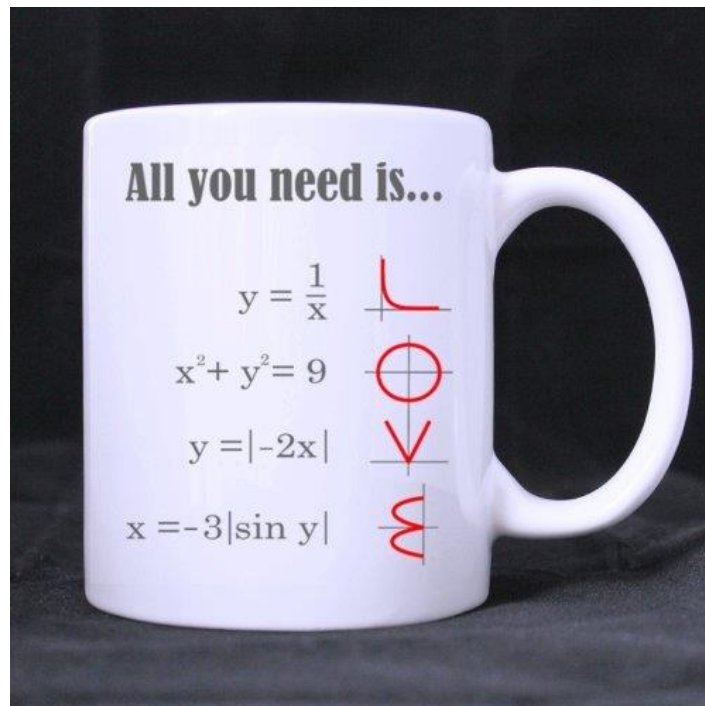




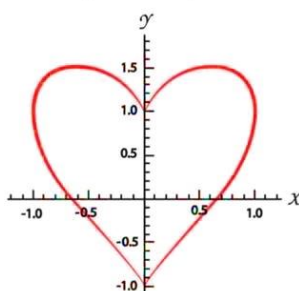
www.ebaumatematicas.com

Tema 7. Límites y continuidad de funciones.	5
1. Límite de una función cuando $x \rightarrow a$ (en un punto)	5
1.1. Cuestiones previas	5
1.2. Idea inicial de límite de una función en un punto (cuando $x \rightarrow a$).	10
1.3. Definición de límite de una función en un punto	12
1.4. Límites laterales	12
2. Cálculo práctico de límites	14
2.1. Casos inmediatos	14
2.2. Algunas propiedades de las operaciones con límites	14
2.3. Indeterminaciones	15
2.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow a$. Indeterminación $\frac{0}{0}$	16
2.5. El caso $\frac{k}{0}$	17
2.6. La indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones con raíces	18
3. Límite de una función cuando $x \rightarrow \infty$ (en el infinito)	19
3.1. Límite finito de una función cuando $x \rightarrow \infty$	20
3.2. Límite infinito de una función cuando $x \rightarrow \infty$	20
3.3. Límite de una función polinómica en el infinito	21
3.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow \infty$. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$	21

3.5. La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en funciones con raíces	23
3.6. La indeterminación 1^{∞} . El número e	24
3.7. Comportamiento de otras funciones en el infinito	25
3.8. La indeterminación de la forma $\infty - \infty$	27
3.9. La indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$	28
4. Continuidad de una función en un punto	29
4.1. Funciones continuas.	29
5. Resumen de operaciones con expresiones infinitas	32
 Ejercicios	33
 Cálculo de límites por métodos algebraicos	33
 Continuidad	35
Tema 8. Derivadas.	37
1. Derivada de una función en un punto	38
1.1. Definición	38
1.2. Interpretación geométrica de la derivada (recta tangente a la función)	38
1.3. Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.	40
2. Función derivada	41
2.1. Derivada de algunas funciones	41
3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones	42
4. Fórmula de la función derivada de las funciones usuales	44
4.1. Derivada de potencias y raíces	44
4.2. Derivada de las funciones logarítmicas	45
4.3. Derivada de las funciones exponenciales	46
4.4. Derivada de las funciones trigonométricas	46
4.5. Derivada de las funciones trigonométricas inversas	46
4.6. Tabla de la derivada de las funciones usuales	47
4.7. Derivadas sucesivas	48
5. Aplicación al cálculo de límites. Regla de L' Hôpital	49
5.1. Regla de L' Hôpital para resolver la indeterminación $\frac{0}{0}$	50
5.2. Regla de L' Hôpital para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$	50
6. Aplicación de la derivada para el estudio de la variación de una función	51
6.1. Crecimiento y decrecimiento	51
6.2. Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura: concavidad, convexidad, inflexión	54
7. Optimización de funciones. Problemas de optimización	57
7.1. Planteamiento y resolución de un problema de optimización	57
 Ejercicios:	59
 Tangente a una curva	59
 Cálculo de derivadas	60

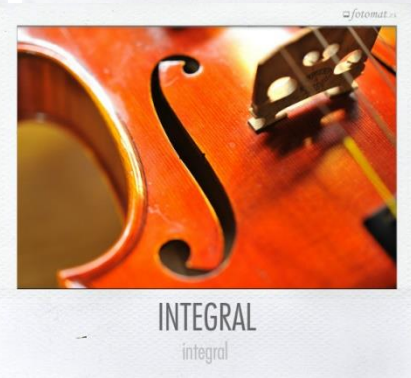
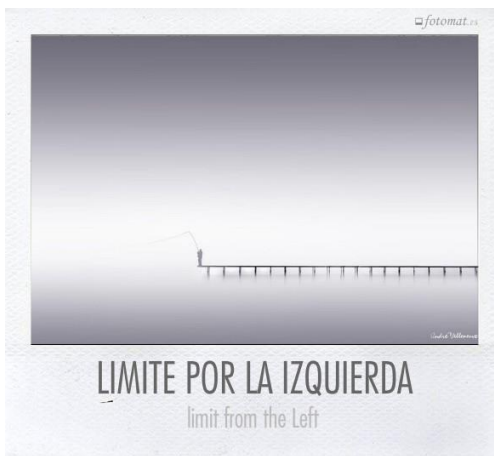
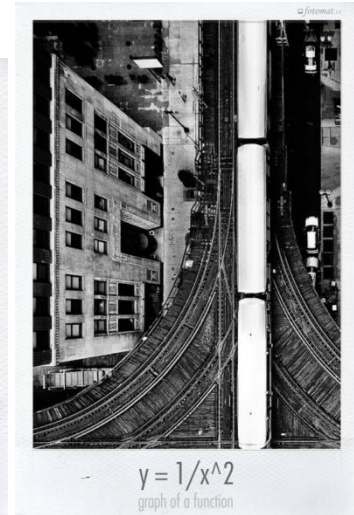
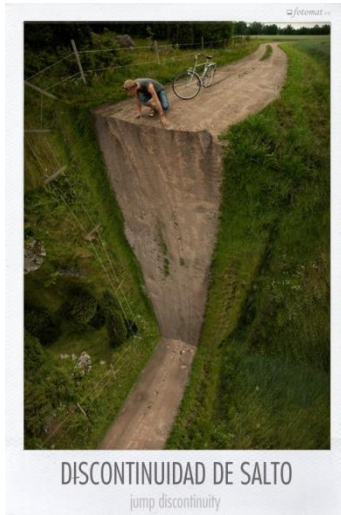
	Cálculo de límites aplicando la regla de L`Hôpital.....	60
	Crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión.....	62
	Problemas de optimización	63
	Tema 9. Integrales	66
	1. Concepto de integral indefinida	66
	1.1. Primitiva de una función.....	66
	1.2. Integral indefinida	67
	1.3. Propiedades de la integral indefinida	68
	2. Relación de integrales inmediatas.....	69
	3. Técnicas y métodos de integración.....	70
	3.1. Descomposición elemental	70
	3.2. Método de integración por partes.....	71
	3.3. Integración por cambio de variable.....	74
	4. Integral definida: área bajo una curva	76
	4.1. Propiedades de las integrales definidas.....	79
	4.2. Regla de Barrow	80
	4.3. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos	81
	Ejercicios:	88
	Integrales indefinidas	88
	Integrales definidas y áreas.....	89
	Ejercicios de Análisis en pruebas EBAU y PAU de Murcia	93

