



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JUNY 2025	CONVOCATORIA: JUNIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

- 1.1 (0.25 puntos)** Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?
- 1.2 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

- 1.3 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?
- 1.4 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

- 2.1** En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

- 2.1.1 (1.25 puntos)** En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

- 2.1.2 (1.25 puntos)** En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s : \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

3.2 Se consideran el plano $\pi : 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

4.1.1 (0.75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 (1.25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 (0.5 puntos) El precio del material en el caso anterior.

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,9600	0,9438	0,9240	0,9077	0,8923	0,8480	0,7948	0,7500
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9608	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9880	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9480	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9867	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6834	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1084	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7084	0,5941	0,4770	0,3833
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9986	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,7778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9997	0,9990

A

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

1.1 De los clientes de la pizzería prefieren pizza pepperoni el $100 - 40 - 25 = 35$ % de los clientes. La probabilidad de que un cliente elegido al azar haya pedido una pizza pepperoni es de 0.35.

1.2 Si llamamos M a “elegir pizza Margarita”, V a “elegir pizza Vegetariana” y P a “elegir pizza Pepperoni”. La elección de cada cliente se supone independiente de la elección de otro cliente. La probabilidad de que elijan pizzas diferentes es la probabilidad de que el cliente 1 elija pizza margarita y el cliente 2 no más la probabilidad de que el cliente 1 elija pizza vegetariana y el cliente 2 no más la probabilidad de que el cliente 1 elija pizza pepperoni y el cliente 2 no

$$P(M1 \cap \overline{M2}) + P(V1 \cap \overline{V2}) + P(P1 \cap \overline{P2}) = P(M1)P(\overline{M2}) + P(V1)P(\overline{V2}) + P(P1)P(\overline{P2}) =$$

$$= 0.4 \cdot (1 - 0.4) + 0.25 \cdot (1 - 0.25) + 0.35 \cdot (1 - 0.35) = \boxed{0.655}$$

1.3 Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de clientes que eligen pizza margarita de un grupo de 10 clientes. X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.4$. $X = B(10, 0.4)$.

Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.4^4 \cdot 0.6^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 210 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 \approx \boxed{0.2508}$$

1.4 Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Utilizamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = 10) =$$

$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^{10} = 1 - 1 \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} = 1 - 0.6^{10} \approx \boxed{0.994}$$

Los valores obtenidos con la fórmula de la probabilidad en una distribución binomial se pueden obtener utilizando la tabla proporcionada en el examen.

