

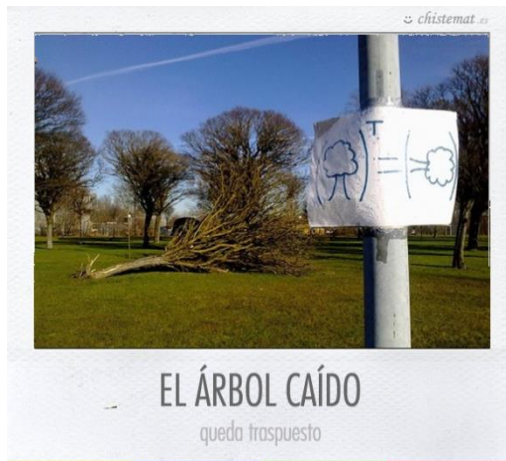
2º de bachillerato Matemáticas II

Bloque 1 de 4 - Álgebra

www.ebaumatematicas.com

Tema 1. Matrices.....	2
1. Definición de matriz. Tipos de matrices.....	2
2. Operaciones con matrices.....	5
2.1. Igualdad de matrices	5
2.2. Suma de matrices	5
2.3. Producto de una matriz por un número (escalar)	5
2.4. Producto de matrices.....	6
3. Trasposición de Matrices.	9
4. Matriz inversa	10
5. Resolución de ecuaciones matriciales	11
Tema 2. Determinantes.....	16
1. Definición general de determinantes	16
2. Determinante de matrices de orden 1, 2 y 3.	16
2.1. Determinante de matrices cuadradas de orden 1	16
2.2. Determinante de matrices cuadradas de orden 2	16
2.3. Determinante de matrices cuadradas de orden 3	16
3. Determinante de algunas matrices especiales	18
4. Propiedades de los determinantes.....	19
5. Cálculo de la matriz inversa.	22
5.1. Cálculo de la matriz inversa con determinantes	23
5.2. Método de Gauss-Jordan del cálculo de la matriz inversa	25
6. Rango de una matriz	27
Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales	33
1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlos.....	34
1.1. Definición, sistemas equivalentes.....	34
1.2. Tipos de sistemas de ecuaciones.	35
1.3. Expresión de sistemas en forma matricial	35
2. Sistemas de Cramer	36
3. Teorema de Rouchè-Fröbenius. Discusión de un sistema.....	38
4. Discusión y resolución de sistemas por Gauss.	38
5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Cramer.....	40
5.1. Sistemas compatibles determinados.....	40
5.2. Sistemas compatibles indeterminados	41
6. Resolución de sistemas homogéneos.	42
Ejercicios en pruebas EBAU y PAU de Murcia.....	52

Tema 1. Matrices



1. Definición de matriz. Tipos de matrices

Se define la matriz A de dimensión $m \times n$ al conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{siendo } a_{ij} = \text{elemento de la matriz } A \text{ situado en la fila } i \text{ y}$$

columna j .

La matriz A se denota también como $A = (a_{ij})$

La dimensión $m \times n$ de una matriz es el número de filas y columnas de la misma (el primer número indica el número de filas (m) y el segundo el número de columnas (n)).

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de dimensión } 2 \times 3.$$

$$B = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0) \quad \text{es una matriz de dimensión } 1 \times 4.$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de dimensión } 2 \times 1.$$

Tipos de matrices:

1. **Matrices cuadradas:** son las matrices que tienen igual número de filas que de columnas ($m=n$). Cuando se habla de su dimensión se dice matriz cuadrada de orden n .

Ejemplos:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz cuadrada de orden } 2.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ es una matriz cuadrada de orden 3.}$$

Elementos de las matrices cuadradas:

a. Diagonal principal: elementos de la forma a_{ii} .

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ son los elementos rodeados.

b. Diagonal secundaria: elementos de la forma a_{ij} donde $i + j = n + 1$.

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ son los elementos rodeados.

2. **Matrices triangulares superiores e inferiores:** son las matrices cuadradas tal que:

Superior: elementos por debajo de la diagonal principal son nulos $a_{ij} = 0$ si $i > j$

Inferior: elementos por encima de la diagonal principal son nulos $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Ejemplos:

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ es una matriz triangular superior.}$$

$$TI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ es una matriz triangular inferior.}$$

3. **Matrices simétricas:** matrices cuadradas donde $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplos:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 3 & 12 & 2 \end{pmatrix} \quad SS = \begin{pmatrix} -1 & 23 \\ 23 & 4 \end{pmatrix} \quad SSS = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Matrices diagonales:** matrices cuadradas donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

Ejemplos:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Matriz escalar:** matriz diagonal en el que todos los términos de la diagonal son iguales:

Ejemplos:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad EE = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

6. **Matriz unidad o matriz identidad:** matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. Se denota como I o Id .

Ejemplos:

$$Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidad de orden 2}$$

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidad de orden 3}$$

$$Id_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidad de orden 4}$$

7. **Matriz nula** (o cero): la matriz con todos los elementos iguales a 0.

Ejemplos:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. **Matriz columna:** toda matriz con una sola columna.

Ejemplos:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. **Matriz fila:** toda matriz con una única fila.

Ejemplo:

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones con matrices

2.1. Igualdad de matrices

Dos matrices M y N se dicen que son iguales ($M = N$) si se cumplen:

- misma dimensión
- elementos que ocupan la misma posición son iguales.

2.2. Suma de matrices

Solo se pueden sumar matrices de la misma dimensión.

Veamos en qué consiste la suma de matrices:

La suma de dos matrices A y B de la misma dimensión es otra matriz que se denota como $A+B$ con misma dimensión que las otras dos y definida como:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir, $A+B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices que se están sumando.

Ejemplo:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ No se puede sumar}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+2 \\ 1-3 & 0+1 \\ 3+0 & 5+1 \end{pmatrix} \text{ Si se puede sumar}$$

2.3. Producto de una matriz por un número (escalar)

Sea k un número real (escalar) y $A = (a_{ij})$ una matriz de dimensión $m \times n$. El producto de k por A es otra matriz $k \cdot A$ de misma dimensión tal que:

$$k \cdot A = k(a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

, es decir la matriz $k \cdot A$ se obtiene de multiplicar por k cada elemento de la matriz A .

Ejemplos:

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad -4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -12 & 0 & -4 \\ -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

- Se puede sacar factor común en una matriz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -8 & -11 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -5/4 \\ 5/4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

- Una matriz escalar se puede expresar en función de la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot Id_3$$

2.4. Producto de matrices

El producto de matrices es una operación más compleja que las anteriores.

Si A y B son dos matrices, para poder realizar $A \cdot B$ es necesario que el nº de columnas de la primera matriz (A) del producto sea igual al nº de filas de la segunda matriz (B).

El producto de la matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times p$ es otra matriz $C = A \cdot B$, con igual nº de filas que A y de columnas que B, tal que el elemento C_{ij} de la matriz C se obtiene multiplicando la fila i-esima de la primera matriz (A) con la columna j-esima de la segunda (B).

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0) = (14)$$

$$1 \times \boxed{3} = \boxed{3} \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} = \boxed{3} \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} = \boxed{3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{¡¡No se puede realizar el producto!!}$$

$$3 \times \boxed{2} \neq \boxed{3} \times 2$$

Ejercicios.

Ejercicio 1. Escribir matrices de los siguientes tipos:

- De dimensión 3×2
- Cuadrada de dimensión 4
- Triangular inferior de dimensión 3
- Diagonal de dimensión 4
- ¿Qué tipo de matriz es de dimensión 1×1 ? Pon un ejemplo. ¿Cuál será la matriz identidad de orden 1?

Ejercicio 2. Decir que tipo y de que dimensión son las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calcule el valor de a, b, c y d para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & 7+a+b \\ -2+c+d & 3d+4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, realice las

siguientes operaciones: a) $A+B$ b) $A-B-C$ c) $3A+5B-6C$

Ejercicio 5. Dadas las matrices siguientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, realice, si

es posible, los siguientes productos:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot B$ e) $A \cdot C$ f) $C \cdot A$ g) $A \cdot A$

Ejercicio 6. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Realiza los dos productos siguientes: $A \cdot B$ y $B \cdot A$, ¿Se obtiene el mismo resultado?

Ejercicio 7. Calcular A^2 , B^2 , $A^2 - B^2$, $(A+B)^2$ y $(A-B)^2$ siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Calcular los valores de las incógnitas que verifican las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcule A^2 , A^3 , A^4 . Calcule A^{50} , A^{100} .

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n .

Soluciones:

1. a. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

e. 1 fila y 1 columna. Los números reales, ejemplos 2,-1.3. La identidad de orden 1 es el número 1.

2. A es una matriz cuadrada, triangular superior, dimensión 3×3 o cuadrada de orden 3. B es una matriz columna de dimensión 4×1 . C es una matriz rectangular de dimensión 2×3 . D es una matriz cuadrada, escalar de dimensión 3×3 o simplemente matriz cuadrada de orden 3.

