

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

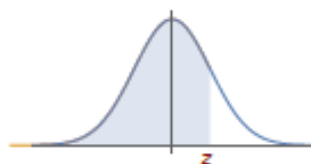
PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2025eko OHIKOA

ORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en “Anales Españoles de Pediatría” respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

- (a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.
- (b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.
- (c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2 \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.
- (b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.
- (c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b .

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2 .

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4, 4, 1)$ y $B(1, 0, -1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2, 7, -1)$ y $D(2, 3, -1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s .

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2025

MATEMÁTICAS II

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

(4B) En la empresa “MARKOAK” fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de $0,3\text{m}^2$. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m . La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x \cos(2x + 5) dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x + 495}{x^2 - 2025} dx$.

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 1)^2$ e $y = 7 - 3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Soluciones

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en “Anales Españoles de Pediatría” respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

- (a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.
- (b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.
- (c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

Sea X = El peso de los recién nacidos en gramos. $X = N(3372, 405)$.

- (a) Debemos calcular $P(X > 3000)$.

$$P(X > 3000) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{3000 - 3372}{405}\right) = P(Z > -0.92) =$$

$$= P(Z \leq 0.92) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8212}$$

	0'00	0'01	0'02
0'0	0'5000	0'5040	0'5080
0'1	0'5398	0'5438	0'5478
0'2	0'5793	0'5832	0'5871
0'3	0'6179	0'6217	0'6255
0'4	0'6554	0'6591	0'6628
0'5	0'6915	0'6950	0'6985
0'6	0'7257	0'7291	0'7324
0'7	0'7580	0'7611	0'7642
0'8	0'7881	0'7910	0'7939
0'9	0'8158	0'8186	0'8212

- (b) Calculamos la probabilidad de que un recién nacido tenga un peso entre 3 kg y 3.5 kg:
 $P(3000 \leq X \leq 3500)$.

$$P(3000 \leq X \leq 3500) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{3000 - 3372}{405} \leq Z \leq \frac{3500 - 3372}{405}\right) =$$

$$= P(-0.92 \leq Z \leq 0.32) = P(Z \leq 0.32) - P(Z \leq -0.92) =$$

$$= P(Z \leq 0.32) - P(Z \geq 0.92) = P(Z \leq 0.32) - [1 - P(Z \leq 0.92)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6255 - 1 + 0.8212 = \boxed{0.4467}$$

	0'00	0'01	0'02	
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0

La probabilidad de que un recién nacido pese entre 3 kg y 3.5 kg es de 0.4467.

Como hubieron 9476 recién nacidos en 2024, el número esperado de recién nacidos con un peso entre 3 kg y 3.5 kg es $9476 \cdot 0.4467 = 4232.9$. Se espera unos 4233 recién nacidos con peso entre 3 y 3.5 kg.

- (c) Entre 3,1kg y 3,3kg es un rango menor que el contemplado en el apartado (b) donde hemos determinado que se esperan 4233 recién nacidos con peso entre 3 y 3.5 kg. Es absurdo afirmar que habrán entre 4500 y 4700 recién nacidos con peso entre 3,1kg y 3,3kg. Deberán haber menos de 4233 recién nacidos con peso entre 3.1 y 3.3 kg.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2 \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.
- (b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.
- (c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

(a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 4 + 2\alpha - \alpha^2 = -3\alpha^2 + 6\alpha - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3\alpha^2 + 6\alpha - 3 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 1 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

(b) El sistema siempre tiene solución (compatible determinado o compatible indeterminado).

(c) Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2), tiene infinitas soluciones.

Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado (b) CASO 2.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2y + y = 1 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si tomamos } \lambda = 0 \text{ la solución es } \begin{cases} x = 1 + 0 = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si tomamos } \lambda = 1 \text{ la solución es } \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b .

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a=1$ y $b=2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a-b = 0 \Rightarrow \boxed{a=b}$$

Cuando $a=b$ el determinante de A es nulo y la matriz A no tiene inversa.

Cuando $a \neq b$ el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

(b) Si $a=1$ y $b=2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1+2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene inversa.

La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}A^3 + A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2 + A^{-1}$$

Terminamos de calcular la matriz X .

$$X = A^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8 & 6+6 \\ 12+12 & 8+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2 .

Buscamos el punto P de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2 .

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow 3t - 3(1 - 2t) - 2(2 + t) + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 3t - 3 + 6t - 4 - 2t + 7 = 0 \Rightarrow 7t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \cdot 0 = 0 \\ y = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \\ z = 2 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0, 1, 2)}$$

Hallamos la ecuación del plano π' que contiene a r_1 y pasa por el punto $P(0, 1, 2)$. Este plano tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta, y otro vector director es el que une un punto cualquiera de la recta con el punto P.

