



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JULIOL 2025	CONVOCATORIA: JULIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las 3/5 partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?
- 1.2 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?
- 1.3 (1 punto)** Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

- 2.2.1 (1.25 puntos)** Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .
- 2.2.2 (1.25 puntos)** Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dados los planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2 : x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

3.2 Dado el plano $\pi : 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8869	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4662	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las 3/5 partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?

1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

1.1 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de Like que recibe Juana en sus 4 publicaciones. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 3/5 = 0.6$.

$X = B(4, 0.6)$. Este valor de p no aparece en la tabla de la binomial. Consideramos una nueva variable aleatoria $Y = \text{Número de publicaciones sin Like de un grupo de 4}$. Los parámetros de esta binomial son $n = 4$ y $p = 2/5 = 0.4$.

Nos piden calcular $P(X = 0) = P(Y = 4)$. Miramos en la tabla adjunta y tenemos:

$$P(X = 0) = P(Y = 4) = P(X \leq 4) - P(Y \leq 3) = 1 - 0.9744 = \boxed{0.0256}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,1600
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,4800
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,0296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,2752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,7444
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

1.2 Nos piden calcular $P(X \leq 2) = P(Y \geq 2)$.

$$P(X \leq 2) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0.4752 = \boxed{0.5248}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,1600
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,4800
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,0296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,2752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,7444
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744

1.3 Desea que $P(X \geq 1) > 0.999 \rightarrow P(Y \leq n-1) \geq 0.999$. Si buscamos en la tabla este valor.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000 NO
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400 NO
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360 NO
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898 NO
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959 NO
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984 NO
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9946
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Se cumple a partir de $n = 8$. El menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo es de 8.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.1.1 Resolvemos la ecuación matricial $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$. Multiplicamos por $A^{-1}X$ a ambos lados de la igualdad.

$$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1} \Rightarrow (A^{-1}X)(A^{-1}X)^{-1} = (A^{-1}X)A(B^2A)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = A^{-1}XA(B^2A)^{-1} \Rightarrow I(B^2A) = A^{-1}XA(B^2A)^{-1}(B^2A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^2A = A^{-1}XA \Rightarrow B^2AA^{-1} = A^{-1}XAA^{-1} \Rightarrow B^2 = A^{-1}X \Rightarrow AB^2 = AA^{-1}X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = AB^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Aplicamos las propiedades de los determinantes para calcular el determinante pedido.

$$\left| (3A^5B)^2 \right| = |3A^5B|^2 = \left\{ \begin{array}{l} A^5B \text{ es una matriz } 2 \times 2 \\ |3A^5B| = 3^2 |A^5B| \end{array} \right\} = (3^2 |A^5B|)^2 = (9 |A|^5 |B|)^2 = \dots$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1, |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\dots = (9 \cdot 1^5 \cdot (-1))^2 = \boxed{81}$$

2.1.3 Calculamos las primeras potencias de la matriz B en busca de una regularidad.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B^{100} = B^{2 \cdot 50} = (B^2)^{50} = I^{50} = I$$

$$B^{99} = B^{98}B = (B^2)^{49}B = I \cdot B = B$$

Utilizamos el resultado obtenido en la igualdad planteada.

$$\begin{aligned}
 aB^{100} + bB^{99} &= A + C \Rightarrow aI + bB = A + C \Rightarrow \\
 \Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \rightarrow \boxed{b=0} \\ a-b=1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a+0=1 \\ a-0=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1}
 \end{aligned}$$

La igualdad se cumple para $a=1$ y $b=0$.

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

2.2.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a^2 - a - a - 0 - 1 = -a^2 - 2a - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 0}{-2} = -1$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

triangular equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.2.2 Para $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ y = a - ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - a(a - ax) - z = -a \\ ax - a + ax + z = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - a^2 + a^2x - z = -a \\ 2ax + z = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2 + 1)x - z = a^2 - a \\ z = 2a - 2ax \end{cases} \Rightarrow (a^2 + 1)x - 2a + 2ax = a^2 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 + 2a + 1)x = a^2 + a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq -1 \\ a^2 + 2a + 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2 + a}{a^2 + 2a + 1} = \frac{a(a+1)}{(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = a - a \frac{a}{a+1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a+1} = \frac{a}{a+1}} \\ \boxed{z = 2a - 2a \frac{a}{a+1} = \frac{2a^2 + 2a - 2a^2}{a+1} = \frac{2a}{a+1}} \end{array} \right.$$

Para $a \neq -1$ la solución del sistema es $x = y = \frac{a}{a+1}$, $z = \frac{2a}{a+1}$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dados los planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2 : x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