$$x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$$



*Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo
ebaumatematicas@gmail.com*

Veo matemáticas por todas partes. Y tú, ¿también la ves?



Tema 7. Límites y continuidad de funciones.



1. Límite de una función cuando $x \rightarrow a$ (en un punto)

1.1. Cuestiones previas

Una **función** real de variable real:

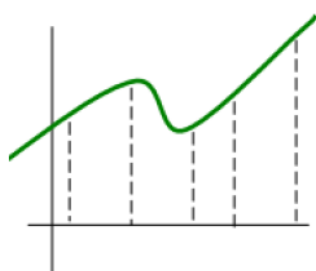
$$f : \text{Dom}f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \text{Rec}f \subset \mathbb{R}$$

es una relación que a cada elemento x de un subconjunto de $\mathbb{R}$ ($\text{Dom}f$) le asigna un único elemento y de un subconjunto de $\mathbb{R}$ ($\text{Rec}f$).

A las magnitudes que intervienen en una función se les llama **variables**. Una de ellas es la **variable independiente** y la otra, cuyos valores se deducen (dependen) de los valores de la primera, se llama **variable dependiente**.

La variable independiente se designa por x y sus valores son representados en el eje horizontal (eje de abscisas). La variable dependiente se designa por y y sus valores son representados en el eje vertical (eje de ordenadas).

La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$, con $x \in \text{Dom}f$.

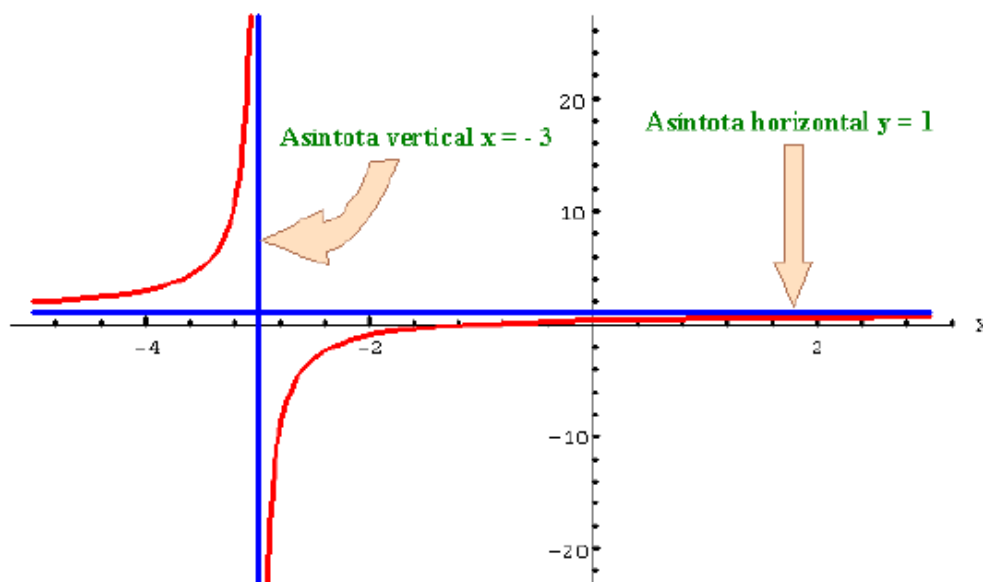


SI ES UNA FUNCIÓN



NO ES UNA FUNCIÓN

Una función se puede describir verbalmente, con una tabla de valores, dando su gráfica, o por medio de su fórmula o expresión algebraica.



DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN.

Al conjunto de todos los valores x que tienen imagen, se llama **dominio de f** ($\text{Dom}f$).
El conjunto de todas las imágenes se llama **recorrido de f** ($\text{Rec}f$).

Si $a \in \text{Dom}f \Rightarrow a$ tiene imagen $\Rightarrow$ el punto $(a, f(a))$ está en la gráfica de f y ningún otro punto de abscisa a está en la gráfica de f (puesto que a solo tiene una imagen).

Si $a \notin \text{Dom}f \Rightarrow a$ no tiene imagen $\Rightarrow$ no hay ningún punto de la gráfica de f cuya abscisa sea $a \Rightarrow$ la gráfica de f no cruza la recta vertical $x = a$.

Si $b \notin \text{Rec}f \Rightarrow$ no existe a del dominio cuya imagen sea $b \Rightarrow$ no hay ningún punto de la gráfica de f cuya ordenada sea $b \Rightarrow$ la gráfica de f no cruza la recta horizontal $y = b$.

El dominio de una función puede estar determinado:

- por la definición de la función,
- por la propia naturaleza de la magnitud cuyas cantidades son los valores de la variable independiente, o
- por las operaciones que aparecen en la expresión algebraica de la función, que pueden no estar definidas para ciertos valores.