3. $2a = a + 5 \rightarrow a = 5$
 $2b = 7 + a + b \rightarrow b = 12$
 $2c = -2 + c + d \rightarrow c = d - 2 \rightarrow c = -6$
 $2d = 3d + 4 \rightarrow d = -4$

4. a) $A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A - B - C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}$

$$5. a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b) B \cdot A = \text{¡No es posible!} \quad c) B \cdot C = \text{¡No es posible!} \quad d) C \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$e) A \cdot C = \text{¡No es posible!} \quad f) C \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix} \quad g) A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 20 & 12 & 14 \\ 32 & 18 & 20 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 30 & 36 & 42 \end{pmatrix}$$

No es el mismo resultado. No siempre se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$, es decir, no se cumple la propiedad conmutativa del producto de matrices. Existen algún tipo de matrices que si conmutan. $A \cdot B = B \cdot A$, si esto ocurre se dice que A y B conmutan.

$$7. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad (A-B)^2 = (A-B)(A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Al no ser conmutativo el producto de las matrices las igualdades notables no son ciertas cuando A y B son matrices.

$$8. a) x = y = 0 \quad b) a = 2; b = 1; c = 0; d = -1$$

$$9. A^2 = -Id; \quad A^3 = -A; \quad A^4 = Id$$

Cada 4 se repite la secuencia. Luego $A^{50} = A^{48} \cdot A^2 = Id \cdot A^2 = A^2 = -Id$ $A^{100} = Id$

$$10. A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Trasposición de Matrices.

Sea A una matriz de dimensión $m \times n$ se llama matriz traspuesta y se escribe como A^t a la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas.

Ejemplos:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

- $(A^t)^t = A$
- Si B es una matriz simétrica cumple que $B^t = B$
- Si A es una matriz escalar cumple que $A^t = A$

4. Matriz inversa

Se habla de matriz inversa solo para matrices cuadradas.

La matriz inversa de una matriz cuadrada A es otra matriz cuadrada de la misma dimensión que se denota como A^{-1} tal que se cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$$

El método más sencillo para el cálculo de la inversa se realiza con ayuda del determinante de la matriz que se verá en el tema siguiente.

Para matrices 2x2 podemos calcular la inversa a partir de la definición:

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ calculemos su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Debe cumplirse:

$$A \cdot A^{-1} = Id \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+2c=1 \\ 2b+2d=0 \\ 3a+7c=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases}$$

Pudiendo separar las 4 ecuaciones en 2 sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a+2c=1 \\ 3a+7c=0 \end{cases} \xrightarrow{3 \cdot \text{Ecuación } 1^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a} \begin{cases} 6a+6c=3 \\ -6a-14c=0 \end{cases}$$

$$-8c=3 \rightarrow \boxed{c=-3/8}$$

$$\rightarrow 2a - 6/8 = 1 \rightarrow \boxed{a=7/8}$$

$$\begin{cases} 2b + 2d = 0 \\ 3b + 7d = 1 \end{cases} \xrightarrow{3 \cdot \text{Ecuación } 1^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a} \begin{cases} 6b + 6d = 0 \\ -6b - 14d = -2 \end{cases}$$

$$-8d = -2 \rightarrow \boxed{d = 2/8}$$

$$\rightarrow 6b + 12/8 = 0 \rightarrow \boxed{b = -2/8}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/8 & -2/8 \\ -3/8 & 2/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se podría comprobar que también se cumple:

$$A^{-1} \cdot A = Id$$

5. Resolución de ecuaciones matriciales

Las ecuaciones matriciales son ecuaciones algebraicas donde los coeficientes y las incógnitas son matrices.

Ejemplos:

a) Resuelve la ecuación $X \cdot B + B = B^{-1}$ siendo $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Encuentra la matriz B que cumple la ecuación $P^{-1} \cdot B \cdot P = A$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver una ecuación matricial es obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad.

Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

- 1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.

$$X + B = C \rightarrow X = C - B$$

$$X - B = C \rightarrow X = C + B$$

- 2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Igual por la derecha.

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow Id \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot Id = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Ejemplos:

Veamos la resolución de los dos anteriores ejemplos:

a) Resuelve la ecuación $X \cdot B + B = B^{-1}$ siendo $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$X \cdot B + B = B^{-1} \Rightarrow X \cdot B = B^{-1} - B \Rightarrow X = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = B^{-1} \cdot B^{-1} - Id$$

Necesitamos calcular la inversa de B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Debe cumplirse:}$$

$$B \cdot B^{-1} = Id \rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a-c=3 \\ 2b-d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=3 \end{cases}$$

Pudiendo separar las 4 ecuaciones en 2 sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a-c=3 \\ -a+2c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=2a-3 \\ -a+2c=0 \end{cases} \rightarrow -a+4a-6=0 \rightarrow 3a=6 \rightarrow a=2 \rightarrow \\ \rightarrow c=4-3=1$$

$$\begin{cases} 2b-d=0 \\ -b+2d=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d=2b \\ -b+2d=3 \end{cases} \rightarrow -b+4b=3 \rightarrow 3b=3 \rightarrow b=1 \rightarrow d=2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así la solución es

$$X = B^{-1} \cdot B^{-1} - Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra la matriz B que cumple la ecuación $P^{-1} \cdot B \cdot P = A$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejemos B en la ecuación

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = A \xrightarrow[\text{Multiplicamos por } P^{-1} \text{ por la derecha}]{\text{Multiplicamos por } P \text{ por la izquierda}} B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

Necesitamos calcular la inversa de P:

Si consideramos $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$P \cdot P^{-1} = Id \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+k \\ -a+g & -b+h & -c+k \\ -d+g & -e+h & -f+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+d+g=1 \\ b+e+h=0 \\ c+f+k=0 \\ -a+g=0 \\ -b+h=1 \\ -c+k=0 \\ -d+g=0 \\ -e+h=0 \\ -f+k=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+d+g=1 \\ b+e+h=0 \\ c+f+k=0 \\ a=g \\ -b+h=1 \\ k=c \\ d=g \\ h=e \\ -f+k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g+g+g=1 \\ b+e+e=0 \\ c+f+c=0 \\ -b+e=1 \\ -f+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=1/3 \\ b=-2e \\ f=-2c \\ b=e-1 \\ c=f+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2e=e-1 \\ c=-2c+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=1/3 \\ c=1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2/3 \\ f=-2/3 \\ a=g=1/3 \\ d=g=1/3 \\ h=e=1/3 \\ k=c=1/3 \end{cases}$$

$$\text{Así queda la inversa de P como } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz B solución de la ecuación matricial es:

$$\begin{aligned}
 B = P \cdot A P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

Nota: Se observa en este último ejemplo que es necesario un método más ágil y cómodo para el cálculo de la inversa. Lo volveremos a calcular con el uso de determinantes (¿Como será?).

Ejercicios

1. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcule k tal que se cumpla la siguiente igualdad $(A - k \cdot Id)^2 = 0$

3. Calcule la matriz X , en la ecuación matricial $B(2A + Id) = AXA + B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sea I la matriz identidad de orden 2 y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halle X para que $BX + B = B^2 + I$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^t A$ y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) Encuentra las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que $A^t A Y = Y$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^t X = X$

6. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a , b y c son tres números reales.
- a) Encuentra A^n para todo natural n .
- b) Calcula $(A^{35} - A)^2$
7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^n , siendo n un número natural.
8. Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.
9. Calcula los valores de x para que la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y 0 son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.
10. Siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla los valores de a y b de forma que $A^2 - 2A = B$.

Soluciones:

1. $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ La matriz D no tiene inversa.
2. $K = 1$
3. $X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 & -9 \\ 3 & 9 & -16 \\ -4 & -11 & 19 \end{pmatrix}$
4. $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b \in \mathbb{R}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbb{R}$
6. $A^n = 0$ para $n \geq 3$. $(A^{35} - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \frac{3^n - 1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $x = 3, y = -8$ 9. $x = 3$ 10. Si $a = 0; b = \frac{-1}{2}$. Si $a = 2; b = \frac{1}{2}$

Tema 2. Determinantes

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \triangle 4 & \triangle 5 & \triangle 6 \\ \square 7 & \square 8 & \square 9 \end{vmatrix} = \textcircled{1} \triangle 5 \square 9 + \textcircled{2} \triangle 6 \square 7 + \textcircled{3} \triangle 4 \square 8 - \\ - \textcircled{1} \triangle 6 \square 8 - \textcircled{2} \triangle 4 \square 9 - \textcircled{3} \triangle 5 \square 7$$

En ningún producto coinciden color o forma y son todos los productos posibles cumpliendo esta regla.

1. Definición general de determinantes

Solo se habla de determinantes en matrices cuadradas.

Sea A una matriz cuadrada. Se le asigna un escalar denominado determinante de A, denotado por $|A|$ o por $\det(A)$. Este escalar se obtiene como combinación lineal de los elementos que componen la matriz.

La definición de determinante es más compleja, pero nos limitamos a determinantes de matrices de orden 2 y 3. Aprenderemos una forma cómoda y rápida de calcular dicho determinante de la matriz. Más adelante veremos sus múltiples aplicaciones.

