punto Q. Determinamos las coordenadas de este punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r : \begin{cases} x = 7 + \alpha \\ y = 1 + 6\alpha \\ z = 4 + 8\alpha \end{cases} \Rightarrow 2(7 + \alpha) + 2(1 + 6\alpha) - 4 - 8\alpha - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : 2x + 2y - z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 14 + 2\alpha + 2 + 12\alpha - 4 - 8\alpha - 6 = 0 \Rightarrow 6 + 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 1 = 6 \\ y = 1 - 6 = -5 \\ z = 4 - 8 = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(6, -5, -4)}$$

El punto Q donde la recta corta al plano tiene coordenadas $Q(6, -5, -4)$.

(4A) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

- (a) **(1 punto)** Encuentra las asíntotas de la función f .
 (b) **(1 punto)** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .
 (c) **(0.5 puntos)** Calcula la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$.

- (a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = \boxed{4=x} \\ \frac{3-5}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 4\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-1}{(-1)^2 - 3(-1) - 4} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿ $x = 4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{4}{4^2 - 3 \cdot 4 - 4} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = 4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

- (b) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 3x - 4) - (2x - 3)x}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{x^2 - 3x - 4 - 2x^2 + 3x}{(x^2 - 3x - 4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

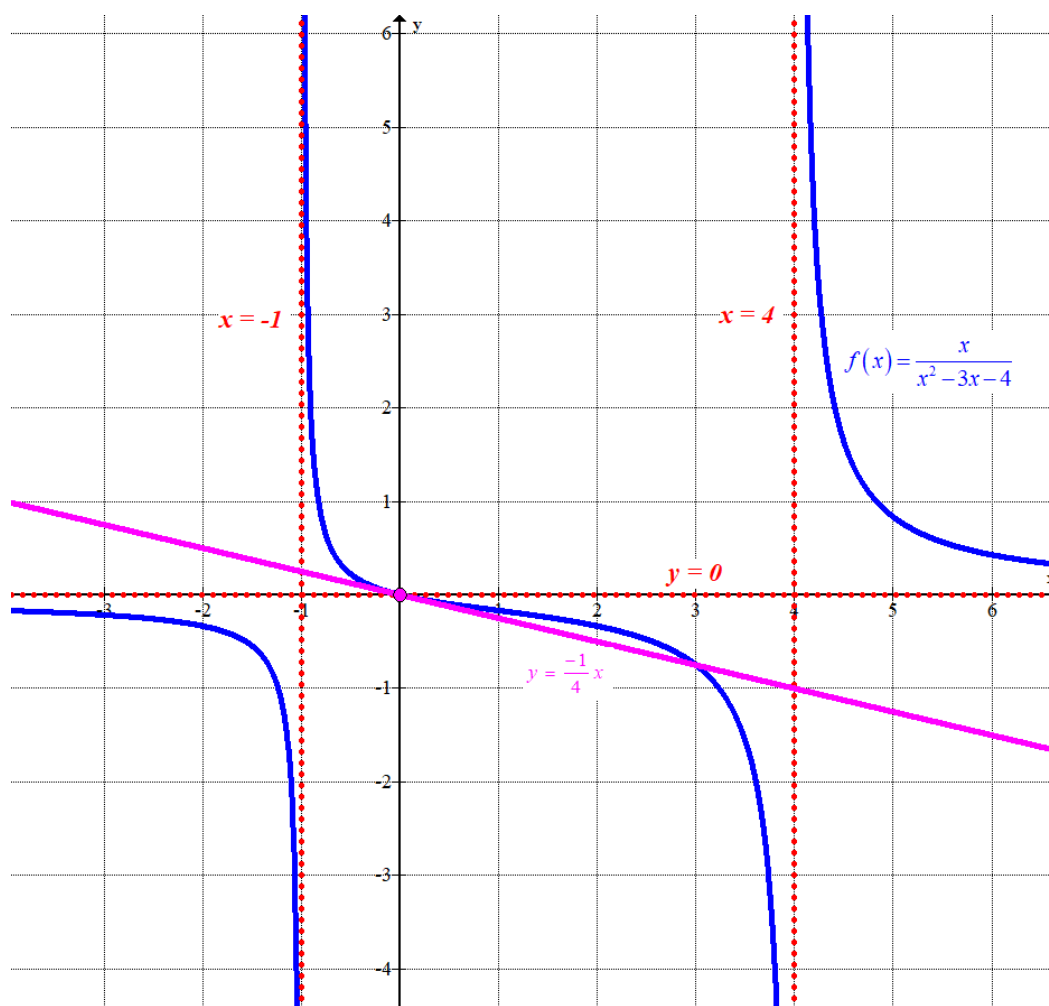
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-(x^2 + 4)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-4} = \text{No existe}$$