Dominios de algunos modelos de funciones:

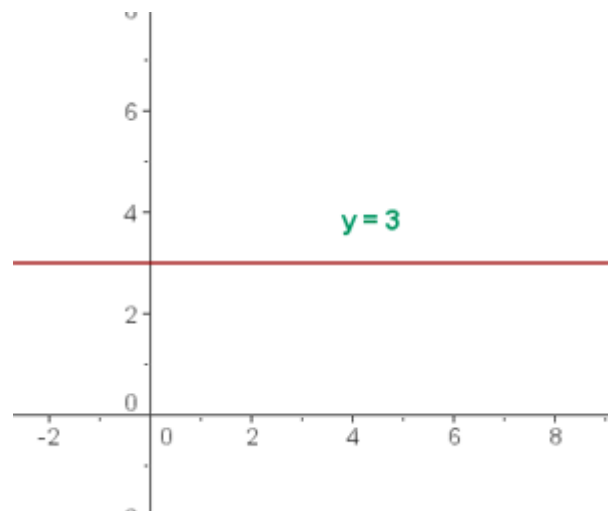
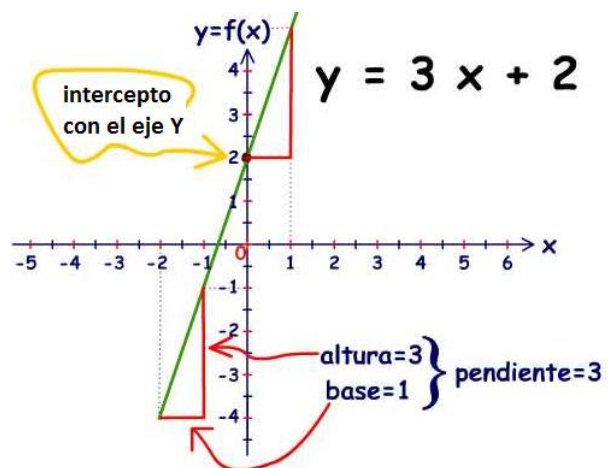
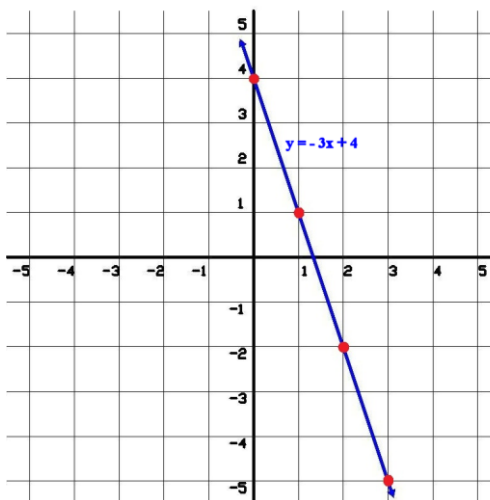
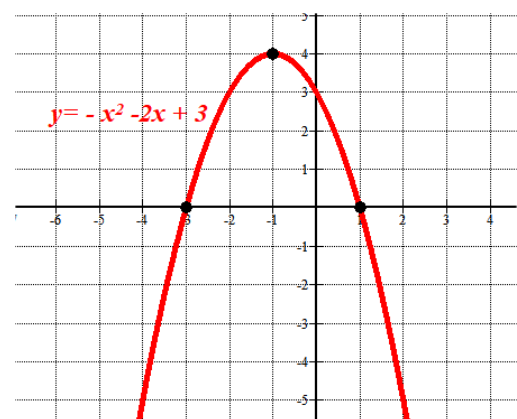
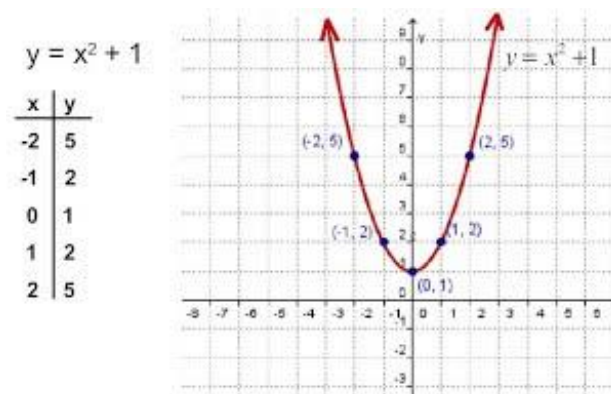
Las funciones polinómicas ($y = 3x^4 - 5x^2 + x - 2$), las exponenciales (a^x), las trigonométricas ($\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{arctg}x$), las radicales de índice impar ($\sqrt[n]{x}$ con n impar), están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Las funciones racionales ($f(x) = \frac{x-2}{x+2} \rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2\}$) tienen como dominio todos los reales

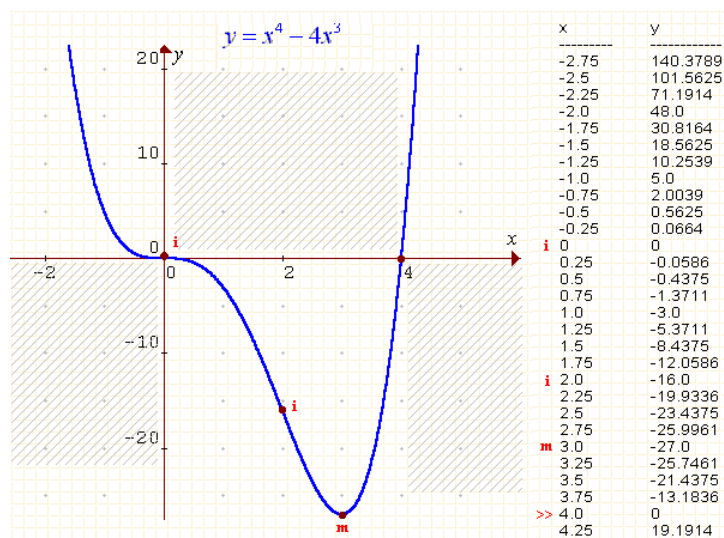
salvo los valores que anulan el denominador, las funciones radicales de índice par ($f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \text{Dom} = [0, +\infty)$) tienen como dominio los valores que hacen positivo o cero el radicando y las logarítmicas ($f(x) = \log(x-1) \rightarrow \text{Dom} = (1, +\infty)$) los valores que hacen positiva la expresión contenida en el logaritmo.

GRÁFICAS DE ALGUNOS MODELOS FUNCIONALES.

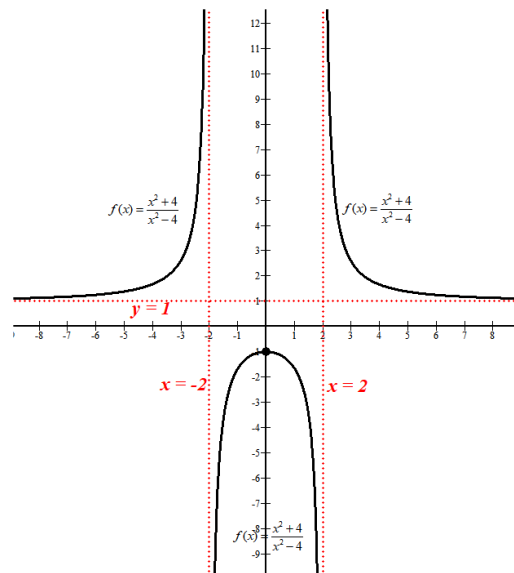
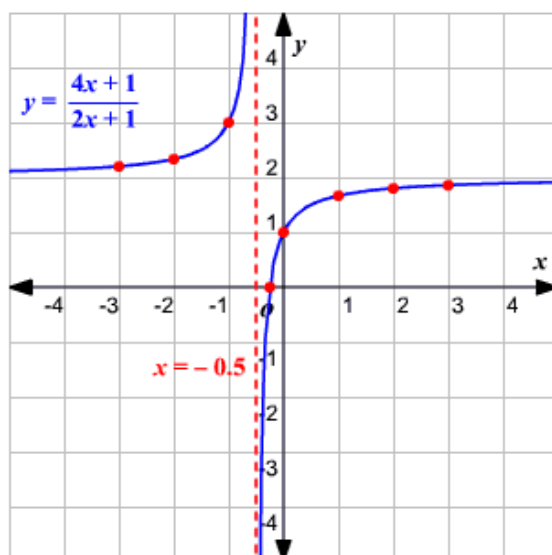
Funciones polinómicas