Hallamos un punto y un vector director de la recta r_1 .

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 1 - 2x + 3y \end{cases} \Rightarrow x + y - 2(1 - 2x + 3y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - 2 + 4x - 6y = 0 \Rightarrow 5x - 5y - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 + 5y \Rightarrow x = \frac{2}{5} + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 - 2\left(\frac{2}{5} + y\right) + 3y = 1 - \frac{4}{5} - 2y + 3y = \frac{1}{5} + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{5} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{5} + \lambda \end{cases} : \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1, 1, 1) \\ Q_1\left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π' que pasa por el punto P y que tiene como vectores directores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ_1}$.

$$\overrightarrow{PQ_1} = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right) - (0, 1, 2) = \left(\frac{2}{5}, -1, \frac{-9}{5}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{v} = 5\overrightarrow{PQ_1} = 5\left(\frac{2}{5}, -1, \frac{-9}{5}\right) = (2, -5, -9) \\ P(0, 1, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 2 & -5 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x - 9y + 9 + 2z - 4 + 5z - 10 - 2y + 2 + 9x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x - 11y + 7z - 3 = 0}$$

El plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2 tiene ecuación $\pi': 4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4, 4, 1)$ y $B(1, 0, -1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2, 7, -1)$ y $D(2, 3, -1)$.

- (a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s .
 (b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

(a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta, también sus ecuaciones paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} A(-4, 4, 1) \in r \\ B(1, 0, -1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1) - (-4, 4, 1) = (5, -4, -2) \\ B(1, 0, -1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 5\alpha \\ y = -4\alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} C(-2, 7, -1) \in s \\ D(2, 3, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CD} = (2, 3, -1) - (-2, 7, -1) = (4, -4, 0) \\ D(2, 3, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \frac{1}{4} \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4} (4, -4, 0) = (1, -1, 0) \\ D(2, 3, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (5, -4, -2) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{1} \neq \frac{-4}{-1} \neq \frac{-2}{0}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{BD}]$. Si es nulo se cortan y si es distinto de cero se cruzan.

$$\overrightarrow{BD} = (2, 3, -1) - (1, 0, -1) = (1, 3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BD} = (1, 3, 0) \\ \vec{v}_r = (5, -4, -2) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{BD}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 0 - 0 - 0 - 2 = -8 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan.

(b) Hallamos la distancia entre dos rectas que se cruzan con la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área base}} = \frac{|\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{BD}|}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$$

Calculamos el producto vectorial y utilizamos la fórmula.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (5, -4, -2) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2j - 5k + 4k - 2i = -2i - 2j - k = (-2, -2, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{\left| [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{BD}] \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{u}_s \right|} = \frac{|-8|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3} \text{ unidades}$$

La distancia entre las rectas r y s es de $\frac{8}{3} \approx 2.6667$ unidades.

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

(a) Para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales la derivada para estos valores debe valer 0.

$$f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = 4 \cdot 0^3 + 3A \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + B \\ 0 = 4 \cdot 1^3 + 3A \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + B \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{0 = B} \\ 0 = 4 + 3A + 2 + B \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3A + 6 \Rightarrow 3A = -6 \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

Los valores buscados son $B = 0$ y $A = -2$.

(b) Con $B = 0$ y $A = -2$ la función queda $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3+1}{4} = \boxed{1 = x} \\ \frac{3-1}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = x} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La función presenta tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 6(-1)^2 + 2(-1) = -4 - 6 - 2 = -12 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale

$$f'(0.25) = 4 \cdot 0.25^3 - 6 \cdot 0.25^2 + 2 \cdot 0.25 = 0.1875 > 0. \text{ La función crece en } \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