La derivada nunca se anula. Como $f'(x) = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-3x-4)^2}$ vemos que el denominador siempre es positivo y el numerador siempre negativo, por lo que la derivada siempre es negativa y la función decrece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{-1, 4\}$.

- c) La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{0}{0^2 - 3 \cdot 0 - 4} = 0 \\ f'(0) = \frac{-(0^2 + 4)}{(0^2 - 3 \cdot 0 - 4)^2} = -\frac{1}{4} \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x}$$

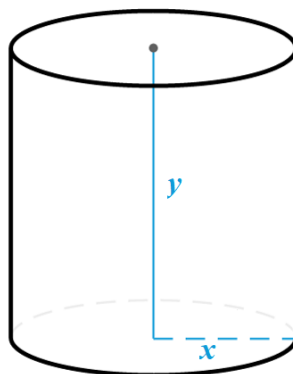
La recta tangente tiene ecuación $y = -\frac{1}{4}x$.



(4B) Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de $216\pi \text{ cm}^3$. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.

- (a) **(1,5 puntos)** Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.
 (b) **(1 punto)** Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2 . Calcula el coste de imprimación de una taza.

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Sabemos que el volumen es de $216\pi \text{ cm}^3 \rightarrow \pi x^2 \cdot y = 216\pi \rightarrow x^2 \cdot y = 216 \Rightarrow y = \frac{216}{x^2}$.

Determinamos la expresión de la superficie de la taza. Tiene una base (πx^2) y una superficie lateral que es un rectángulo de base $2\pi x$ y altura y .

$$\left. \begin{array}{l} S(x, y) = \pi x^2 + 2\pi xy \\ y = \frac{216}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \frac{216}{x^2} = \pi x^2 + \frac{432\pi}{x}$$

Buscamos los puntos críticos de la función superficie.

$$S(x) = \pi x^2 + \frac{432\pi}{x} \Rightarrow S'(x) = 2\pi x - \frac{432\pi}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi x - \frac{432\pi}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\pi x = \frac{432\pi}{x^2} \Rightarrow 2\pi x^3 = 432\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{432\pi}{2\pi} = 216 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{216} = 6}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{432\pi}{x^2} = 2\pi x - 432\pi x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 2\pi - (-2)432\pi x^{-3} = 2\pi + \frac{864\pi}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(6) = 2\pi + \frac{864\pi}{6^3} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función superficie tiene un mínimo para $x = 6$.

Para este valor $y = \frac{216}{6^2} = 6$.

Las dimensiones de la taza con superficie mínima son 6 cm de radio y 6 cm de altura.

(b) La superficie de la taza con 6 cm de radio y 6 cm de altura vale

$$S(6) = \pi \cdot 6^2 + \frac{432\pi}{6} = 108\pi \text{ cm}^2.$$

Para obtener el coste multiplicamos por $3 \text{ €/m}^2 = \frac{3}{10000} \text{ €/cm}^2$ obteniendo

$$\frac{3}{10000} 108\pi = 0.10178 \text{ € por taza. La imprimación de cada taza cuesta 10.2 céntimos.}$$

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int (2x+5)e^{2x} dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+7}{x^2+10x+25} dx$.