n	k	p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40
1	0		0.9900	0.9500	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6667	0.6500	0.6000
	1		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0		0.9801	0.9025	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.4444	0.4225	0.3600
	1		0.9999	0.9975	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8889	0.8775	0.8400
	2		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0		0.9703	0.8574	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2963	0.2746	0.2160
	1		0.9997	0.9928	0.9720	0.9600	0.9438	0.9240	0.9077	0.8933	0.8640
	2		1.0000	0.9999	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9630	0.9571	0.9360
	3		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0		0.9608	0.8145	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1975	0.1785	0.1296
	1		0.9994	0.9880	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.5928	0.5630	0.4752
	2		1.0000	0.9995	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8889	0.8735	0.8208
	3		1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9877	0.9850	0.9744
	4		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0		0.9510	0.7738	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.1317	0.1160	0.0778
	1		0.9990	0.9774	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.4609	0.4284	0.3370
	2		1.0000	0.9988	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.7901	0.7648	0.6826
	3		1.0000	1.0000	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9547	0.9460	0.9330
	4		1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9959	0.9947	0.9928
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0		0.9415	0.7351	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0878	0.0754	0.0467
	1		0.9985	0.9672	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.3512	0.3191	0.2333
	2		1.0000	0.9978	0.9842	0.9011	0.8308	0.7443	0.6804	0.6471	0.5443
	3		1.0000	0.9999	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8999	0.8826	0.8208
	4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9822	0.9777	0.9600
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9988	0.9982	0.9959
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0		0.9321	0.6983	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0585	0.0490	0.0280
	1		0.9980	0.9556	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.2634	0.2338	0.1586
	2		1.0000	0.9962	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.5708	0.5323	0.4199
	3		1.0000	0.9998	0.9973	0.9867	0.9294	0.8740	0.8267	0.8002	0.7102
	4		1.0000	1.0000	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9547	0.9444	0.9037
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9931	0.9910	0.9812
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9994	0.9984
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0		0.9227	0.6634	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0390	0.0319	0.0168
	1		0.9973	0.9428	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1951	0.1691	0.0964
	2		0.9999	0.9942	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.4682	0.4278	0.3154
	3		1.0000	0.9996	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.7414	0.7064	0.5941
	4		1.0000	1.0000	0.9996	0.9896	0.9727	0.9420	0.9121	0.8939	0.8263
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9803	0.9747	0.9502
	6		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9974	0.9964	0.9915
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9993
	8		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0		0.9135	0.6302	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0260	0.0207	0.0101
	1		0.9968	0.9288	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.1431	0.1211	0.0705
	2		0.9999	0.9916	0.9470	0.7382	0.6007	0.4628	0.3772	0.3373	0.2318
	3		1.0000	0.9994	0.9917	0.9144	0.8343	0.7297	0.6503	0.6089	0.4826
	4		1.0000	1.0000	0.9991	0.9804	0.9511	0.9012	0.8552	0.8283	0.7334
	5		1.0000	1.0000	0.9999	0.9969	0.9900	0.9747	0.9576	0.9484	0.9006
	6		1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9917	0.9888	0.9750
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9986	0.9952
	8		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997
	9		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0		0.9044	0.6007	0.3437	0.1051	0.0555	0.0282	0.0173	0.0138	0.0060
	1		0.9957	0.9139	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.1040	0.0860	0.0494
	2		0.9999	0.9885	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.2991	0.2616	0.1673
	3		1.0000	0.9990	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.5583	0.5138	0.3826
11	4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9976	0.9941	0.9894	0.9851	0.9631
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$P(X = 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) = 0.6331 - 0.3823 = 0.2508$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.006 = 0.994$$

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

2.1.1 Resolvemos la ecuación matricial $A^2 = A$.

$$\begin{aligned} A^2 = A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha^2 = \alpha \\ \alpha^2 = \alpha \\ (1-\alpha)^2 = 1-\alpha \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \\ \alpha^2 - \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 1 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \alpha(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \\ \alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \alpha = 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

La igualdad solo se cumple para $\alpha = 0$.

2.1.2 La matriz inversa de A solo existe cuando su determinante es no nulo.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \alpha(1-\alpha) \\ |A| = 0 &\Rightarrow \alpha(1-\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \boxed{\alpha = 1} \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de α distinto de 0 y de 1.

Calculamos la expresión de la matriz inversa para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \alpha(1-\alpha)$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

2.2.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6a + 10 - 6 + 3a + 8 + 15 = 9a + 27$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 9a + 27 = 0 \Rightarrow 9a = -27 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -3$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -3$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -9 \quad -15 \quad -9 \\ -6 \quad 4 \quad 6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -9 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \\ -3 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 9 \quad 9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 5 & 9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 5 \quad 9 \quad 9 \\ 0 \quad -5 \quad -9 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{3 \quad -2 \quad -3 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -5 \quad -9 \quad -9 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.2.2 Para $a = -3$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{3 \quad -2 \quad -3 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -5 \quad -9 \quad -9 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -5y - 9z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -5y = -9 + 9z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ y = \frac{9 - 9z}{5} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 3x - 2 \frac{9 - 9z}{5} - 3z = 0 \Rightarrow 15x - 2(9 - 9z) - 15z = 0 \Rightarrow 15x - 18 + 18z - 15z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x + 3z - 18 = 0 \Rightarrow 5x + z - 6 = 0 \Rightarrow 5x = 6 - z \Rightarrow x = \frac{6 - z}{5} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}z \\ y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}z; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones son $\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \alpha \\ y = \frac{9}{5} - 9\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5\alpha \end{cases}$.