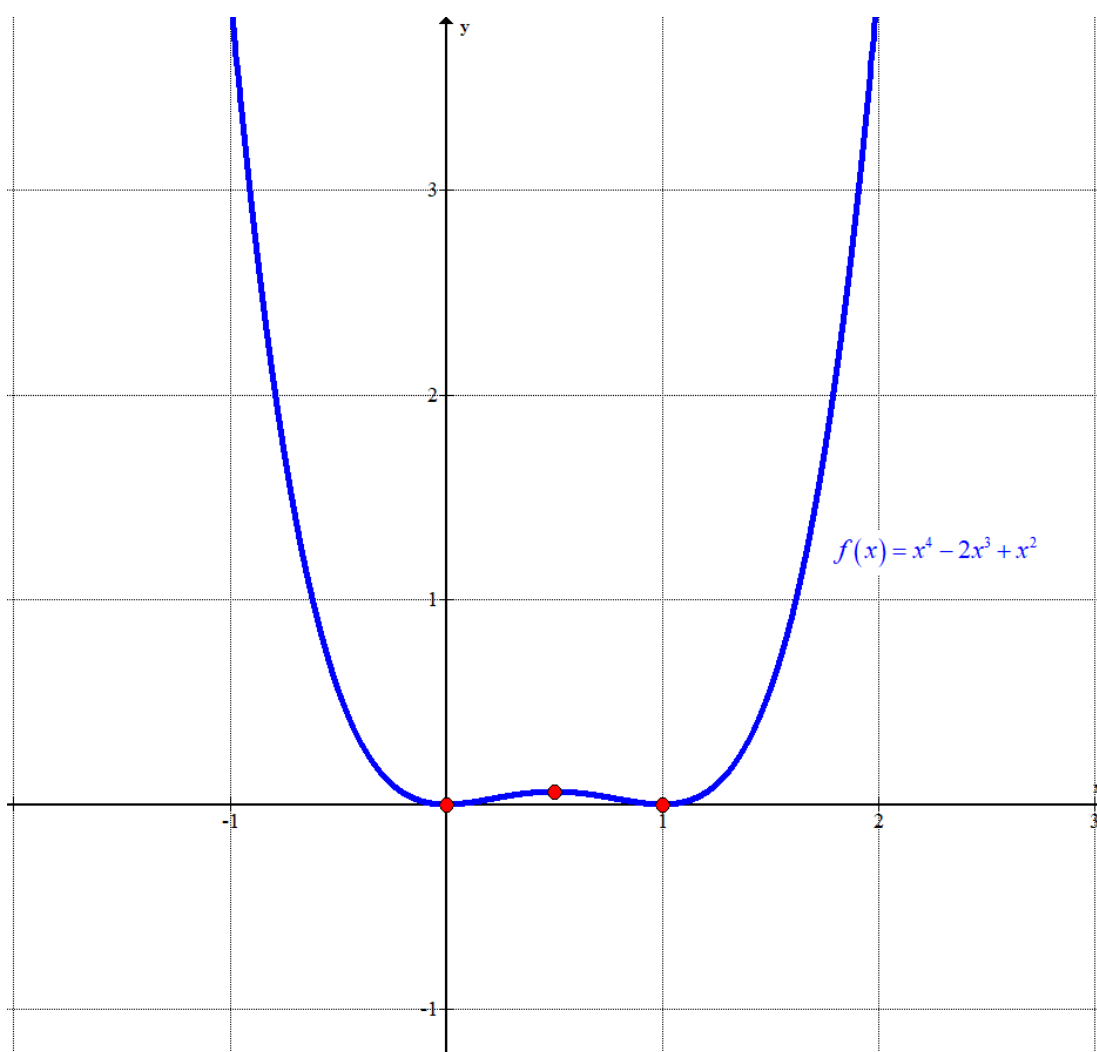
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 0.75$ y la derivada vale

$$f'(0.75) = 4 \cdot 0.75^3 - 6 \cdot 0.75^2 + 2 \cdot 0.75 = -0.1875 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 32 - 24 + 4 = 12 > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y crece en $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

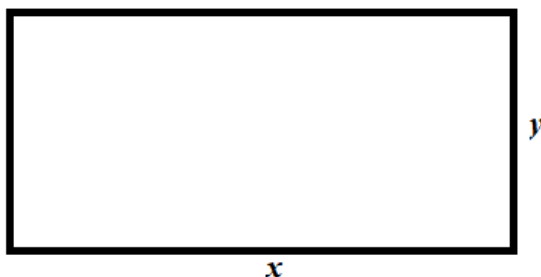


(4B) En la empresa “MARKOAK” fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de $0,3\text{m}^2$. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m . La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Sabemos que la superficie es de $0.3\text{ m}^2 \rightarrow xy = 0.3 \rightarrow y = \frac{0.3}{x}$.

Determinamos la expresión del coste del material del marco.

$$\left. \begin{array}{l} C(x, y) = 12 \cdot 2x + 10 \cdot 2y \\ y = \frac{0.3}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 24x + 20 \frac{0.3}{x} = 24x + \frac{6}{x}$$

Buscamos los puntos críticos de la función coste.

$$C(x) = 24x + \frac{6}{x} \Rightarrow C'(x) = 24 - \frac{6}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow 24 = \frac{6}{x^2} \Rightarrow 24x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$C'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 24 - 6x^{-2} \Rightarrow C''(x) = 12x^{-3} = \frac{12}{x^3} \Rightarrow C''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 96 > 0$$

La función coste tiene un valor mínimo para $x = \frac{1}{2}$. Para este valor $y = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$.