De grado 0 → La recta horizontal. $y = c$ De grado 1 → La recta oblicua. $y = bx + c$ De grado 2 → La parábola. $y = ax^2 + bx + c$ 

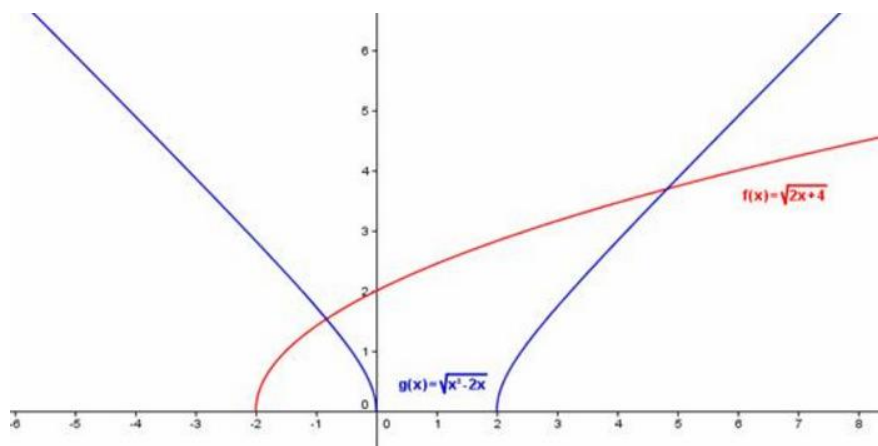
De grado mayor que 2 $\rightarrow y = x^4 - 4x^2$

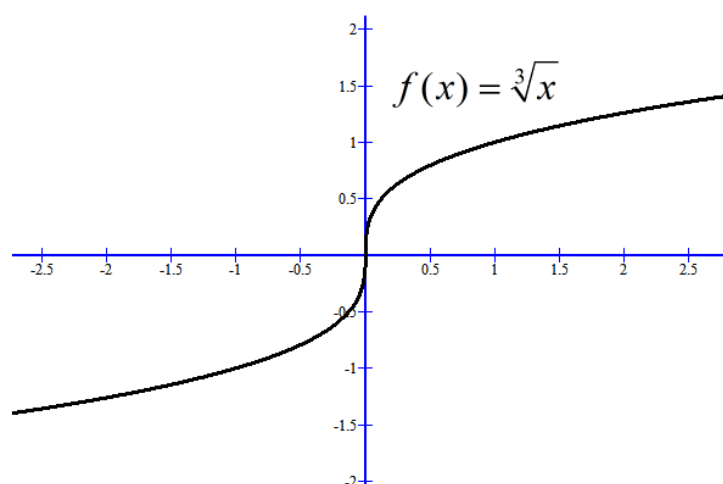


Funciones racionales



Funciones radicales

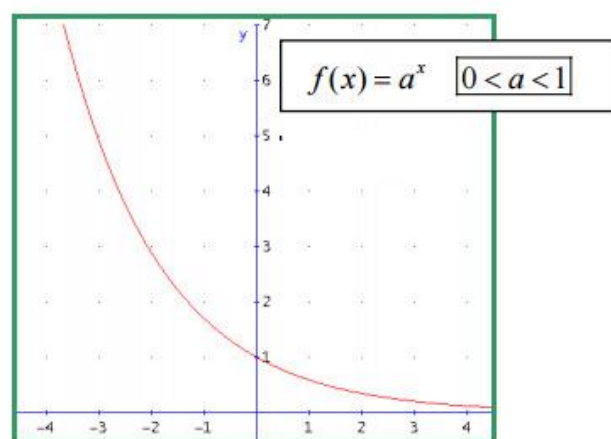
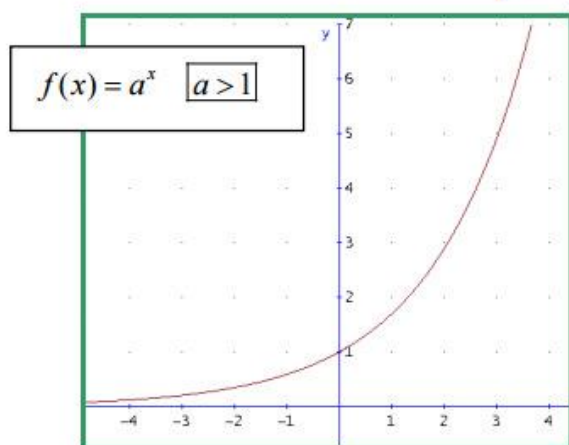




Función exponencial

$$y = f(x) = a^x$$

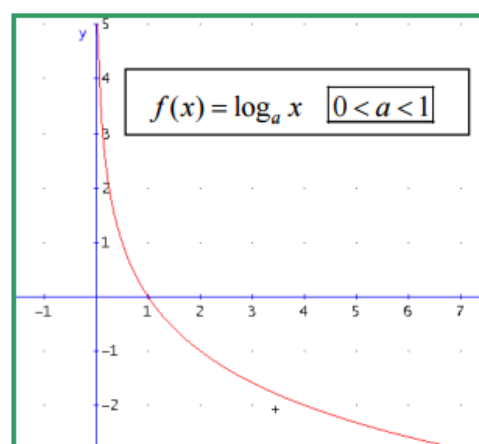
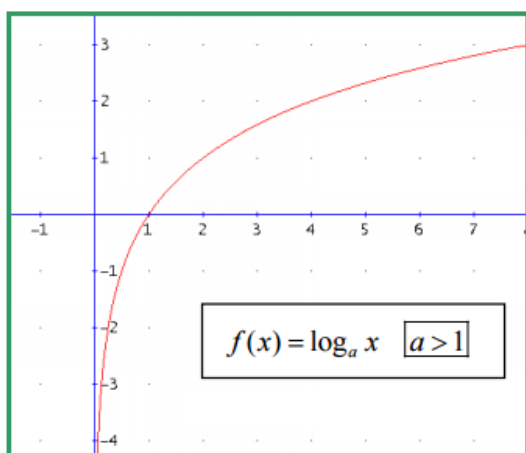
Función exponencial