(a) Resolvemos la integral utilizando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int (2x+5)e^{2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+5 \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= (2x+5)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} 2dx = \frac{(2x+5)e^{2x}}{2} - \int e^{2x} dx = \frac{(2x+5)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} = \\ &= \frac{(2x+5-1)e^{2x}}{2} = \frac{(2x+4)e^{2x}}{2} = \boxed{(x+2)e^{2x} + K} \end{aligned}$$

(b) Resolvemos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+7}{x^2+10x+25} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} x^2+10x+25=0 &\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \\ \frac{x+7}{x^2+10x+25} &= \frac{x+7}{(x+5)^2} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{(x+5)^2} = \frac{A(x+5)+B}{(x+5)^2} \\ x+7 &= A(x+5)+B \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \rightarrow 2=B \\ x=0 \rightarrow 7=5A+B \rightarrow 7=5A+2 \rightarrow A=1 \end{cases} \\ \frac{x+7}{x^2+10x+25} &= \frac{1}{x+5} + \frac{2}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int \frac{1}{x+5} dx + \int \frac{2}{(x+5)^2} dx = \int \frac{1}{x+5} dx + 2 \int (x+5)^{-2} dx = \\ &= \ln|x+5| + 2 \frac{(x+5)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln|x+5| - \frac{2}{x+5} + C} \end{aligned}$$

(5B) Se consideran la parábola de ecuación $y = x^2 - 3x$ y la recta $x + y = 8$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto limitado por esas dos curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del trozo de ese recinto que queda en el primer cuadrante.

(a) Determinamos los puntos de corte entre la parábola y la recta.

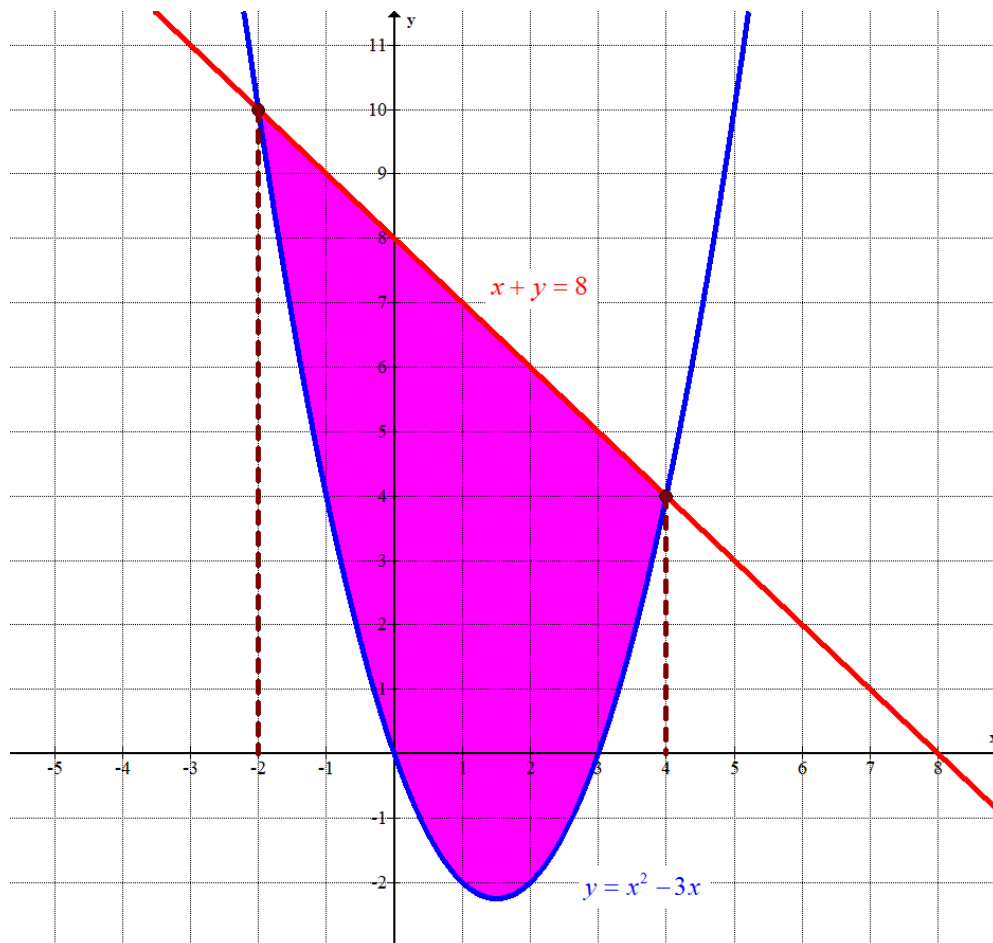
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ y = 8 - x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 3x = 8 - x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 = x \\ \frac{2-6}{2} = -2 = x \end{cases}$$