2.2.3 Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x \quad -5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x \quad -5z = -3 \\ x = 3 - y - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3 - y - 2z) - 2y - 3z = 0 \\ 2(3 - y - 2z) - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9 - 3y - 6z - 2y - 3z = 0 \\ 6 - 2y - 4z - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y - 9z = -9 \\ -2y - 9z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y - 9z = -9 \\ 2y + 9z = 9 \end{cases}$$
$$\overline{-3y = 0} \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 0 - 9z = -9 \Rightarrow -9z = -9 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \boxed{x = 3 - 0 - 2 \cdot 1 = 1}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

3.1.1 Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s .

$$s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 + 2y + z = 0 \Rightarrow z = 1 - 2y \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$$

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas e intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 + 2\lambda \\ \alpha = \lambda \\ 1 - 2\alpha = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \\ \alpha = \lambda \\ -2\alpha = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = -1} \\ -2\alpha = 1 + 1 \rightarrow \boxed{\alpha = -1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 - 2(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1, -1, 3)}$$

Las rectas se cortan en el punto $A(-1, -1, 3)$.

3.1.2 El plano π que contiene a las rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene a los puntos de las dos rectas.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (0, 1, -2) \\ Q_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (0, 1, -2) \\ P_r(1, 0, 2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2 + 2z - 4 + 4y + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 4y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 4y - 2z + 3 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a ambas rectas es $\pi: x - 4y - 2z + 3 = 0$.

3.1.3 Hallamos la distancia del punto $P = (1,0,2)$ al plano $\pi : x - 4y - 2z + 3 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - 4y - 2z + 3 = 0 \\ P(1,0,2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|1 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$$

La distancia del punto P al plano es 0. El punto P pertenece al plano.

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

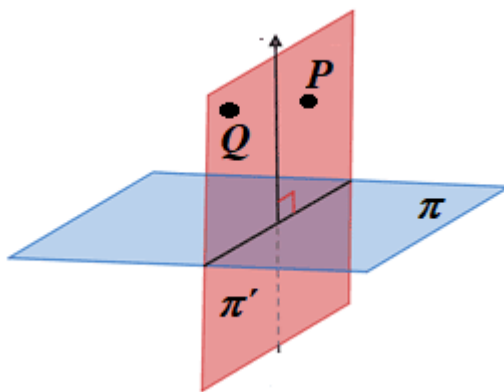
3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

3.2.1 El plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ tiene como vector normal.

El plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$ tiene como vectores directores el vector normal del plano π y el vector $\overrightarrow{PQ}$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2) - (-1, 0, 1) = (3, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (3, -1, 2) \\ P(-1, 0, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2 + 3y - 3z + 3 - 3z + 3 - 6y + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y - 6z + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2z + 3 = 0}$$

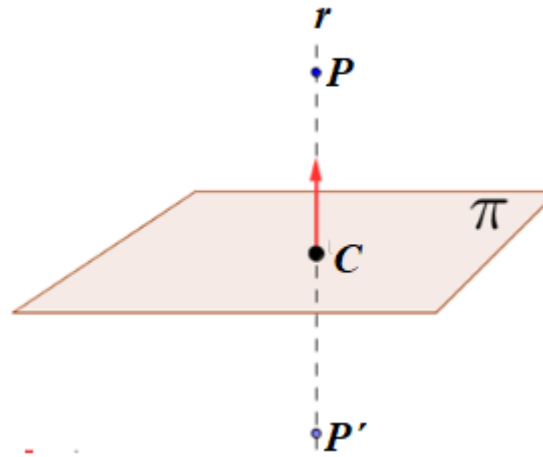
El plano π' perpendicular a π que pasa por P y por Q tiene ecuación $\pi': x - y - 2z + 3 = 0$.