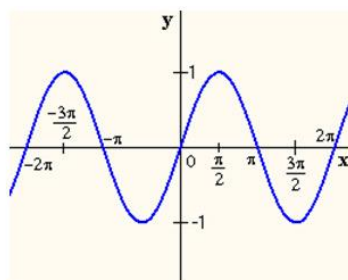
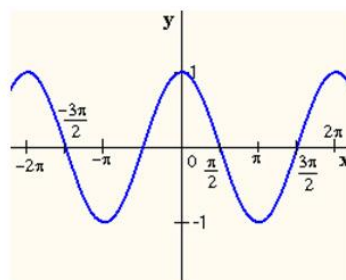
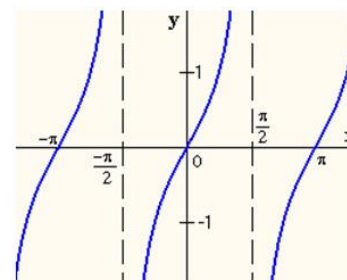
Función logarítmica

$$y = f(x) = \log_a x$$

Función logarítmica

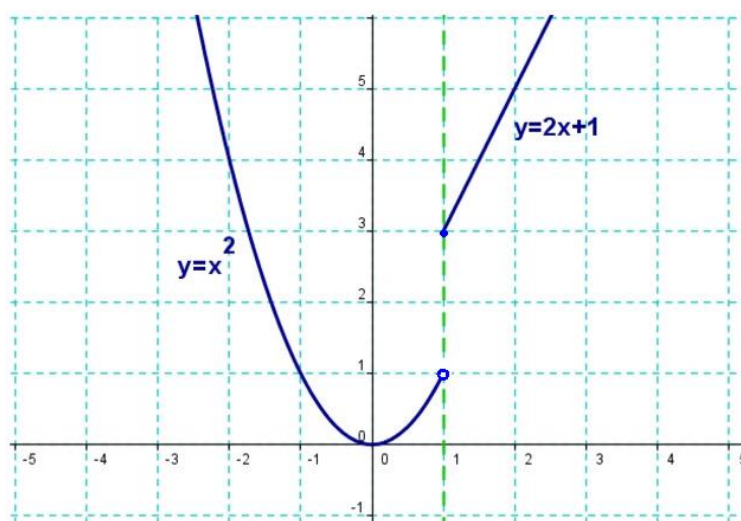


Función trigonométrica

 $y = \text{sen } x$  $y = \cos x$  $y = \tan x$

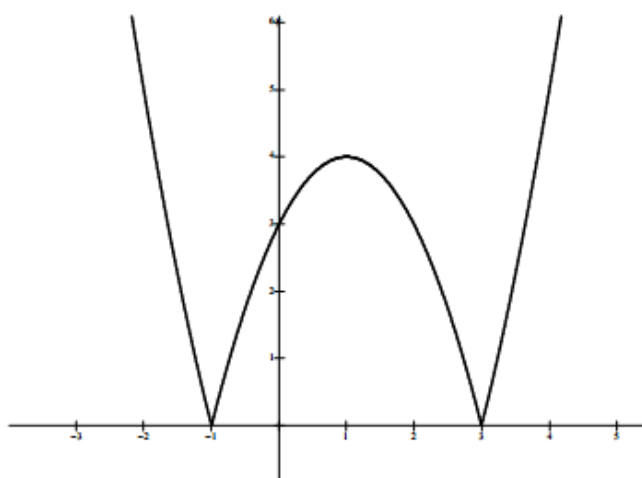
Función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Función valor absoluto

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



1.2. Idea inicial de límite de una función en un punto (cuando $x \rightarrow a$).

Si una función f está definida para todos los valores de x próximos a a , aunque no necesariamente en el mismo a , entonces, se dice que el límite de $f(x)$ vale L , cuando x tiende a a , si el valor de $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a .

Se escribe así:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{Se lee: } f(x) \text{ tiende a } L \text{ cuando } x \text{ tiende a } a.$$

Si una función $f(x)$ no tiende a ningún número concreto, cuando x tiende a a , se dice que no tiene límite cuando x tiende a a .

Ejemplos:

Usando la calculadora puede estudiarse el límite, cuando x tiende a 2, de las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $g(x) = \frac{3}{x-2}$ c) $h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

Para ello, en todos los casos, se darán a x valores próximos a 2 y se calcularán los valores que toma la respectiva función.

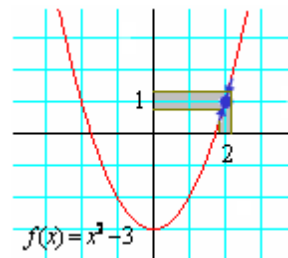
a) Para $f(x) = x^2 - 3$

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$f(x) = x^2 - 3$	0,61	0,9601	0,996001	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,004001	1,0401	1,41

Tanto para valores menores que 2 como para mayores que 2 (en ambos casos próximos a 2), la función toma valores muy próximos a 1.

En este caso se escribe, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$.

Observa que la función está definida en $x = 2$ y que el límite coincide con $f(2)$.



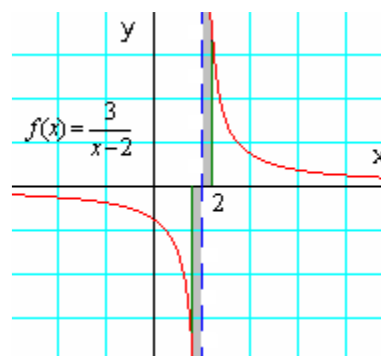
b) Para $g(x) = \frac{3}{x-2}$

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$g(x) = \frac{3}{x-2}$	-30	-300	-3000	¿?	3000	300	30

Para valores cercanos y menores que 2, la función toma valores grandes y negativos; para valores cercanos y mayores que 2, la función toma valores cada vez más grandes.

En este caso, no existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$

Observa que la función no está definida en $x = 2$ y que tampoco tiene límite en ese punto.



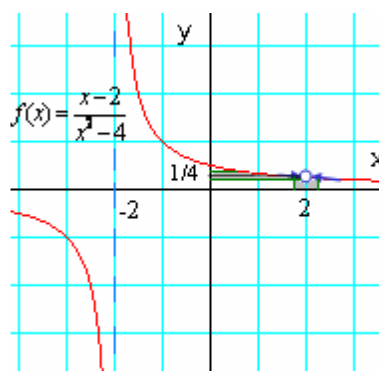
c) Para $h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$	0,2564	0,2506	0,25006	$\rightarrow 0,25 \leftarrow$	0,24994	0,2494	0,2439

Para valores próximos y menores que 2, la función se acerca cada vez más a 0,25; y lo mismo hace para valores próximos y mayores que 2.

En este caso, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$

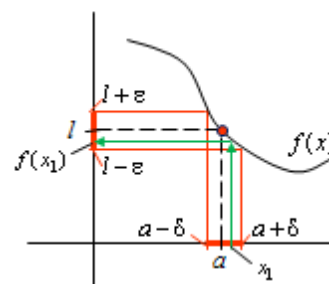
Observa que la función no está definida en $x = 2$ y sin embargo tiene límite en ese punto.