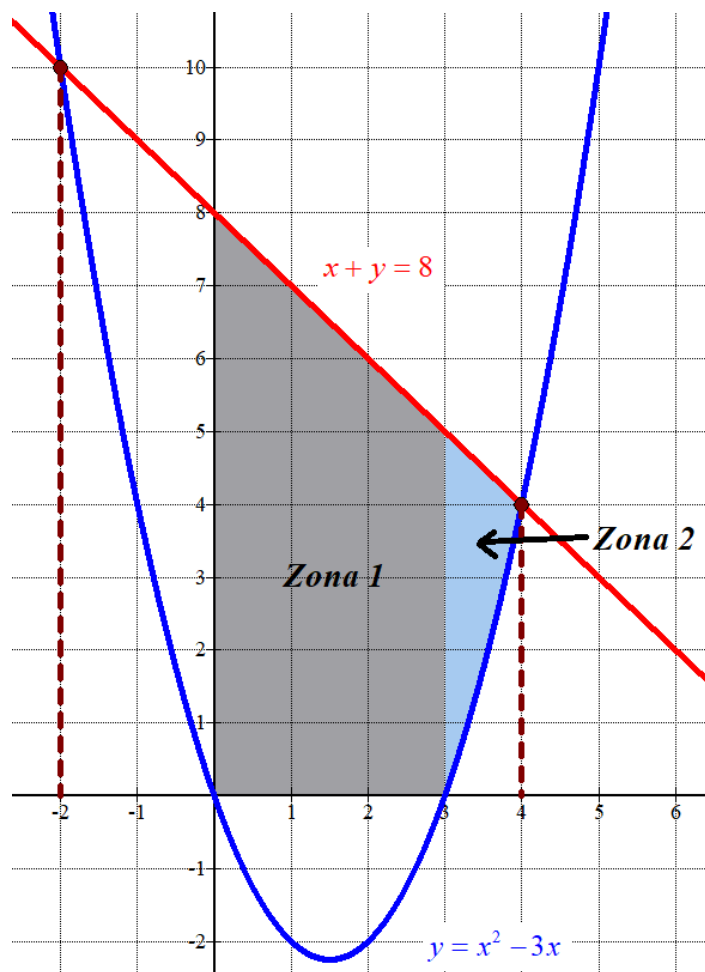
Hacemos unas tablas de valores y dibujamos las gráficas y el recinto delimitado por ellas.

x	$y = x^2 - 3x$
-2	10
0	0
1	-2
3	0
4	4

x	$y = 8 - x$
-2	10
0	8
1	7
4	4



(b) Debemos hallar el área del dibujo. La dividimos en dos partes. El área de cada zona la calculamos de forma distinta.



Podemos ver que la zona 1 está compuesta de 18 cuadraditos enteros (1 unidad cuadrada cada uno) y 3 medio cuadraditos, por lo que su área vale $18 + 1.5 = 19.5$ unidades cuadradas.

Lo confirmamos usando el cálculo integral.

$$\text{Área Zona 1} = \int_0^3 8 - x dx = \left[8x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left[8 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right] - \left[8 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right] = 24 - \frac{9}{2} = \boxed{19.5 u^2}$$

$$\text{Área Zona 2} = \int_3^4 8 - x - (x^2 - 3x) dx = \int_3^4 8 - x - x^2 + 3x dx = \int_3^4 8 - x^2 + 2x dx =$$

$$= \left[8x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_3^4 = \left[8 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} + 4^2 \right] - \left[8 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} + 3^2 \right] = 32 - \frac{64}{3} + 16 - 24 + 9 - 9 = \boxed{\frac{8}{3} u^2}$$

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: $19.5 + \frac{8}{3} = \frac{133}{6} \approx 22.1667$ unidades cuadradas.