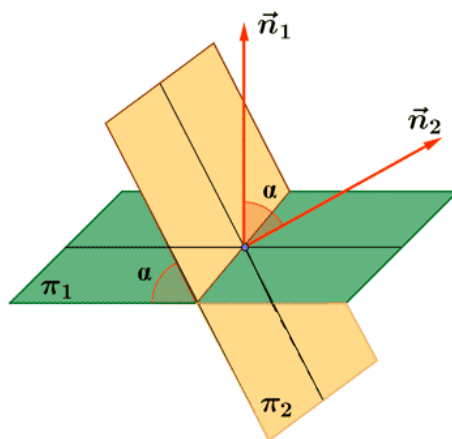
3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

3.1.1 Para que dos planos sean perpendiculares deben serlo sus respectivos vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + mz = -1 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 2, m) \\ \pi_2 : x + z = 6 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \\ \pi_1 \perp \pi_2 \rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 2, m)(1, 0, 1) = 0 \Rightarrow 1 + 0 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 Si el ángulo entre los dos planos es de 45° el ángulo entre sus vectores normales también es de 45° ,



Utilizamos el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 2, m) \\ \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \\ (\pi_1, \pi_2) = 45^\circ \rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 45^\circ \\ \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(45^\circ) = \frac{|(1, 2, m) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2} \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow 1 = \frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow \sqrt{5+m^2} = |1+m| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+m^2 = (1+m)^2 \Rightarrow 5+m^2 = 1+2m+m^2 \Rightarrow 4=2m \Rightarrow \boxed{m=2}$$

Para $m = 2$ los planos forman un ángulo de 45° .

3.1.3. Hallamos la ecuación de la recta intersección de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + mz = -1 \\ \pi_2 : x + z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + mz = -1 \\ x = 6 - z \end{array} \right\} \Rightarrow 6 - z + 2y + mz = -1 \Rightarrow 2y + (m-1)z = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = -7 + (1-m)z \Rightarrow y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}z \Rightarrow r : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 es $r : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

3.2 Dado el plano $\pi : 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

3.2.1 Para que la recta que pasa por P y Q esté contenida en el plano basta con que los puntos estén en el plano.

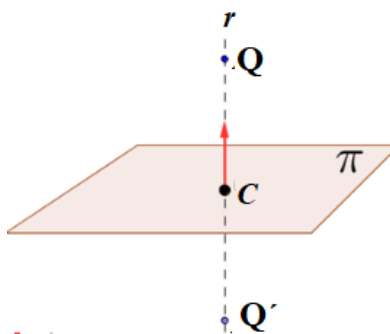
$$\left. \begin{array}{l} \pi : 3x + y - z = 2 \\ P = (0, 1, -1) \in \pi \\ Q = (1, a, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2 \\ 3 \cdot 1 + a - 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para $a = 0$ la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano.

3.2.2. Para $a = 1$ el punto Q tiene coordenadas $Q(1, 1, 1)$.

Tenemos que hallar el punto Q' simétrico de Q respecto del plano π .

Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto Q . Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto Q' simétrico de Q respecto del plano π .



Hallamos la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\pi : 3x + y - z = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, 1, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (3, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} \pi : 3x + y - z = 2 \\ x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 1 + \lambda - (1 - \lambda) = 2 \Rightarrow 3 + 9\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{11} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \frac{-1}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)}$$

Las coordenadas del punto simétrico Q' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{QC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) \\ Q(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QC} = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{-3}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right)$$

$$Q' = C + \overrightarrow{QC} = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) + \left(\frac{-3}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$$

El punto simétrico de Q respecto del plano π es $Q'\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2****4.1** Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .**4.1.2 (1.5 puntos)** Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .**4.1.3 (0.5 puntos)** Representar la función f .**4.1.1** Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{No existe}$$

Su denominador nunca se anula y el dominio de la función es $\mathbb{R}$.**Asíntotas verticales.** $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.**Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{1 - (-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0$. La

función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1-2^2}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

4.1.2. Por el estudio anterior sabemos que la evolución de la función es el que describe el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$.

Para $x=-1$ la función vale $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2}$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(-1, -1/2)$.