2. Determinante de matrices de orden 1, 2 y 3.

2.1. Determinante de matrices cuadradas de orden 1

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \text{El determinante es el propio número.}$$

2.2. Determinante de matrices cuadradas de orden 2

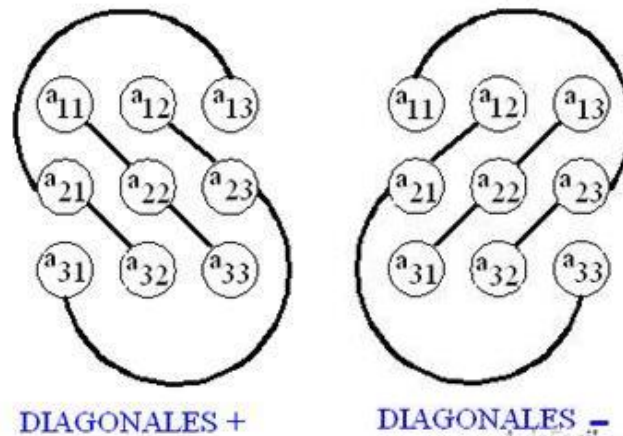
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(El producto de la diagonal principal – el producto de la diagonal secundaria)

2.3. Determinante de matrices cuadradas de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Lo podemos calcular usando uno de los dos métodos siguientes:

1. Regla de Sarrus

Los términos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

Los términos con signo - están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

Ejemplos:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-6 + 0 + 0) = 6$$

2. Otro método

Para calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Escribes a continuación, detrás de la 3ª columna, las **dos** primeras:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ahora realizas las sumas de los productos de los 3 elementos de la diagonal principal y diagonales paralelas a la misma (que son las líneas azules del dibujo). Y restas los productos de 3 elementos en la diagonal secundaria y paralelas a ella (son las líneas rojas del dibujo).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Se puede hacer de forma semejante escribiendo las filas 1ª y 2ª debajo de la fila 3ª.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Ejemplos:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 24 + 0 - (0 - 6 + 8) = -30$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4$$

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix}$$

$$\text{Solución: a) } a^2 + 25 \quad \text{b) } 23 \quad \text{c) } 2 - 2a^2 \quad \text{d) } -2 \quad \text{e) } 79 \quad \text{f) } -m^2 - 4m + 1$$

3. Determinante de algunas matrices especiales

En este apartado calcularemos de forma sencilla el valor de los determinantes de algunas matrices cuadradas especiales.

1. Determinante de la matriz nula.

La matriz cuadrada nula es aquella en la que todos los coeficientes son ceros, se denota como 0. Su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$$

2. Determinante de la matriz identidad

Recordemos que la matriz identidad es aquella donde todos los elementos fuera de la diagonal son nulos y los de la diagonal valen 1. Su determinante es 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1$$

3. Determinante de la matriz diagonal

Matrices diagonales son aquellas donde los elementos fuera de la diagonal principal son nulos, pudiendo valer cualquier valor los elementos de la misma. Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4 = 1 \cdot (-1) \cdot 4$$

4. Determinante de la matriz triangular

El valor de un determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4$$

4. Propiedades de los determinantes

En este apartado veremos las propiedades más importantes de los determinantes, a partir de las cuales será más fácil calcular el valor de los determinantes de algunas matrices.

Propiedad 1: el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Importante: a partir de esta propiedad todas las propiedades de los determinantes que relacionen columnas serán ciertas también para las filas y al revés.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-5) - (-4) \cdot 2 = \boxed{23} \Rightarrow |A^t| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-5) - 2 \cdot (-4) = \boxed{23}$$

|-----!!IGUALES!!-----|

Propiedad 2: si los elementos de una fila (o columna) de una matriz se multiplican por un número el determinante de la nueva matriz queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 13.$$

- Si multiplicamos la columna 3ª de la matriz A por 2 obtenemos otra matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo determinante valdrá 2 veces el determinante de A.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 26 \rightarrow |B| = 2 \cdot |A|$$

- Si cambiamos el signo (multiplicamos por -1) de los elementos de la 2ª fila de la matriz obtenemos otra matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante valdrá lo mismo que el de A pero cambiado de signo.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13 \rightarrow |C| = -|A|$$

Propiedad 3: Si a una matriz cuadrada A de orden n la multiplicamos por un número k ($B = k \cdot A$), el determinante de la nueva matriz, B, es k^n veces el determinante de A:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 13 \text{ Obtenemos una matriz B al multiplicar la matriz A por 5.}$$

$$B = 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 25 \\ 10 & 15 & 30 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 5^3 \cdot |A| = 125 \cdot 13 = 1625$$

Propiedad 4: Si los elementos de una columna i-esima (o una fila) de una matriz cuadrada se puede descomponer como suma de dos números, su determinante será igual a la suma de los determinantes de las matrices que tienen las demás columnas (filas) iguales y la columna i-esima de cada uno de ellas uno de los elementos de la suma.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 13$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3+2 \\ 2 & 3 & 5+1 \\ 0 & 1 & 1+0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3+2 \\ 2 & 3 & 5+1 \\ 0 & 1 & 1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [3 - 0 + 6 - 0 + 6 - 5] + [0 + 0 + 4 - 0 - 0 - 1] = 10 + 3 = 13$$

Propiedad 5: El determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Propiedad 6: Si una matriz permuta dos columnas (filas), su determinante cambia de signo.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Intercambiamos la fila 3ª y la 1ª. Comprobamos que el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 6 - 3 - 10 = -13 = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Propiedad 7: Si una matriz tiene una fila o una columna formada por ceros su determinante es cero.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 8: Si en una matriz tiene dos filas o columnas iguales o proporcionales su determinante es cero.

Ejemplo:

$$\{\text{Fila } 1^a = \text{Fila } 3^a\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 18 - 30 - (15 - 30 - 18) = 0$$

$$\{\text{Fila } 3^a = -2 \cdot \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 16 - (-16 - 16) = 0$$

Propiedad 9: Si en una matriz cuadrada los elementos de una fila (o columna) son combinación lineal de las restantes filas (o columnas) entonces su determinante es cero. Y viceversa.

Ejemplo:

$$\{\text{Fila } 3^a = \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 54 - (45 - 66) = 0$$

Propiedad 10: El determinante de la matriz A^{-1} es: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Ejemplo:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos sus determinantes respectivos:

$$\left. \begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \\ |B^{-1}| &= \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$$

Propiedad 11: Si a los elementos de una fila (columna) se les suma una combinación lineal de otras filas (o columnas), su determinante no varía.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Si le sumo a la fila 2ª la fila 1ª multiplicada por -2

$$\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 6 \\ + & -2 & 6 & -10 \\ \hline 0 & 9 & -4 \end{array}$$

Con la nueva fila 2ª el determinante queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13$$

5. Cálculo de la matriz inversa.

Una **matriz se dice regular** si tiene inversa.

Una matriz tiene inversa si su determinante **no** es cero. En caso contrario la matriz no tiene inversa.

$$|A| \neq 0 \rightarrow A \text{ es regular o inversible (existe } A^{-1})$$

$$|A| = 0 \rightarrow A \text{ es singular o no tiene inversa (no existe } A^{-1})$$

5.1. Cálculo de la matriz inversa con determinantes

La fórmula del cálculo de la inversa de una matriz es:

$$A^{-1} = \frac{[Matriz\ adjunta(A)]^t}{|A|} = \frac{Matriz\ adjunta(A^t)}{|A|}$$

Para utilizar esta fórmula necesitamos definir varios conceptos:

Menor complementario

Se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al valor del determinante de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir en la matriz la fila i y la columna j .

Adjunto

Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

El signo $+$ si $i+j$ es par.

El signo $-$ si $i+j$ es impar.

Matriz adjunta

Se llama matriz adjunta a la compuesta por todos los adjuntos de cada elemento de la matriz inicial.

Ejemplos:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ veamos si se puede calcular su inversa, para ello

comprobamos si su determinante es 0 o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa de } A \text{ y proseguimos con su cálculo.}$$

Para hacer el adjunto de cada elemento de la matriz basta con aplicar esta plantilla de cambio de signos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Vamos cambiando el signo al menor complementario de la posición con un menos $(-)$ y dejamos sin cambio de signo el de posición con un más $(+)$.

$$\text{Adjunto de } a_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & 0 & 3 \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{Adjunto de } a_{12} = - \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ 2 & \cancel{-1} & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-10) = 10$$

$$\text{Adjunto de } a_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & 0 & \cancel{2} \\ 2 & -1 & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Adjunto de } a_{21} = - \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Adjunto de } a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{2} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adjunto de } a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 2 & -1 & \cancel{4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$\text{Adjunto de } a_{31} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & 0 & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Adjunto de } a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Adjunto de } a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ -1 & 0 & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz adjunta de A queda:

$$\text{Adjunta}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la traspuesta de la matriz adjunta de A queda:

$$\text{Adjunta}(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz inversa de A es } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adjunta}(A)^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Procedemos al cálculo de su inversa.

1º. Cálculo del determinante: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe la inversa de B.

$$2^{\circ}. \text{Traspuesta de } B \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3^{\circ}. \text{Matriz adjunta de } B^t \rightarrow \text{Adjunta}(B^t) = \begin{pmatrix} |2| & -|4| \\ -|0| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4^{\circ}. \text{Inversa de } B \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adjunta}(B^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5.2. Método de Gauss-Jordan del cálculo de la matriz inversa

Lo explicamos con dos ejemplos.

Ejemplo 1.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ consideramos la matriz $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$. Vamos a realizar transformaciones en

esta matriz para trasladar la matriz identidad de la derecha a la izquierda. Estas transformaciones son sumar a una fila otra fila multiplicada por un número o dividir/multiplicar una fila por un número.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \\ -3 \quad -6 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad -2 \quad -3 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \text{ dividida por } -2 \} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ consideramos la matriz } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad -1 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 3}^a \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - \frac{1}{4} \text{Fila 3}^a \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1/4 \quad -1/4 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3/4 \quad -1/4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \frac{1}{2} \text{Fila 3}^a \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -1/2 \quad -1/2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 5/2 \quad 1/2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \frac{1}{4} \text{Fila 3}^a \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 \\ 5/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Rango de una matriz

Menor de orden k de una matriz A de dimensión $m \times n$ es toda submatriz con k filas y k columnas pertenecientes a la matriz A, obtenida quitando filas y columnas de la matriz original.