3.2.2 Hallamos la distancia del punto $Q = (2, 1, 2)$ al plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ Q(2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14} \approx 1.3363 \text{ unidades}}$$

La distancia del punto Q al plano π tiene un valor de $\frac{5\sqrt{14}}{14} \approx 1.3363$ unidades.

3.2.3 Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto P' simétrico de P respecto del plano π .



Hallo la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\vec{n} = (3, -1, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, 0, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (3, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \pi : 3x - y + 2z = 4 \quad \Rightarrow 3(-1 + 3\lambda) + \lambda + 2(1 + 2\lambda) = 4 \Rightarrow -3 + 9\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{14} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3\frac{5}{14} = \frac{1}{14} \\ y = -\frac{5}{14} \\ z = 1 + 2\frac{5}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico P' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right) \\ P(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right) - (-1, 0, 1) = \left(\frac{15}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{5}{7}\right)$$

$$P' = C + \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right) + \left(\frac{15}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{16}{14}, -\frac{10}{14}, \frac{17}{7}\right) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P'\left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)$.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

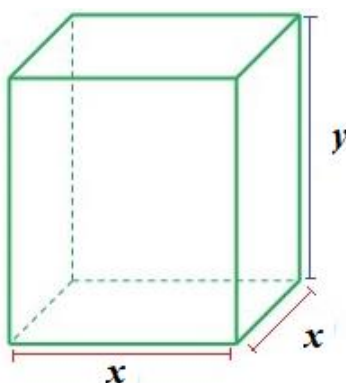
4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

4.1.1 (0.75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 (1.25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 (0.5 puntos) El precio del material en el caso anterior.



4.1.1 El volumen del prisma (80 cm^3) es el producto del área (x^2) de la base por la altura (y).

$$80 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . Hay cuatro paredes laterales con la misma superficie (xy).

$$\text{Coste de los laterales} = 4xy \cdot 1 = 4xy = 4x \frac{80}{x^2} = \frac{320}{x} \text{ céntimos.}$$

La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro, por lo que cuesta $1 + 0.25 = 1.25$ céntimos el m^2 . El material de la base y la tapa cuesta $2x^2 \cdot 1.25 = 2.5x^2$ céntimos.

El coste del material necesario para construir la caja es la suma de las cantidades obtenidas.

$$P(x) = \frac{320}{x} + 2.5x^2 \text{ céntimos.}$$

4.1.2 Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$P(x) = \frac{320}{x} + 2.5x^2 \Rightarrow P'(x) = \frac{-320}{x^2} + 5x$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-320}{x^2} + 5x = 0 \Rightarrow 5x = \frac{320}{x^2} \Rightarrow 5x^3 = 320 \Rightarrow x^3 = \frac{320}{5} = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

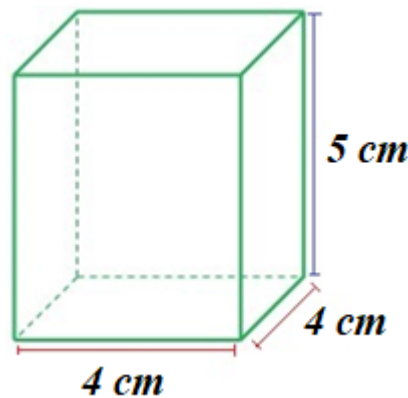
La función tiene un punto crítico en $x = 4$. Determinamos el signo de la segunda derivada para $x = 4$.

$$P'(x) = \frac{-320}{x^2} + 5x = -320x^{-3} + 5x \Rightarrow P''(x) = 960x^{-4} + 5 = \frac{960}{x^4} + 5 \Rightarrow P''(4) = \frac{960}{4^4} + 5 > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada sabemos que la función $P(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 4$.

Para $x = 4$ obtenemos el valor de la altura: $y = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{16} = 5$.