1.3. Definición de límite de una función en un punto

A la vista de los ejemplos anteriores, se concluye:

- 1) Para la existencia del límite de una función en un punto a no importa que la función esté o no definida en ese punto.
- 2) Lo que importa son los valores que toma la función en un entorno de ese punto a .
- 3) Existirá el límite, y su valor será L , cuando todos los puntos próximos a a se transformen, mediante la función, en puntos próximos a L . Esto es, si x_1 está cerca de a , entonces $f(x_1)$ está cerca de L .



O con más precisión:

Existirá el límite de $f(x)$, cuando $x \rightarrow a$, y su valor será L , si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

1.4. Límites laterales

En la definición de límite no se distingue entre las posibilidades de que x se aproxime a a con valores mayores o menores que a . No obstante, algunas veces conviene distinguir si $x \rightarrow a$ por la izquierda (siendo $x < a$), que se escribe $x \rightarrow a^-$, o si $x \rightarrow a$ por la derecha (siendo $x > a$), denotado por $x \rightarrow a^+$.

Esta distinción da lugar al estudio de los límites laterales.

- A $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda.
- A $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ se le llama límite lateral por la derecha.



Observación:

Este estudio tiene interés cuando:

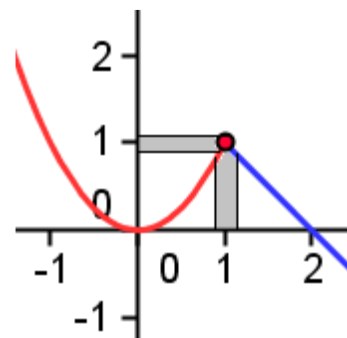
- 1) La función está definida a trozos y se quiere calcular el límite en alguno de los puntos de unión de los diferentes trozos.
- 2) La función tiene asíntotas verticales y se quiere determinar la posición de la curva respecto a ellas.

Pues bien, para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los límites laterales y que sean iguales. Esto es, para que exista es necesario que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Ejemplos:

- a) Para estudiar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$ es necesario considerar los límites laterales.

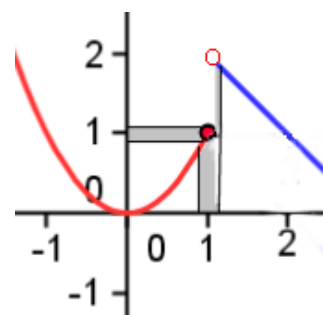
- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1$



Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

- b) Para estudiar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$ es necesario considerar los límites laterales.

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + x) = 2$



Como ambos límites no coinciden, no existe el límite.

2. Cálculo práctico de límites

2.1 Casos inmediatos

Si $f(x)$ es una función usual (polinómicas, racionales, logarítmicas, etc.) y está definida en el punto $x = a$, suele cumplirse que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Esto es, el límite se resuelve sustituyendo el valor **a** en la función.



Observaciones:

- 1) Que la función pueda evaluarse en $x = a$ no es determinante para que exista el límite.
- 2) No obstante, lo primero que debe hacerse para calcular un límite es sustituir x por **a**. Si existe $f(a)$ y la función no está definida a trozos, se aceptará que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- 3) Las funciones que cumplen que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, se llaman **continuas**.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} 2^{x+3} = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} (\ln(x^2 - 2)) = \ln(3^2 - 2) = \ln 7$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

g) Esto no es así en el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ ya que al sustituir obtenemos $\frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ que no es una operación válida. No podemos calcular este límite de forma tan sencilla como hemos calculado los anteriores.

2.2. Algunas propiedades de las operaciones con límites

En relación con las operaciones algebraicas pueden aplicarse las siguientes propiedades.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = n$, siendo m y n finitos, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \pm n$

“El límite de una suma es igual a la suma de los límites.”

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = m \cdot n$

“El límite de un producto es igual al producto de los límites”

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{m}{n}$$

“El límite de un cociente es igual al cociente de los límites”. Siendo n un valor no nulo.

$$4. \text{ Si } f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = m^n$$

“El límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al límite del exponente”

$$5. \text{ Si } f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(\log_c f(x) \right) = \log_c \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \log_c m$$

“El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite”

2.3. Indeterminaciones

Hay siete casos en los que al sustituir el valor $x = a$ en la función dada se llega a situaciones extrañas, no definidas, que reciben el nombre de **indeterminaciones**: formas indeterminadas.

Escritas esquemáticamente, estas 7 indeterminaciones son:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^\infty \quad 0 \cdot \infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$



Observaciones:

- 1) Cuando en estas expresiones se escribe 0 quiere significar que se está ante un valor tan pequeño como se quiera (infinitesimal). El concepto matemático que lo define es el de infinitésimo. Así, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Por tanto, la indeterminación $\frac{0}{0}$ es el cociente de dos infinitésimos. Surge si se plantea un

límite como el siguiente: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$; esto es, cuando $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos en el punto $x = 2$.

Igualmente, en las demás indeterminaciones, cada vez que se escribe 0 se está diciendo que la función es un infinitésimo en el punto en cuestión.

- 2) Análogamente, cuando se escribe 1 se quiere indicar una expresión que tiende a 1, que toma los valores 0,999... o 1,000..., sin que necesariamente tome nunca el valor 1.
- 3) Por último, cuando se escribe ∞ se quiere significar que la expresión toma valores tan grandes como se quiera: mayores (en valor absoluto) que cualquier número dado.

Ejemplos:

En los límites siguientes, al sustituir, aparecen las formas que se indican.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{8}{x-2} \right) = \infty - \infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1^{+\infty}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \frac{1}{x^2-4} = 0 \cdot \infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$

Algunas veces estas formas indeterminadas pueden resolverse. Los métodos de resolución están muy estudiados y se concretan en los siguientes procedimientos:

- 1) Algebraicos. Consisten en aplicar las propiedades de las operaciones con límites y, cuando estas sean insuficientes, recurrir a transformaciones algebraicas en la función dada: simplificar, extraer factor común, sumar o restar, operar con potencias y raíces, con logaritmos, ...

Se aplicará este método en límites de los tipos: $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\infty - \infty$ 1^∞ $0 \cdot \infty$

- 2) Regla de L'Hôpital, dando así entrada al cálculo infinitesimal. Se verá con las derivadas. Con este método se resolverán las 7 formas indeterminadas.

2.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow a$. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. El único caso de límite no inmediato es cuando da lugar a la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Esto es, cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$. Este caso puede resolverse factorizando los polinomios y simplificando la expresión inicial.

Ejemplo:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ no resulta inmediato ya que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$. Puede resolverse así:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación)}$$

Factorizamos el polinomio $x^2 - 4$, realizando la división por Ruffini con el número 2 al que tiende x .