Ejemplo:

Dada la matriz A de dimensión 3×4 , vamos a detallar distintos menores de distinto orden de dicha matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Menores de orden 4:

No existen. La matriz es de dimensión 3×4 , no puedo extraer una matriz de orden 4.

- Menores de orden 3: Debo de quitar una columna, obteniendo 4 menores.

$$\text{Quito la columna } 4^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 3^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 2^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 1^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Menores de orden 2 (hay muchos, detallamos algunos):

$$\text{Quitamos la fila } 3^{\text{a}} \text{ y las columnas } 3^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quitamos la fila } 3^{\text{a}} \text{ y las columnas } 1^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quitamos la fila } 3^{\text{a}} \text{ y las columnas } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$; \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}; \dots$$

- Menores de orden 1 (hay doce, cada uno de los elementos de la matriz):

(1); (2); (3); (4); (5);...

Rango de una matriz A de dimensión $m \times n$ es el orden del mayor menor con determinante no nulo de la matriz A.

También se define como el número de filas o columnas linealmente independientes de la matriz A.

Una forma de obtener el rango de una matriz:

1) Calculamos todos los menores de mayor dimensión de la matriz A.

$k = \text{mínimo}(m, n)$

1.a. Si algún menor es distinto de cero $\rightarrow \text{rang}(A) = k$

1.b. Si todos los menores son iguales a cero $\rightarrow \text{rang}(A) < k$

2) Calculamos los menores de dimensión $k - 1$.

2.a Si algún menor es distinto de cero $\rightarrow \text{rang}(A) = k - 1$

2.b Si todos los menores son nulos $\rightarrow \text{rang}(A) < k - 1$

Y así sucesivamente....

Esto termina cuando algún menor es distinto de cero, siendo nulos los calculados antes de mayor dimensión.

Una segunda forma:

Observar las filas y columnas de la matriz buscando líneas nulas, iguales o proporcionales.

También buscar si una línea es combinación lineal de las otras.

Ejemplos:

1. Calcular el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comparando las filas las tres son iguales, su rango es 1.

2. Calcular el rango de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. Comparando las filas las tres son proporcionales, su rango es 1.

3. Calcular el rango de $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comparando las filas o las columnas hay 2 iguales, su rango es como máximo 2.

4. Calcular el rango de $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como hay una columna nula su rango es como mucho

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0$ y su rango es 2.

5. Calcular el rango de $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como hay dos columnas nulas su rango es 1.

6. Calcular el rango de $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Su rango como mucho es 3, veamos el valor de su

$$\text{determinante } |G| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11 \neq 0. \text{ El rango es 3.}$$

7. Calcular el rango de $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Su rango como mucho es 3, veamos el valor de su

$$\text{determinante } |H| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0. \text{ El rango no es 3. Busquemos un menor de orden 2}$$

no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango es 2. Puedes observar que en la matriz H la 2ª y 3ª filas son proporcionales, por ello no puede ser 3.

8. Calcular el rango de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. No se observa igualdad o proporcionalidad entre filas

o entre columnas. Procedemos con el método del determinante.

$$\text{¿Rango de M es 3? } |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0 \text{ El rango no es 3.}$$

$$\text{¿Rango de M es 2? De } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ sacamos el menor } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

El rango de M es 2.

9. Calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$. En este caso requiere más trabajo.

Buscaremos el menor de la matriz más grande posible con determinante no nulo.

Paso 1. Calculamos el determinante de los menores de orden 3 = mínimo(3,4):

$$\left. \begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 3^{\text{a}} \text{ es tres veces la columna } 1^{\text{a}} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 2^{\text{a}} \text{ es tres veces la columna } 1^{\text{a}} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 2^{\text{a}} \text{ es dos veces la columna } 1^{\text{a}} \\
 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ -6 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 9 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ son iguales}
 \end{array} \right\}$$

El rango de A es menor de 3.

Paso 2. Calculamos el determinante de los menores de orden 2, en busca de uno no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \text{ Pero hay uno que } \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 81 = 87 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Ejercicios

1. Calcular los siguientes determinantes

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix}$$

2. Calcula la matriz inversa, si es posible, de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Averigua para que valor de x las matrices son regulares:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -x \\ 2 & x & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Dadas las matrices: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X + 2 \cdot B = 3 \cdot C$

5. Calcule el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{ Discútase, según el valor de } a, \text{ el rango de la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$7. \text{ Discutir, en función del número real } m, \text{ el rango de la matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Determina el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Indica el rango de la matriz identidad de orden 3 y de la matriz nula.

10. Determina el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

12. Estudia el rango de la matriz M según los valores de a . ¿Existe algún valor de a que haga que $\text{ran}(M) = 1$?

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Soluciones:

1. a) $a^2 + 25$ b) 23 c) $2 - 2a^2$ d) -2 e) 79 f) $-m^2 - 4m + 1$

$$2. \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{130} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 6 \\ -10 & -20 & 20 \\ 25 & -15 & 2 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A es regular para cualquier valor de x distinto de 0 y -3.

B es regular para cualquier número distinto de 6.

C es regular para cualquier valor de x distinto de 0 y 6.

$$4. \quad X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rango es 2

6. Si $a = -1/3$ el rango es 2 y si a es distinto de $-1/3$ el rango es 3.

7. Si $m = 3$ o $m = -2$ el $\text{rang}(A) = 2$ y si m es distinto de -2 y 3 el $\text{rang}(A) = 3$.

8. El rango de A es 1 y el de B es 2.

9. El rango de Id_3 es 3 y el de la matriz nula es 0.

10. El rango de A es 3 y el de B es 2

$$11. \quad X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Si $4 - a^2 = 0 \rightarrow a = 2, a = -2$: Las dos últimas filas coinciden $\rightarrow \text{ran}(M) = 2$.

Si $4 - a^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2, a \neq -2$: $\text{ran}(M) = 3$. El rango de M no puede ser igual a 1 para ningún valor de a , ya que las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier a .

Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

DISCUSIÓN de UN SISTEMA

Discute según los valores de m :

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$$



$$\text{Strawberry} + \text{Orange} = 1800$$

$$\text{Lemon} + \text{Orange} = 1200$$

$$\text{Strawberry} + \text{Lemon} = 1600$$

$$\text{Apple} + \text{Apple} + \text{Apple} = 30$$

$$\text{Apple} + \text{Banana} + \text{Banana} = 18$$

$$\text{Banana} - \text{Coconut} = 2$$

MATH HEROES

$$\text{Spider} + \text{Spider} = 32$$

$$\text{Superman} + \text{Superman} - \text{Spider} = 4$$

$$\text{Captain America} + \text{Captain America} = 6$$

$$\text{Winged} + \text{Winged} + \text{Superman} = 12$$

$$\text{Spider} + \text{Captain America} + \text{Winged} = ??$$

STAR MATHS

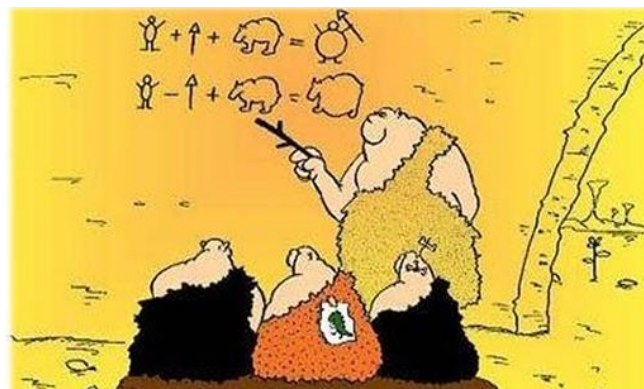
$$\text{Starship} + \text{Starship} + \text{Starship} = 18$$

$$\text{Starship} + \text{Starship} - \text{Starship} = 24$$

$$\text{Insect} + \text{Insect} = 8$$

$$\text{Starship} + \text{Starship} - \text{Starship} = 1$$

$$\text{Insect} + \text{Starship} + \text{Starship} = ??$$



1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlos

1.1. Definición, sistemas equivalentes

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** al conjunto formado por **m** ecuaciones con **n** incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array} \right\} \text{Siendo } \begin{cases} a_{ij} \text{ coeficientes del sistema} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \text{ incógnitas} \\ b_i \text{ términos independientes} \end{cases}$$

Ejemplos:

1.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y + 5z = 13 \quad (1) \\ 2x + 3y = 2 \quad (2) \\ -x + y - z = -3 \quad (3) \end{array} \right\} 3 \text{ ecuaciones y 3 incógnitas}$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} 2x+3y+t=6 \quad (1) \\ x-t=0 \quad (2) \end{array} \right\} 2 \text{ ecuaciones y } 3 \text{ incógnitas}$$

Resolver un sistema es obtener todas sus posibles soluciones.
Debiendo ser solución de todas las ecuaciones.

Ejemplos:

1. La solución es $x=1$; $y=0$; $z=2$

2. Las soluciones son $x=t$; $y=2-t$

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Formas de obtener sistemas equivalentes:

1) Sumar una constante a ambos miembros de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left. \begin{matrix} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y+10=1+10 \\ 3x+y=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y+10=11 \\ 3x+y=3 \end{matrix} \right\}$$

2) Multiplicar por una constante, distinta de cero, a ambos lados de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(x+y=1) \\ 3x+y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x+3y=3 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\}$$

3) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de la misma con las restantes ecuaciones

$$\left. \begin{matrix} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y=1 \\ 2(x+y=1)-(3x+y=3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y=1 \\ -x+y=-1 \end{matrix} \right\}$$

4) Añadir o quitar ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2(x + y = 1) - (3x + y = 3) \end{array} \left\} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array}$$

1.2. Tipos de sistemas de ecuaciones.

Existen dos criterios para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales:

Los sistemas se pueden clasificar según el *valor de los términos independientes*:

- **Homogéneos**: todos los términos independientes son nulos.
- **No homogéneos**: algún término independiente es diferente de cero.