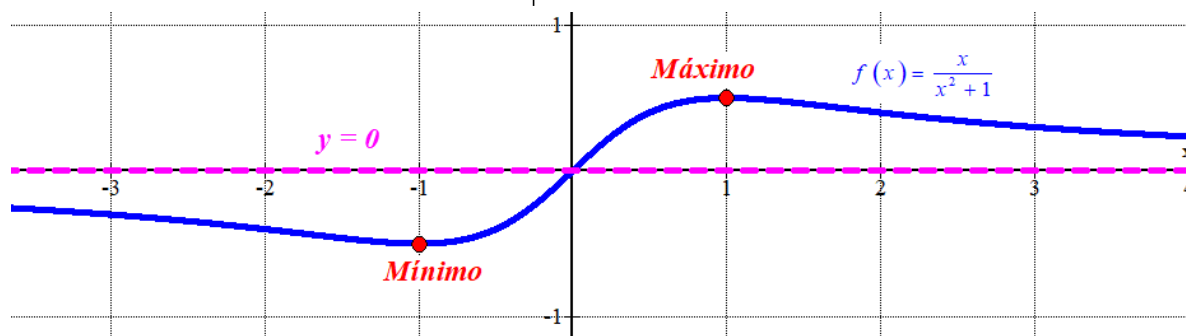
Para $x=1$ la función vale $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$. El máximo relativo tiene coordenadas $(1, 1/2)$.

Para decidir si son máximos y mínimos absolutos calculamos el límite de la función en $+\infty$ y $-\infty$. Lo hemos calculado en el apartado anterior y los límites valen 0.

El máximo absoluto de la función es $\frac{1}{2}$ y el mínimo absoluto de la función es $-\frac{1}{2}$.

4.1.3. Con toda la información obtenida y una pequeña tabla de valores dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
-7	-0.14
-3	-0.3
-1	-0.5
0	0
1	0.5
3	0.3
7	0.14



4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x=1$ y las gráficas de las dos funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

4.2.1 La función $f(x)$ es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2) - 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Esta expresión de la derivada no se anula. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$ (valor excluido del dominio).

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-2}{(-2)^3} = \frac{1}{4} > 0$.

La función crece en $(-\infty, 0)$.

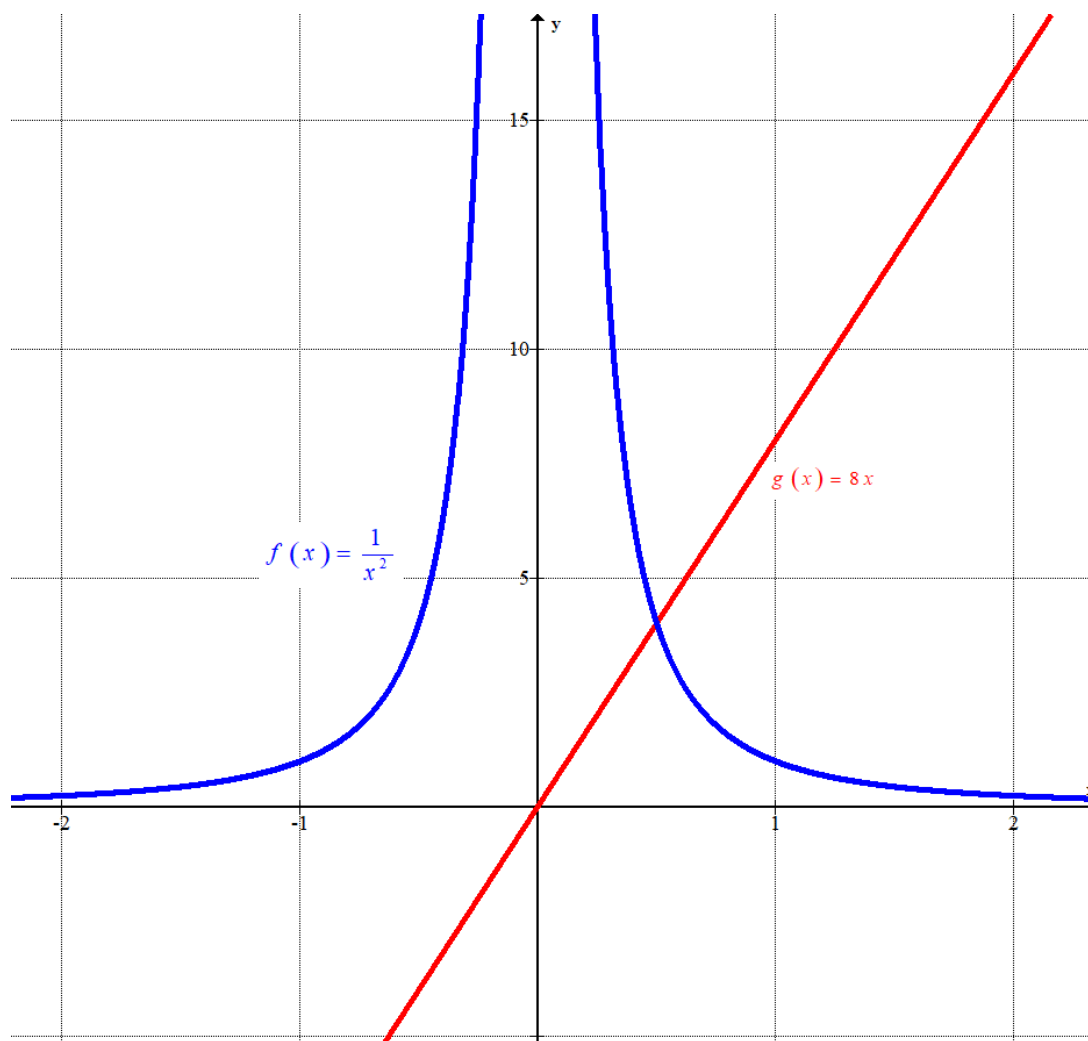
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2}{2^3} = \frac{-1}{4} < 0$. La función decrece en $(0, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