El coste es mínimo para marcos con la base de 0.5 metros y de altura 0.6 metros.

(b) Para $x = \frac{1}{2}$ el coste es de $C(0.5) = 24 \cdot 0.5 + \frac{6}{0.5} = 12 + 12 = 24\text{€}$. El coste mínimo de cada cuadro es de 24 €. El coste de los 274 cuadros es de $24 \cdot 274 = 6576\text{€}$.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x \cos(2x+5) dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+495}{x^2-2025} dx$.

(a) Resolvemos la integral utilizando el método de integración por partes.

$$\int 2x \cos(2x+5) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x \rightarrow du = 2dx \\ dv = \cos(2x+5) dx \rightarrow v = \int \cos(2x+5) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x+5) \end{array} \right\} =$$

$$= 2x \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x+5) - \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x+5) 2dx = x \operatorname{sen}(2x+5) - \int \operatorname{sen}(2x+5) dx =$$

$$= x \operatorname{sen}(2x+5) - \frac{-1}{2} \cos(2x+5) = \boxed{x \operatorname{sen}(2x+5) + \frac{1}{2} \cos(2x+5) + K}$$

(b) Resolvemos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+495}{x^2-2025} dx = \dots$$

$$x^2 - 2025 = 0 \Rightarrow x^2 = 2025 \Rightarrow x = \sqrt{2025} = \pm 45 \Rightarrow x^2 - 2025 = (x+45)(x-45)$$

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{x+495}{(x-45)(x+45)} = \frac{A}{x-45} + \frac{B}{x+45} = \frac{A(x+45) + B(x-45)}{(x-45)(x+45)}$$

$$x+495 = A(x+45) + B(x-45) \Rightarrow \begin{cases} x=45 \rightarrow 540 = 90A \rightarrow A = \frac{540}{90} = 6 \\ x=-45 \rightarrow 450 = -90B \rightarrow B = \frac{-450}{90} = -5 \end{cases}$$

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{6}{x-45} - \frac{5}{x+45}$$

$$\dots = \int \frac{6}{x-45} dx - \int \frac{5}{x+45} dx = \boxed{6 \ln|x-45| - 5 \ln|x+45| + C}$$

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ e $y = 7-3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

(a) Tenemos que dibujar dos parábolas y una recta. Determinamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-1)^2 \\ y = (x+1)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = x+1 \Rightarrow -1 = 1 \\ x-1 = -x-1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = (x+1)^2 \\ y = 7-3x \end{array} \right\} \Rightarrow (x+1)^2 = 7-3x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 7-3x \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-5+7}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-5-7}{2} = \boxed{-6=x} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-1)^2 \\ y = 7-3x \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)^2 = 7-3x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 7-3x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$$

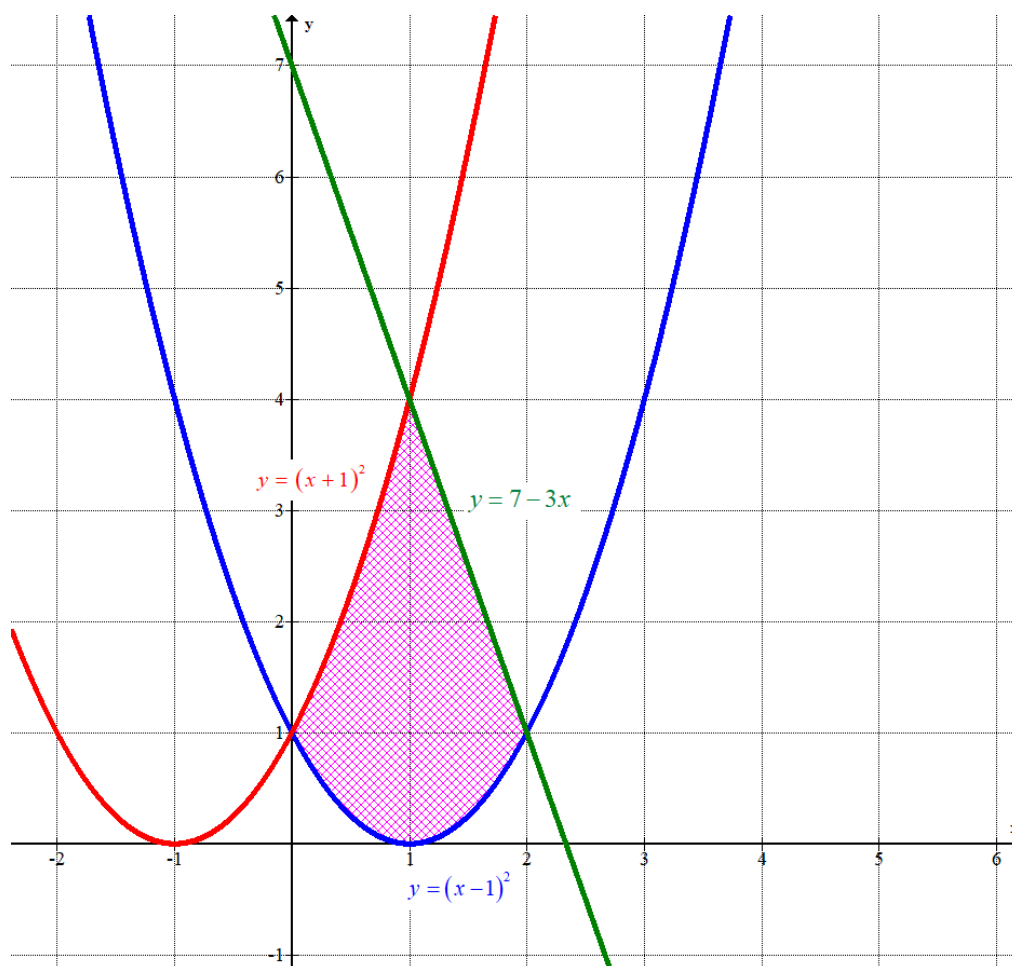
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