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right\} \text{No homogéneo}$$

$$\left. \begin{array}{l} -5x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \right\} \text{Homogéneo}$$

Los sistemas se pueden clasificar según el *número de soluciones*:

- **Compatibles**: tienen solución. Distinguimos dos casos distintos.
 - Compatibles Determinados**: tienen una única solución
 - Compatibles Indeterminados**: tienen infinitas soluciones
- **Incompatibles**: no tienen solución.

Ejemplos:

$$1) \left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\} \text{Tiene una única solución} \rightarrow x = 1; y = 1$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{array} \right\} \text{Tiene infinitas soluciones} \rightarrow x = y$$

$$3) \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \text{No tiene solución}$$

1.3. Expresión de sistemas en forma matricial

Una manera más cómoda y útil de trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales es expresándolo de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array} \right\} \text{ de forma matricial se puede expresar como:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Asignando a cada matriz una letra: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$

El sistema queda: $AX = B$

La matriz **A** es la **matriz de los coeficientes**.

La **matriz ampliada** $\mathbf{A/B}$ es la matriz que resulta de añadirle a la matriz de los coeficientes una columna con los términos independientes:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

La expresión matricial del sistema es:

$$AX = B, \text{ es decir, } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Sistemas de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es de Cramer si cumple las siguientes condiciones:

- Mismo número de ecuaciones que de incógnitas $n=m$
- El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero $|A| \neq 0$

Los sistemas de Cramer son todos compatibles determinados (una única solución).

Existen dos métodos de resolución de los sistemas de Cramer.

Método 1: a partir de la matriz inversa.

El sistema de Cramer se puede escribir en forma matricial como $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, y tal que $\mathbf{A}$ tiene inversa al ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.

Así podemos expresar las soluciones como:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \text{ ecuaciones} = 3 \text{ incógnitas. } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{El sistema es de Cramer}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La solución es } x = y = z = 1$$

Método 2:

En este método no tendremos que calcular la matriz inversa, sino tantos determinantes como incógnitas.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0; \text{ la fórmula es:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Ejercicio 1: Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas con el método de Cramer.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x+3y=5 \\ 2x-y=0 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} x+3y-z=-5 \\ x+3y-z=4 \\ 5x+4z=8 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ x+y+z=6 \\ x+3y=7 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ x+y+z=6 \\ x+2y=5 \end{array} \right\} \end{array}$$

3. Teorema de Rouché-Fröbenius. Discusión de un sistema

Sea un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas, el sistema es compatible (tiene soluciones) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada

$$\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A_{\text{ampliada}})$$

Según la relación entre el rango y el número de incógnitas tenemos que el sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Veámoslo en la siguiente tabla resumen:

$\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A_m)$ $\rightarrow$ El sistema no tiene solución

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A_m)$ $\rightarrow$ El sistema tiene solución, pero hay dos opciones:

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A_m) = n^\circ \text{ incógnitas}$ $\rightarrow$ El sistema tiene una solución única

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A_m) < n^\circ \text{ incógnitas}$ $\rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones

4. Discusión y resolución de sistemas por Gauss.

El método de Gauss consiste en transformar el sistema inicial en otro sistema triangular equivalente realizando operaciones con las ecuaciones del sistema: sumar a una ecuación otra de las ecuaciones multiplicada por un número, multiplicar una ecuación por un número o intercambiar las ecuaciones. Estas operaciones son más cómodas de realizar si utilizamos la expresión matricial del sistema de ecuaciones. Realizaremos las operaciones usando la matriz ampliada. Sabemos que cada fila es una ecuación del sistema y cada columna son los coeficientes de cada incógnita.

Aplicamos este método para resolver el sistema del ejemplo:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x + 3y - z = 4 \\ x + y + z = 6 \\ x + 3y = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Fila } 3^\circ - \text{Fila } 1^\circ]{\text{Fila } 2^\circ - \text{Fila } 1^\circ} \left. \begin{array}{l} x + 3y - z = 4 \\ -2y + 2z = 2 \\ z = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot \text{Fila } 2^\circ} \left. \begin{array}{l} x + 3y - z = 4 \\ y - z = -1 \\ \boxed{z = 3} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{el sistema triangular}]{\text{resolvemos}} \\ \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y - 3 = 4 \\ y - 3 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ \boxed{y = 2} \end{array} \right\} \rightarrow x + 6 = 7 \rightarrow \boxed{x = 1} \end{array}$$

La solución del sistema es $x = 1, y = 2, z = 3$.

También podemos discutir un sistema utilizando el método de Gauss. Lo aplicamos en un ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \text{ Su matriz ampliada es } A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ Vamos a transformarla hasta}$$

conseguir una matriz triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Fila } 3^a - a \cdot \text{Fila } 1^a]{\text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right)$$

$$\text{El sistema equivalente queda } \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (2-a-a^2)z = 1-a \end{cases}$$

$$\text{Para este sistema equivalente la matriz de coeficientes es } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \text{ y su}$$

$$\text{determinante vale } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (a-1) \cdot (2-a-a^2). \text{ Este determinante se anula}$$

cuando $a-1=0$ o cuando $2-a-a^2=0$. Resolviendo estas dos situaciones tenemos que $a=1$ o $a=-2$.

Distinguimos tres casos:

- **Caso 1.** $a \neq 1$ y $a \neq -2$. El sistema tendrá una única solución ya que se podrá hallar el valor de z y después el de las otras incógnitas.

- **Caso 2.** $a=1$ El sistema queda
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{El sistema tiene infinitas soluciones } \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

- **Caso 3.** $a=-2$ El sistema queda
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}.$$

El sistema no tiene solución al aparecer una igualdad imposible.

5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Cramer.

Hemos resuelto sistemas con igual número de incógnitas que de ecuaciones cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero (método de Cramer).

Vamos a ser más genéricos, resolviendo por Cramer todo tipo de sistema compatible; es decir sistemas en los que **rang(A) = rang(Am)** tanto si son compatibles determinados como indeterminados.

5.1. Sistemas compatibles determinados

Para que un sistema sea compatible determinado es necesario que el número de ecuaciones sea mayor o igual que el de incógnitas, y que se cumpla que **rang(A)=rang(Am)=número de incógnitas**.

De esta forma hay ecuaciones sobrantes y podemos eliminarlas. Es importante comprobar que las ecuaciones que no se eliminan sean independientes, lo cual se comprueba viendo que el rango del nuevo sistema continúe siendo el mismo. El nuevo sistema se puede resolver por Cramer.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = -7 \\ 7x - 2y = -14 \end{array} \right\}$$

El sistema no es de Cramer, **número de incógnitas $\neq$ número de ecuaciones**

Pero estudiemos si es compatible o no, utilizando los rangos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \text{ consideramos el menor que resulta de quitar la tercera fila } \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de A es 2.}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{El rango de A/B es 2.}$$

Luego **rang(A) = rang(A/B) = 2 = número de incógnitas** $\rightarrow$ El sistema es compatible

Como el rango es 2, tenemos sólo 2 ecuaciones linealmente independientes, de forma que podemos eliminar una de las 3 ecuaciones, el rango del sistema continúa siendo 2.

Vamos a quitar la tercera ecuación pues, cuando calculamos el rango de A comprobamos que, para los coeficientes de las dos primeras ecuaciones, el determinante es distinto de cero.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = -7 \end{array} \right\}$$
 Este nuevo sistema, equivalente al anterior, es de Cramer, ya que cumple que $\text{Rang}(A) = \text{rang}(A/B) = \text{número de incógnitas} = 2$

La solución es $x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-21}{-3} = 7$

Ejercicio 2: Resuelve el sistema con el método de Cramer si es posible.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -5 \\ -x - y = 2 \\ 5x + 3y = -7 \end{array} \right\}$$

5.2. Sistemas compatibles indeterminados

Sea un sistema con m ecuaciones y n incógnitas, tal que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = r < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

Tenemos que buscar un sistema equivalente con r ecuaciones y r incógnitas:

1. Tomamos r ecuaciones independientes (rango del sistema es r)
2. Pasamos $n-r$ incógnitas a la derecha de la igualdad y las tratamos como parte del término independiente.
3. El sistema se resuelve por Cramer, dependiendo la solución de esos parámetros.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x + y + 4z = 6 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Si calculamos los rangos se cumple que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2$. Luego el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.

Como no observamos que ninguna ecuación sea igual o proporcional a otra, tomaremos la z como parámetro y las 2 primeras ecuaciones como independientes entre sí:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 - z \\ -x - y = -2z \end{array} \right\}$$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ por lo tanto, el rango de la matriz de los coeficientes no será 2, tenemos que o

bien coger la otra ecuación o cambiar de parámetro. Cambiaremos de parámetro tomando la y :

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 3 - y \\ -x + 2z = y \end{array} \right\}$$

Veamos el rango de A en función de m igualando a 0 el determinante:

$$|A| = -m^2 + 2m - 1 \quad -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Según el valor de m el sistema de ecuaciones puede ser de las 2 formas siguientes:

a) Si $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0$ y **rang(A) = 3**, sistema compatible determinado.

b) Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(A) = 1$, sistema compatible indeterminado

Resolvamos el sistema en cada caso de los estudiados.

a) Si $m \neq 1$ (compatible determinado): La única solución es la trivial $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$

b) Si $m = 1$ (compatible indeterminado):

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow x + y + z = 0 \rightarrow z = -x - y \rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

2. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real}$$

a) Discutir el sistema en función del valor de a

b) Resolver el sistema para $a = 0$

c) Resolver el sistema para $a = 1$

Solución:

a) Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema del problema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array} \right)$$

Determinemos el rango de ambas.

- Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - (1 + 0 + 0) = 0; \text{ El rango de } A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \text{ El rango de } A \text{ es } 2$$

Independientemente del valor de a .

- Rango de Matriz ampliada A/B:

Cambiamos la columna tercera de A por la de los términos independientes y veamos si

$$\text{se anula el determinante: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 0 - (-1 + 0 + 0) = a^2 - 2a + 1$$

Si igualamos a 0 nos sale $a = 1$.

Hay dos situaciones diferentes a estudiar, en función del valor de a :

- $a \neq 1 \rightarrow$ Rango de $A/B = 3$ distinto del rango de $A = 2$. Sistema sin solución.
- $a = 1 \rightarrow$ Rango de $A =$ Rango de $A/B = 2 <$ número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones (dependientes de 1 parámetro)

b) Para $a = 0$ el sistema es sin solución según lo visto en el apartado anterior.

c) Para $a = 1$ el sistema es con infinitas soluciones. Las determinamos:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{Quitamos la primera ecuación y nos quedamos con el sistema:}$$

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{La solución es } \begin{cases} y = 2 - z \\ x = 1 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

3. Sea a un parámetro real. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1-a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del valor de a .

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a) Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema del problema:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1-a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2+a \\ 1-a & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & -1 & 1-a \end{array} \right)$$

Determinemos el rango de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 - 1 + a - (a - a + a^2 - 2) = a^2 + a = 0 \rightarrow a(a+1) = 0;$$

El determinante de A es 0 cuando $a = 0$ y cuando $a = -1$

Hay tres situaciones diferentes, en función del valor de a :

- $a \neq 0$ y $a \neq -1 \rightarrow$ Rango de $A =$ Rango de $A/B =$ número de incógnitas = 3.
El sistema tiene una única solución.

- $a = 0 \rightarrow |A| = 0; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango de $A = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Probamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª}$$

$$\text{columna } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 2 - (0 + 0 - 1) = 0 \rightarrow \text{Rango de } A/B = 2$$

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = número de incógnitas

El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\bullet \quad a = -1 \rightarrow |A| = 0; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango de } A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \text{ Como la 3ª columna y la 1ª son iguales, probamos el menor}$$

de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 1 - (-2 + 2 + 1) = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } A/B = 3$$

Rango de A $\neq$ Rango de A/B. El sistema no tiene solución.

b) Para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Debemos eliminar una ecuación y la solución dependerá de un parámetro.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases} \text{ quitamos la ecuación 2ª que es 1ª - 3ª y queda } \begin{cases} x + z = 2 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Despejando la } z \text{ la solución es } \begin{cases} x = 2 - z \\ y = -1 - z \\ z = z \end{cases}$$

c) Para $a = 1$ el sistema tiene una única solución.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-3-1+1+6} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1+6-1}{2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1-3+1}{2} = \frac{-1}{2}$$

4. Discútase, en función del parámetro real k , el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Resolver cuando sea posible.

$$\begin{cases} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \\ 3x + ky = 0 \end{cases}$$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$; $A/B = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}$

Estudiemos el rango de A/B que puede ser 3 y el de A solo puede llegar a ser 2.

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = 9k - k^3 = 0 \rightarrow k(9 - k^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 9 - k^2 = 0 \rightarrow 9 = k^2 \rightarrow k = \pm 3 \end{cases}$$

Estudiemos por separado cada uno de los cuatro casos posibles:

CASO 1. $k \neq 0$; $k \neq -3$; $k \neq 3 \rightarrow |A/B| \neq 0 \rightarrow$ El rango de A/B es 3 y como el rango de A es 2 o menos, entonces el sistema no tiene solución.

CASO 2. $k = 0 \rightarrow$ El sistema queda $\begin{cases} 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ El sistema tiene una única

solución: $x = y = 0$

CASO 3. $k = 3 \rightarrow$ El sistema queda
$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$
 La ecuación 1ª y 3ª son iguales, podemos

suprimir la 1ª ecuación y el sistema queda
$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$
 Lo podemos resolver utilizando

reducción:
$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -3x - 2y = -3 \rightarrow 3x + 3(-3) = 0 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3 \\ \hline y = -3 \end{cases}$$

El sistema tiene una única solución $x = 3; y = -3$

CASO 4. $k = -3 \rightarrow$ El sistema queda
$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$
 La ecuación 1ª y 3ª son iguales, podemos

suprimir la 1ª ecuación y el sistema queda
$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$$

Lo podemos resolver utilizando sustitución:

$$\begin{cases} -3x = -3y \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3y + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow 5y = -3 \rightarrow y = -\frac{3}{5} \rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

El sistema tiene una única solución $x = -\frac{3}{5}; y = -\frac{3}{5}$

5. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y + (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad en función de los valores de **a**.
- Resuélvelo cuando **a = 0**

Solución:

Vamos a discutirlo de dos formas distintas:

PRIMER MÉTODO (Gauss) Triangulando la matriz ampliada

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y + (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases} \Rightarrow \text{La matriz asociada al sistema de ecuaciones es}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right) \Rightarrow \{\text{Cambio fila 1ª por fila 3ª}\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ a+1 & 2 & a-1 & a+1 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila 3ª la cambio por Fila 3ª} - (a+1) \cdot \text{Fila 1ª} \\ a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ -a-1 & -a-1 & -a^2-a & -a^2-a \\ \hline 0 & -a+1 & -a^2-1 & -a^2+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 1-a & -a^2-1 & 1-a^2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila 3ª la cambio por } (a-1) \cdot \text{Fila 2ª} + (a+1) \cdot \text{Fila 3ª} \\ 0 & a^2-1 & a^2-1 & 2a-2 \\ 0 & 1-a^2 & -a^3-a^2-a-1 & 1-a^2+a-a^3 \\ \hline 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right)$$

Una vez obtenida la matriz equivalente triangular, igualamos los elementos de la diagonal a 0:

$$a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$-a^3-a-2=0 \rightarrow \text{Resolviendo por Ruffini} \begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & -1 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \text{ una de las raíces es } a=-1$$

y resolviendo la ecuación de 2º grado del cociente $-a^2+a-2=0$ obtenemos

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{-2} = \text{No tiene solución}$$

La única solución es $\boxed{a=-1}$

NOS PLANTEAMOS **dos** CASOS DISTINTOS:

- **CASO 1.** $a \neq -1$. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO, ya que ningún elemento de la diagonal de la matriz equivalente es nulo y por tanto tiene una única solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right)$$

- **CASO 2.** $a = -1$

$$\text{La matriz ampliada queda } \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

El sistema de ecuaciones equivalente al inicial queda así:

$$\left. \begin{array}{l} 2y - 2z = 0 \\ 0 = 2 \\ 0 = -4 \end{array} \right\} \text{ Este sistema es INCOMPATIBLE (las ecuaciones 2ª y 3ª son absurdas)}$$

SEGUNDO MÉTODO (Rouché - Frobenius) con el uso de los rangos

Estudiamos los rangos de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, los comparamos entre sí y con el número de incógnitas (3).

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Para obtener el rango de esta matriz, estudiamos primero el valor de su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a+1)(a+1) + 2(a+1) + (a-1) \cdot 0 \cdot 1 - ((a-1)(a+1) + 0 + (a+1)(a+1)) = \\ &= a^3 + 2a^2 + a + 2a + 2 - (a^2 - 1 + a^2 + 2a + 1) = a^3 + \cancel{2a^2} + a + \cancel{2a} + 2 - \cancel{a^2} + 1 - \cancel{a^2} - \cancel{2a} - 1 \\ |A| &= a^3 + a + 2 \end{aligned}$$

Para averiguar cuando se anula este determinante necesitamos usar Ruffini

$$a^3 + a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \text{ una de las raíces es } a = -1$$

y resolviendo la ecuación de 2º grado del cociente $a^2 - a + 2 = 0$ obtenemos

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \text{No tiene solución}$$

La única solución es $\boxed{a = -1}$

NOS PLANTEAMOS dos CASOS DISTINTOS:

• **CASO 1.** $a \neq -1$

En este caso no se anula el determinante de la matriz de los coeficientes, luego su rango es 3.

El rango de la matriz ampliada como máximo puede ser 3, luego es también 3.

Rango de la matriz de los coeficientes = Rango de la matriz ampliada = Número de incógnitas
($3 = 3 = 3$)

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO para $a \neq -1$.

• **CASO 2.** $a = -1$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ esta matriz tiene rango 2,}$$

ya que hay un menor de orden 2 con determinante no nulo $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$$\text{La matriz ampliada es } \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Su rango es 3, ya que puedo elegir el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - (0 + 0 + 0) = 4 \neq 0$$

Rango de la matriz de los coeficientes $\neq$ Rango de la matriz ampliada ($2 \neq 3$) luego el sistema es INCOMPATIBLE para $a = -1$

Ejercicios

1. Discute y resuelve, cuando sea posible en función del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases}$$

2. Dado el sistema $\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$

- Estudia sus soluciones en función de a .
- Resuelve para $a = 1$

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ (1+a)y + z = 4 \\ x + 2y + az = 4 \end{cases}$$

- Discútase el sistema según el valor del parámetro real a .
- Resuélvase el sistema para $a = 2$.

4. Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 4 \\ x + y + kz = k^2 \end{cases} .$$

- Discútase según los valores de k e interprétese geoméricamente el resultado.
- Resuélvase el sistema para $k = 2$.

5. a) Discútase el sistema
$$\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$$
, en función del valor de a .

b) Para el valor $a = 1$, hállese, si procede, la solución del sistema.

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea incompatible?

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado?

c) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

7. Se considera el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase según los valores del parámetro λ .

b) Resuélvase para $\lambda = -3$.

c) Resuélvase para $\lambda = 1$.

8. Se considera el sistema
$$\begin{cases} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$$
, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a .

b) Resolver el sistema para $a=1$.

Soluciones:

1. Si $a = 8$ el sistema tiene infinitas soluciones y si a es distinto de 8 el sistema tiene una única solución. Para $a=8$ la solución es $x=114-112z$; $y=-19+20z$

2. a) $a = 3$ o $a = -3/2$ no tiene solución y a distinto de 3 y $-3/2$ el sistema tiene una única solución. b) $x=1$; $y=2$; $z=3$

3. a) Para $a = 1$ o $a = -1$ el sistema no tiene solución y para un valor distinto tiene una única solución b) $x=0$; $y=1$; $z=1$

4. a) $k = -2$ el sistema no tiene solución; $k=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y si k es distinto de 1 y -2 el sistema tiene una única solución b) $x = -3/4$, $y = 1/4$, $z = 9/4$.

5. a) Si $a = 0$ o $a=1/2$ el sistema no tiene solución y si a es distinto de 0 y $1/2$ el sistema tiene una única solución b) $x = -6$, $y = 10$, $z = 2$

6. a) $a=2$ b) $a \neq 2$ c) $x = 2 - 3z$; $y = -1/2$

7. a) Para $\lambda = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para valor distinto de 1 el sistema tiene una única solución. b) $x = y = z = -1$. c) $x = 1 - y - z$; $y = y$; $z = z$

8. a) Si $a=-0,5$ el sistema no tiene solución; si $a=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para todo valor de a distinto de 1 y $-0,5$ tiene una única solución b) $x = x$; $y = 2 - x$; $z = 2$

Ejercicios en pruebas EBAU y PAU de Murcia

Estas son las preguntas correspondientes al bloque de algebra (Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones) que han aparecido en las pruebas EBAU o PAU de los últimos años en Murcia. Si se desea ver la resolución de los ejercicios ir al archivo correspondiente a la PAU o EBAU de ese año en la web www.ebaumatematicas.com.

EXTRAORDINARIA 2025

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

- a) [1] Discute el sistema en función del parámetro k .
 b) [0,5] Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.
 c) [1] Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

Solución: a) Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). b) Para $k = 2$ las soluciones del sistema son

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{c) La solución del sistema es } x = \frac{k}{k-1}, y = \frac{1}{1-k}, z = 0, \text{ para cualquier}$$

valor de k distinto de 1 y 2.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

- a) [0,75] Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
 b) [0,75] Demuestre que la matriz $I - A$ es inversa de la matriz $I + A$.
 c) [1] Resuelva la ecuación matricial $X + AX = A$ expresando X en función de A .

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) www.ebaumatematicas.com c) $X = A$.

ORDINARIA 2025

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.

- a) [0,75] Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
 b) [0,25] Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).

- c) [1,5] Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} x - my = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + mz = 600 \end{array} \right\} \text{ b) El rango de la matriz de coeficientes es 3, al igual que el}$$

rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de $m > 0$. c) El sueldo de Darío es 300 euros, el de Hugo es 150 euros y el de José es 75 euros

1B) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

- b) [1,25] Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la traspuesta de A.

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXTRAORDINARIA 2024

- 1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.

Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Solución: Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

- 2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

- a) [1] Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

- b) [0,75] Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

- c) [0,75] Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Solución: a) La primera matriz es ortogonal y la segunda no lo es.

b) El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o -1. c) www.ebaumatematicas.com.

ORDINARIA 2024

- 1: [2,5] En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de

torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.

En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos
---------------------------	-----------------------------	----------------------

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución: *Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500.*

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) [1] Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) [0,75] Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) [0,75] Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t .

Solución: a) *La primera matriz si es una matriz de Hadamard y la segunda no lo es.*

b) *El determinante de una matriz de Hadamard vale 2 o -2.*

c) $|A| = \pm 2 \neq 0$. $A^{-1} = \frac{1}{2} A^t$.

EXTRAORDINARIA 2023

1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

- La suma de sus tres cifras es 9.
- Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.
- Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) [1,5 p.] Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).

b) [1 p.] Calcule el número en cuestión.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ z - x = -1 \\ -y + z = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Solución: a)} \\ \text{b) El número es el 504.} \end{array}$$

2: Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) [0,75 p.] Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible)

b) [0,75 p.] Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) [1 p.] Demuestre para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Solución: a) La matriz A no es invertible pues su determinante es nulo. b) La matriz A es 2-nilpotente. c) Los valores buscados son $a = -9$ y $b = -6$.

ORDINARIA 2023

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) [0,75 p.] Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) [0,25 p.] Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) [1 p.] Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) [0,5 p.] Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Solución: a) $\left. \begin{array}{l} z = 2x + 2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array} \right\}$ b) El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas

soluciones. No se puede determinar de forma única el valor de cada artículo con la información proporcionada.

c) $x = \frac{\lambda}{2}$; $y = \lambda$; $z = 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ d) El bolígrafo cuesta 3 €, el rotulador 6 € y la libreta 18 €.

2: Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 p.] Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a :

b) [1 p.] Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) [1 p.] Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de C .

Solución: a) La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0 y de -1 . b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ c) } X = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}$$

EXTRAORDINARIA 2022

1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las

dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución: En las Islas Caimán tiene 80 millones de euros, en Panamá 20 y en Fiji tiene 50 millones.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) [0,75 p.] Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022} .

b) [0,75 p.] Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) [1 p.] Determine para que valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución: a) $A^{2022} = A$ b) El determinante de A es 1. c) Los valores son $a = 0$ o $a = 1$ y $b = 0$ o $b = 1$.

ORDINARIA 2022

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución: La edad de Carmela es 26, la de Esperanza es 23 y la de Aurora es 19.

2: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 p.] Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023} .

b) [0,5 p.] Calcule la inversa de A .

c) [1 p.] Resuelva la ecuación matricial $AX - B^T = A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B .

Solución: a) $A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA 2021

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) [0,75 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

- a) El sistema tiene solución única para $a \neq -1$ y $a \neq 3$
 b) Para $a = -1$. Las soluciones son $x = -2t$; $y = t$, $z = -3t$.
 c) Para $a = 3$

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Si se denota por $\text{tr}(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A , compruebe que, para cualquier valor de a , se cumple la ecuación $A^2 = \text{tr}(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.
 b) [0.5 p.] Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).
 c) [1 p.] Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Solución:

- a) Se comprueba que es cierto.
 b) La matriz A es regular para cualquier valor de a distinto de -4 .
 c) $X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

ORDINARIA 2021

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

- a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,75 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

- a) Cuando $a \neq 1$ y $a \neq -1$.
 b) Cuando $a = -1$. $x = -\frac{3}{2}$; $y = t$; $z = \frac{5}{2} - t$
 c) Para $a = 1$

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1,5 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.
 b) [1 p.] Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C .

Solución: a) $|A| = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA 2020

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2z = -1 \\ -ax + a^2y - a^3z = 2 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) [0,5 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

Solución:

- a) $|A| = 0$, independientemente del valor de a y el rango de la matriz A nunca va a ser 3.
 b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.
 c) Para $a = 2$ las soluciones son $x = 1 - 2t$; $y = 1 + t$; $z = t$

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 .
 b) [1 p.] Calcule A^{2020} .
 c) [0,5 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

Solución:

- a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 b) $A^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
 c) $|A| = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

ORDINARIA 2020

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
 c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución: a) Para $a \neq 1$ y $a \neq -1$. Para $a = 0$ la solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = -1$.

b) Para $a = -1$. Las soluciones son $x = \frac{5}{2} + t$; $y = \frac{3}{2}$; $z = t$. c) No tiene solución para $a = 1$.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.
- b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Solución: a) $|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz A es regular. $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz B es regular.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \quad X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$$

SEPTIEMBRE 2019

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.
- b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$. Para $a = 2$ la solución es $x = 1; y = 0; z = 1$

b) Para $a = -1$. La solución es $x = \frac{1+3t}{-2}; y = \frac{-1+t}{2}; z = t$

c) Para $a = 1$

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- b) **[0,5 p.]** Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- c) **[1 p.]** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3 .

Solución: a) Cuando a es distinto de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

JUNIO 2019

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
- b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a) $a \neq 1; a \neq -2 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado. $a=0 \rightarrow$ La solución es $x = -1, y = 2, z = 1$

b) $a = -2 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado. La solución es $x = t, y = 1+t, z = t$.

c) para $a = 1$ el sistema es incompatible.

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4 .
- b) [0,5 p.] Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
- c) [1 p.] Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|A| = 1 \neq 0$. La inversa existe y vale $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SEPTIEMBRE 2018

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.
- b) [1,5 p.] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

Solución: a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A$ es regular $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

- a) [1,25 p.] Determine los valores del parámetro a para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial $(0, 0, 0)$.
- b) [1,25 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

Solución:

a) El sistema tiene una única solución $(0, 0, 0)$ cuando a es distinto de 0, 1 y 2.

b) La solución es $x=0$; $y=-2z$; $z=z$.