La caja con menor coste tiene de lado en la base cuadrada de 4 cm y 5 cm de altura.



4.1.3 Para el caso anterior el coste del material es $P(4) = \frac{320}{4} + 2.5 \cdot 4^2 = 120$ céntimos. El coste mínimo es de 1.2 euros.

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x-2|$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

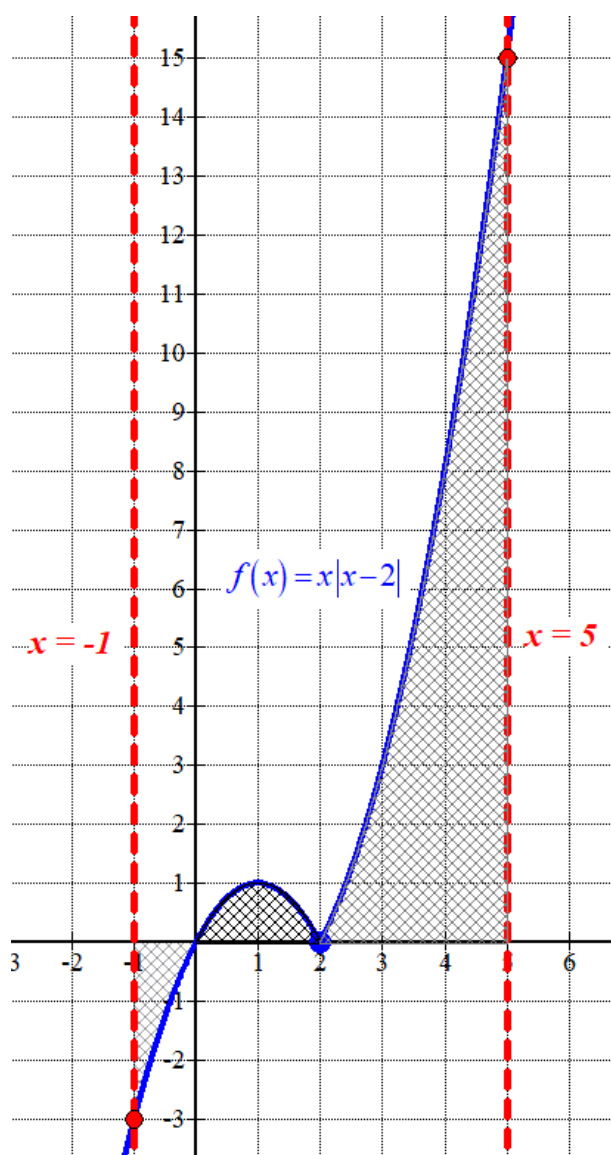
4.2.1 Expresamos la función como una función a trozos. La función cambia de expresión en $x = 2$.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x(-x+2) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x(2-x) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Averiguamos cuando la gráfica de la función corta el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x|x-2| \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x|x-2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \in [-1, 5] \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \in [-1, 5] \end{cases}$$

Dibujamos la gráfica de la función y la región indicada.



4.2.2 La región está dividida en tres partes. Calculamos el área de cada parte.

El área del trozo de la izquierda es el valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 x(2-x) dx = \int_{-1}^0 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[0^2 - \frac{0^3}{3} \right] - \left[(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right] = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

El área del trozo de la izquierda vale $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

El área del trozo del centro es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2 .

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[2^2 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[0^2 - \frac{0^3}{3} \right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

El área del trozo del centro vale $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

El área del trozo de la derecha es el valor de la integral definida de la función entre 2 y 5 .

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x) dx &= \int_2^5 x(x-2) dx = \int_2^5 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \\ &= \left[\frac{5^3}{3} - 5^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = \frac{125}{3} - 25 - \frac{8}{3} + 4 = \boxed{18}\end{aligned}$$

El área del trozo de la derecha vale 18 unidades cuadradas.

El área de toda la región es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{62}{3} \approx 20.6667$ unidades cuadradas.