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

Utilizando el resultado obtenido terminamos de resolver el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2.5. El caso $\frac{k}{0}$

Cuando al hacer cualquier límite aparezca la expresión $\frac{k}{0}$, se pondrá que el valor de ese límite es infinito (∞). Esto significa que, aunque el límite no existe, el valor de la función se hace tan grande como se quiera, infinitamente grande. En estos casos es conveniente estudiar los límites laterales en el punto, pues con frecuencia se obtienen signos distintos para el infinito.



Observación:

Cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$: la recta $x = a$.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0} = \pm\infty$. Si estudiamos los límites laterales:

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} &= (\text{probamos con } 1,9) \frac{\text{positivo}}{\text{negativo}} = -\infty \\ - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} &= (\text{probamos con } 2,1) \frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = +\infty \end{aligned}$$

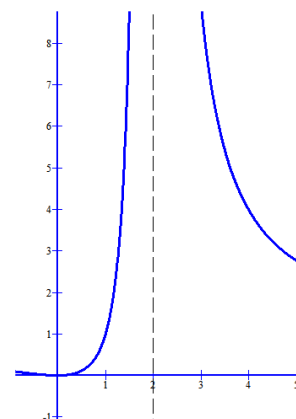


No coinciden los límites laterales, son infinito pero de signo distinto. En estos límites se puede decir que no existen $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \nexists$ o que vale $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \pm\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2-4x+4} = \frac{4}{0} = \pm\infty$. Si estudiamos los límites laterales:

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2-4x+4} &= (\text{probamos con } 1,9) \frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = +\infty \\ - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2-4x+4} &= (\text{probamos con } 2,1) \frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = +\infty \end{aligned}$$

Coinciden los límites laterales y el límite es $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2-4x+4} = +\infty$



**Ejercicios:**

Calcula el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x} =$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x^4} =$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} =$

Solución: a) -2

b) $5/6$

c) $\pm\infty$

d) $+\infty$

e) $\pm\infty$

**Observación:**

Es frecuente confundir $\frac{k}{0}$ y $\frac{0}{k}$. ¿Está clara la diferencia?. $\frac{0}{k} = ?$

2.6. La indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación $\frac{0}{0}$ suele resolverse multiplicando y dividiendo la función dada por la expresión conjugada de alguno de sus términos. A continuación, se opera y simplifica.

**Observaciones:**

Como las funciones con radicales de índice par no están definidas para valores negativos del radicando habrá que tenerlo en cuenta al plantear y resolver los límites. Así, por ejemplo, el

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ sólo puede plantearse por la derecha de $x = 3$, pues $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ no está

definida cuando $x \rightarrow 3^-$. Por tanto, este límite habría que plantearlo así: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ y su valor sería ∞ .

Ejemplos:

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4} &= \frac{0}{0} [\text{Indeterminación}] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}{(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^2 - (\sqrt{x})^2}{(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)}{(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{2 + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{-1}{4}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x^2 - 1} &= \frac{0}{0} [\text{Indeterminación}] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \\ &= \frac{0}{0} [\text{Indeterminación}] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x + 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

**Ejercicios:**

Calcula el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x+9}}{x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x}}{3 - x} =$

Solución: a) $-\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

3. Límite de una función cuando $x \rightarrow \infty$ (en el infinito)

Antes de estudiar estos límites conviene recordar algunos resultados de las operaciones relacionadas con el infinito.

$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$[\infty - \infty]$ es indeterminado.
$+\infty \pm k = +\infty$	$-\infty \pm k = -\infty$	
$(+k) \cdot (+\infty) = +\infty$	$(-k) \cdot (+\infty) = -\infty$	$[0 \cdot \infty]$ es indeterminado.
$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$	$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$	

$\frac{+\infty}{\pm k} = \pm\infty$	$\frac{\pm k}{\infty} = 0$	$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ es indeterminado.
$\infty^{(+k)} = \infty$	$\infty^{(-k)} = 0$	
$k^{+\infty} = +\infty$; si $k > 1$	$k^{+\infty} = 0$; si $0 < k < 1$	
$k^{-\infty} = 0$; si $k > 1$	$k^{-\infty} = +\infty$; si $0 < k < 1$	$\left[1^{\infty}\right]$ es indeterminado.

En todos los casos $+k$ indica un número positivo fijo y $-k$ indica uno negativo.

3.1. Límite finito de una función cuando $x \rightarrow \infty$

Pongamos un ejemplo de esta situación.

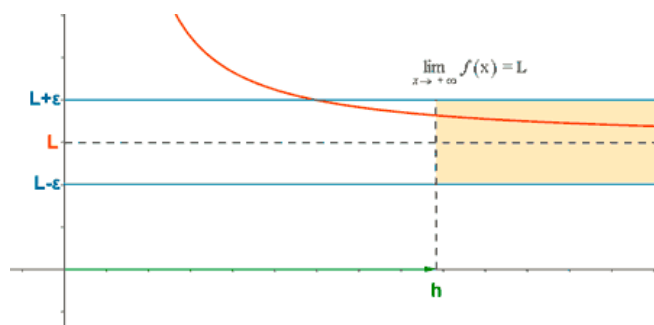
La función $f(x) = \frac{2x-1}{x+8}$ tiende a 2 cuando $x \rightarrow +\infty$.

Efectivamente, si $x = 1000 \rightarrow f(1000) = 1,983$; si $x = 10000 \rightarrow f(10000) = 1,9995$;...

Se escribe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+8} = 2$

La definición precisa es la siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 / \forall x > h \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



3.2. Límite infinito de una función cuando $x \rightarrow \infty$

La función $f(x) = x^2 - 1$ toma valores cada vez más grandes cuando $x \rightarrow +\infty$. Efectivamente, $f(100) = 9999$, $f(1000) = 999999$,

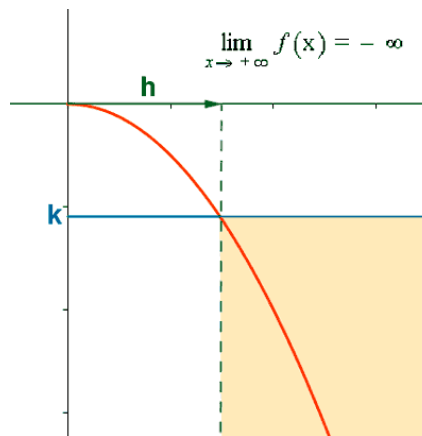
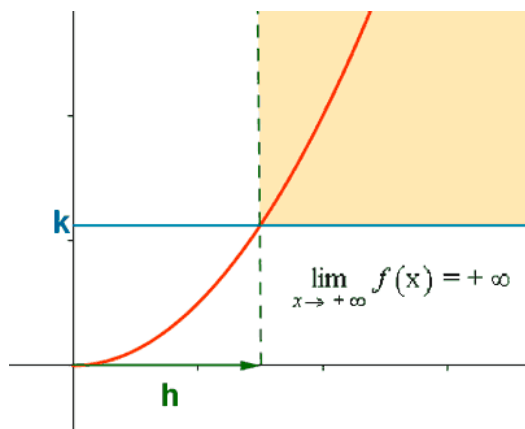
Se escribe: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$