JUNIO 2018

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) [1,5 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .

b) [1 p.] ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$?

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \cdot n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

a) [1 p.] Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) [1,5 p.] Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

Solución:

a) El sistema no puede ser compatible determinado pues el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas.

b) $a=2$; La solución es $x = 4 - 2z$; $y = -z - 4$; $z = z$

SEPTIEMBRE 2017

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

Solución:

a) $|A| = |B| = 2 \neq 0$, por lo que las matrices A y B son invertibles.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b) X = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$$

- a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
- b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Para $a \neq 1, a \neq -2$ el sistema tiene una única solución

b) Para $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones. La solución es $x = \frac{1+6y}{3}; y = y; z = \frac{5+6y}{3}$

c) Para $a = 1$ el sistema no tiene solución.

JUNIO 2017

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = C$.

Solución:

a) $|A| = |B| = -4 \neq 0$. Por lo tanto, las matrices A y B son invertibles.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \quad b) \quad X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2z = a - 1 \end{cases}$$

- a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
- b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

Solución: a) $a \neq 1$ y $a \neq -1$ b) Para $a = 1$. La solución es $x = -z; y = 0; z = z$ c) $a = -1$

SEPTIEMBRE 2016

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) **[1 punto]** Calcule el determinante de A.
- b) **[1,5 puntos]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5 . Calcule A^{2016} .

Solución: a) $|A| = -1$ b) $A^2 = Id; A^3 = A; A^4 = Id; A^5 = A. A^{2016} = Id$

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

a) [1 punto] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución: a) -12 b) 6

JUNIO 2016

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A+B$.

Solución: a) $|A| = 6 \neq 0$, $|B| = -2 \neq 0$, la matriz A y B son invertibles. $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. b) $X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

a) [1 punto] Determine para qué valores del parámetro **a** el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para **a = 1**.

b) [1 punto] Determine para qué valor del parámetro **a** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) [0,5 puntos] Determine para qué valor del parámetro **a** el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Para $a \neq -1$ y $a \neq 0$ La solución del sistema cuando **a = 1** es $x = -2$, $y = 2$, $z = 1$

b) Para $a = 0$. La solución es $x = 5 - 3y$; $y = y$; $z = 0$

c) Para $a = -1$

SEPTIEMBRE 2015

CUESTIÓN A.1: Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) [1,25 puntos] Calcule $C = A^t \cdot A - B \cdot B^t$, donde A^t y B^t denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de A y B.
- b) [1,25 puntos] Halle una matriz X tal que $X \cdot C = D$, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es **idempotente** si cumple que $A^2 = A$.

- a) [0,5 puntos] Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2015} .
- b) [2 puntos] Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución: a) $A^{2015} = A$ b) $a=0$ o $a=1/2$ y $b=0$ o $b=1$.

JUNIO 2015

CUESTIÓN A.1:

- a) [1,5 puntos] Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

- b) [1 punto] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = -2$.

Solución:

- a) Para "a" distinto de 1 y -2 el Sistema es Compatible Determinado. Para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado. Para $a=-2$ el sistema es compatible indeterminado.
- b) La solución es $x = \lambda$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es **involutiva** si cumple que $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

- a) [0,5 puntos] Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).
- b) [2 puntos] Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es involutiva

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución: a) Se cumple que la inversa de la matriz A es ella misma y por tanto tiene inversa y es regular. b) $a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ o $b = \pm 1$

SEPTIEMBRE 2014

CUESTIÓN A.1:

- a) [1,25 puntos] Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.
- b) [1,25 puntos] Resuelva la ecuación matricial $AXA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

Solución:

- a) $|A| = -1 \neq 0$, la matriz es regular. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) La solución es $X = \begin{pmatrix} 68 & 25 \\ -49 & -18 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1:

- a) [1,5 puntos] Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro **a**:

$$\left. \begin{array}{l} ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

- b) [1 punto] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 0$.

Solución:

- a) Si $a = 3$ El sistema es incompatible. Si $a = 0$ El sistema es compatible indeterminado.

Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado.

- b) Para $a=0$ el sistema es compatible indeterminado. La solución es $x=\lambda$; $y=\lambda$; $z=0$

JUNIO 2014

CUESTIÓN A.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de

Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [1 punto] b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$ [1,5 puntos]

Solución: a) -6

b) 8

CUESTIÓN B.1:

- a) [1,5 puntos] Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro **a**:

$$\begin{cases} ax + 3y + z = a \\ x + ay + az = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- b) [1 punto] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = -1$.

Solución:

a) Para $a \neq -1$, $a \neq 2$ el sistema es Compatible Determinado

Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

b) La solución del sistema es $x = x$; $y = 0$; $z = -1 + x$

SEPTIEMBRE 2013

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos] Clasifique y resuelva, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 4x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solución:

El sistema es Compatible Indeterminado. La solución del sistema es $x = \frac{1-z}{2}$; $y = 0$; $z = z$

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) [1,25 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

Solución: a) -2 b) 2

JUNIO 2013

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos] Discuta, en función del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - ay + z = 1 \\ ax + y + z = 4 \end{cases}$$

No hay que resolverlo en ningún caso.

Solución:

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$ el sistema es Incompatible.

Si $a = -1$ el sistema es Compatible Indeterminado.

CUESTIÓN B.1:

a) [1,25 puntos] Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, es regular (o inversible) y calcule su matriz inversa.

b) [1,25 puntos] Resuelva la ecuación matricial $AX + A^2 = B$, siendo A la matriz anterior y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo.

Solución: a) $|A| = -1 \neq 0$, luego tiene inversa $\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$

SEPTIEMBRE 2012

CUESTIÓN A.1:

a) [1,25 puntos] Determine para qué valores del parámetro a el conjunto de vectores

$S = \{(1, a, 1), (1 - a, a - 1, 0), (1, 1, a)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.

b) [1,25 punto] Estudie el rango del conjunto de vectores S en los casos en que no forme una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ si forman una base de $\mathbb{R}^3$

b) Si $a = 1$ el rango de la matriz S es 1. Si $a = -2$ el rango es 2.

CUESTIÓN B.1:

a) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule las potencias A^2 , A^3 y A^4 .

b) [1,25 puntos] Calcule A^{2012} .

Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^4 = -A \quad b) A^{2012} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2012

CUESTIÓN A.1:

a) [1,5 puntos] Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + a^2z = -1 \\ ax + a^2y + a^3z = 2 \end{cases}$$

b) [1 punto] Resuelva el sistema cuando sea compatible.

Solución:

a) Cuando $a = -2$ el sistema es Compatible Indeterminado. Cuando $a \neq -2$ el sistema es Incompatible

b) Cuando $a \neq -2$ la solución del sistema es $x = 1 - 2\lambda$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$

CUESTIÓN B.1: [2,5 puntos]

Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonal** si cumple que $A^t \cdot A = I$, donde I denota la matriz identidad y A^t es la traspuesta de A .

Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es ortogonal

$$\begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $a = \pm\sqrt{0'5}$ y $b = 0$

SEPTIEMBRE 2011

CUESTIÓN A.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, calcule, sin utilizar la regla de Sarrus, el valor del

siguiente determinante, indicando en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} + 3a & \frac{y}{2} + 3b & \frac{z}{2} + 3c \end{vmatrix} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

Solución: 15

CUESTIÓN B.1:

a) Determine para qué valores del parámetro a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

es regular. [1.25 puntos]

b) Estudie el rango de la matriz A en los casos en que no sea regular. [1.25 puntos]

Solución:

a) Para todo a distinto de 0, 1 y -1

b) Para $a = 0$ el rango de A es 2. Para $a = 1$ el rango de A es 1. Para $a = -1$ el rango es 1.

JUNIO 2011

CUESTIÓN A.1: Demuestre, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

Indique en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

[2.5 puntos]

Solución: La 3ª columna se obtiene como la suma de la 1ª y 2ª columna, por tanto el determinante es 0.

CUESTIÓN B.1: Discuta, en función de los parámetros a y b , el siguiente sistema de ecuaciones.

No hay que resolverlo. [2.5 puntos]

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{array} \right\}$$

Solución:

Para $a \neq 2$ el sistema compatible determinado. Para $a = 2$ y $b \neq 5$ el sistema es incompatible.

Para $a = 2$ y $b = 5$ el sistema es compatible indeterminado.

SEPTIEMBRE 2010

CUESTIÓN A.1: Definición de rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro k. [2.5 puntos]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Solución: $k \neq -1 \rightarrow$ el rango de A es 3 $k = -1 \rightarrow$ El rango de A es 2

CUESTIÓN B.1: Discutir y resolver el sistema siguiente en función de los posibles valores del parámetro k. [2.5 puntos]

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 0 \\ -2x - 4z = 0 \\ x - y + z = k \end{array} \right\}$$

Solución: $k \neq 0$ El sistema es incompatible. $k = 0$ El sistema es compatible indeterminado.

$x = -2z; y = -z; z = z$

JUNIO 2010

CUESTIÓN A.1: Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A. [2.5 puntos]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $|A| = -1 \neq 0$ y por tanto tiene inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B.1: Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius. Aplicar dicho teorema para discutir si el sistema siguiente tiene solución y si la solución es única en función de los posibles valores del parámetro k (no es necesario resolver el sistema). [2.5 puntos]

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = k \\ 3x - 3y = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

Solución: El sistema es incompatible para $k = -1$. El sistema es compatible determinado para $k \neq -1$.