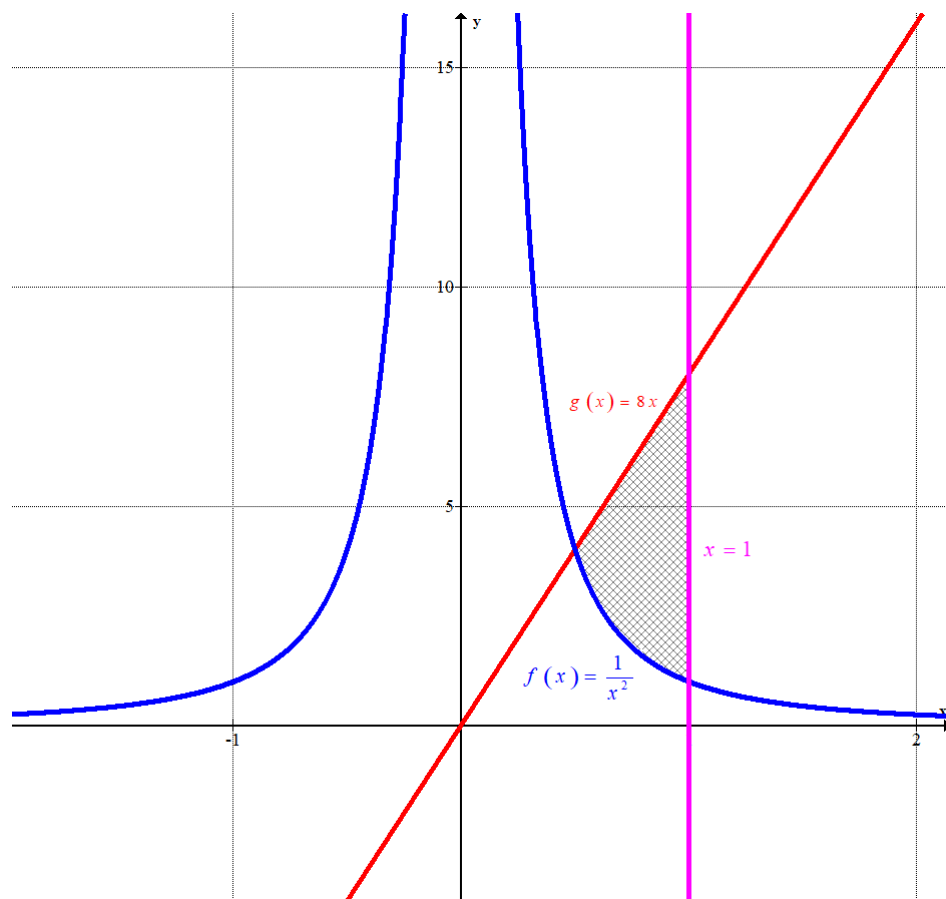
4.2.2. Hacemos una tabla de valores de cada función y dibujamos sus gráficas respectivas.

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
-2	0.25
-1	1
-0.5	4
0.5	4
1	1
2	0.25

x	$g(x) = 8x$
0.5	4
1	8



4.2.3. Dado que tenemos las gráficas de ambas funciones dibujamos el recinto del cual queremos hallar el área.



Averiguamos cuando las gráficas de las dos funciones se cortan.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 8x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

El área del recinto es el valor de la integral definida entre 0.5 y 1 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{0.5}^1 8x - \frac{1}{x^2} dx = \int_{0.5}^1 8x - x^{-2} dx = \left[4x^2 - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{0.5}^1 = \left[4x^2 + \frac{1}{x} \right]_{0.5}^1 = \\ &= \left[4 \cdot 1^2 + \frac{1}{1} \right] - \left[4 \cdot 0.5^2 + \frac{1}{0.5} \right] = 4 + 1 - 1 - 2 = \boxed{2} \end{aligned}$$

El área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tiene un valor de 2 unidades cuadradas.