Hacemos unas tablas de valores y dibujamos las gráficas y el recinto del primer cuadrante limitado por ellas.

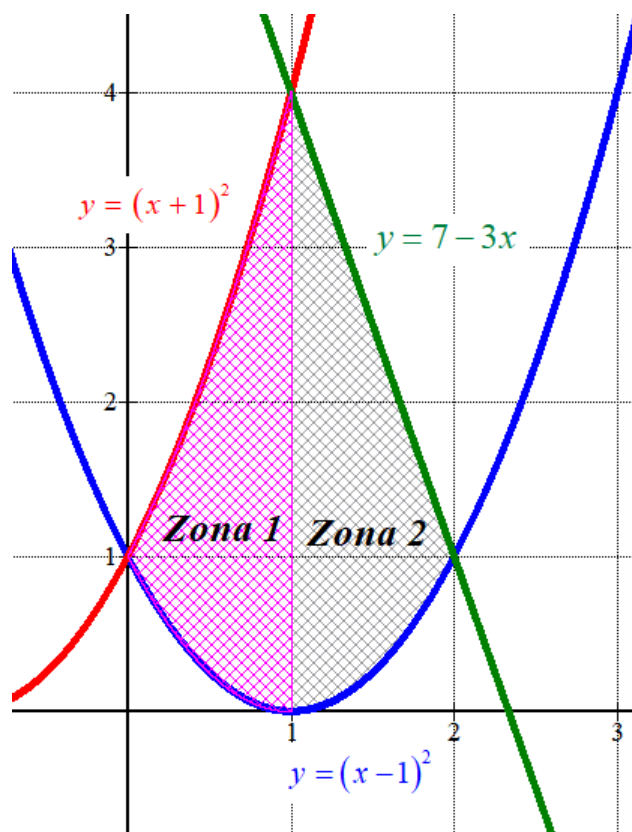
x	$y = (x-1)^2$
-3	16
0	1
2	1
3	4

x	$y = (x+1)^2$
-6	25
0	1
1	4
2	9

x	$y = 7-3x$
-6	25
-3	16
1	4
2	1



(b) Dividimos el recinto en dos zonas, calculamos el área de cada zona y el área total será la suma de ambas.



$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^1 (x+1)^2 - (x-1)^2 dx + \int_1^2 7-3x - (x-1)^2 dx = \\
&= \int_0^1 x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) dx + \int_1^2 7-3x - (x^2 - 2x + 1) dx = \\
&= \int_0^1 x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 dx + \int_1^2 7-3x - x^2 + 2x - 1 dx = \\
&= \int_0^1 4x dx + \int_1^2 -x^2 - x + 6 dx = \left[2x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_1^2 = \\
&= 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0^2 + \left[-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1 \right] = \\
&= 2 - \frac{8}{3} - 2 + 12 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6 = 6 - \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{25}{6} \simeq 4.1667 \text{ u}^2}
\end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{25}{6} \simeq 4.1667$ unidades cuadradas.