La función $f(x) = -x^2 + 1$ toma valores cada vez más pequeños cuando $x \rightarrow +\infty$. Efectivamente, $f(100) = -9999$, $f(1000) = -999999$,

Se escribe: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 1 = -\infty$

La función $f(x) = x^3 - 3$ toma valores cada vez más pequeños cuando $x \rightarrow -\infty$. Efectivamente, $f(-100) = -999997$, $f(-1000) = -999999997$,

Se escribe: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3 = -\infty$



3.3. Límite de una función polinómica en el infinito

Si $P(x)$ es un polinomio de cualquier grado, se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (+\infty)^n = \pm\infty$$

El signo $+\infty$ o $-\infty$ depende del coeficiente de monomio de mayor grado del polinomio, aplicando en todos los casos las reglas de los signos.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 3) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 4x - 3) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 4x - 3) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 300x^3 + x - 2) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 300x^3 + x - 2) = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 - 300x^3 + x - 2) = -\infty$

3.4. Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow \infty$. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, al calcular $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendría la expresión indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; no obstante se resuelve muy fácilmente, pues su valor depende de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$:

- Si grado de $P(x) >$ grado de $Q(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$
- Si grado de $P(x) =$ grado de $Q(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.
- Si grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Un procedimiento para justificar estos resultados consiste en dividir el numerador y el denominador de la función dada por la mayor potencia de x presente en la expresión, como se hace en el ejemplo siguiente. Además, en todos los casos se tendrán en cuenta los signos.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^2 + 3 + 4x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3} - \frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} + \frac{4x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} + 4} = \frac{-1 + 0 - 0}{0 + 0 + 4} = \boxed{\frac{-1}{4}} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^4 + 3 + 4x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = \boxed{0} \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^4 + 3 + 4x^3} &= \boxed{0} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x + 3 + 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4} = \frac{+\infty}{4} = \boxed{+\infty} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + 4x - 3}{x + 3 + 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{4} = \frac{-\infty}{4} = \boxed{-\infty} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x - 3}{x^3 + 3 + 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = \boxed{-1}
 \end{aligned}$$



Ejercicios:

Calcula el valor de los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^4 + 3 + 4x^3} =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x+3+4x^3} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{x+3+4x^2} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} -8x^4 + 4x^3 - 5x + 2 =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^4 + 4x^3 - 5x + 2 =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 5x + 2 =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3+4x^2-2x^4}{x+3+2x^3} =$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3+4x^2-2x^4}{x+3+2x^3} =$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} x+3-4x^3 =$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+3-4x^3} =$$

Solución: a) 0 b) 0 c) -3/4 d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$ g) $+\infty$ h) $-\infty$ i) $+\infty$ j) $+\infty$

3.5. La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación puede resolverse aplicando la comparación de grados, teniendo en cuenta que al aparecer raíces los exponentes pueden ser fraccionarios.

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3+4x^3}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4} \cdot x^{3/2}}{x^1} = \boxed{+\infty}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+3+4x^3}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4} \cdot x^{3/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{\sqrt[3]{4}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x+3+4x^3}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{4x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{4} \cdot x^{3/3}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{4} \cdot x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \boxed{+\infty}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 5x + \sqrt{x+3}}{x+8\sqrt{x^2+x-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x+8\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x+8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{9} = \boxed{-\infty}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + \sqrt{x+3}}{x+8\sqrt{x^2+x-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x+8\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x+8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{9} = \boxed{-\frac{5}{9}}$$

3.6. La indeterminación 1^∞ . El número e

El número e se define como el límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828182846...$$

Una forma de resolver estas indeterminaciones es aplicar la transformación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty [\text{Indeterminación}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)}$$

Otra forma es utilizar la derivación logarítmica (se verá más adelante).

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = \boxed{e^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right)^{-1} = \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} - 1 \right) (x-3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + 2}{x^2 - 2} \right) (x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2 - 2} \right) (x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-9}{x^2 - 2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right)} = e^0 = \boxed{1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} - 1 \right) (x^2-3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + 2}{x^2 - 2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2 - 2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-9}{x^2 - 2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3)} = \boxed{e^3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{x^2-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} - 1 \right) (x^2-3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-x+2}{x-2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x-2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-9}{x-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x} \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x)} = e^{+\infty} \{ \text{Como } e=2,71... > 1 \} = \boxed{+\infty}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x^2-3} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3)} = 1^\infty (\text{Indeterminación}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2} - 1 \right) (x^2-3)} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1-x-2}{x+2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{x-2} \right) (x^2-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2+9}{x-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2}{x} \right)} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x)} = e^{-\infty} \{ \text{Como } e=2,71... > 1 \} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

**Observación:**

Como se aprecia en los diferentes resultados de los límites calculados en los ejemplos anteriores la *indeterminación* significa que no se puede predecir el resultado, pudiendo ser este muy variable.

**Ejercicios:**

Calcula los límites siguientes:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x =$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x =$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2+4} \right)^{\frac{3x^2}{x-6}} =$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + \sqrt{x^2+3}}{x + 3\sqrt{x^2+x-5}} =$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2}{x + 3\sqrt{x^2+x-5}} =$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2+x}{x + \sqrt{x^4+x-5}} =$

Solución: a) e^{-2} b) e^5 c) e^6 d) -1 e) $-\infty$ f) -2

3.7. Comportamiento de otras funciones en el infinito

El límite cuando $x \rightarrow \infty$ de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se pueden calcular como se indica a continuación.

- **Funciones exponenciales**

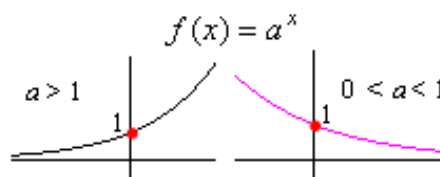
Para el cálculo de límites de expresiones exponenciales, además de las propiedades usuales de la potenciación, se emplean las siguientes:

- Si $f(x) > 0$, entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$ y también

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

- $\begin{cases} a^{+\infty} = +\infty; \text{ si } a > 1 \\ a^{+\infty} = 0; \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} a^{-\infty} = 0; \text{ si } a > 1 \\ a^{-\infty} = +\infty; \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$

En este contexto viene bien recordar la representación gráfica de las funciones exponenciales elementales.



Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)} = e^{-\infty} = \boxed{0}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x \ln 2)} = e^{-\infty} = \boxed{0}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{3x} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x)} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4} \right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x-6}} = 4^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4} \right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 + 2x}{x^2 + 4} \right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x-6}} = 4^{-\infty} = \boxed{0}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4} \right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x-6}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = \boxed{0}$

• Funciones logarítmicas

La propiedad particular que puede aplicarse aquí es: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)$.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{10x}{x+5} \right) = \log \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10x}{x+5} \right) \right) = \log 10 = \boxed{1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (31x + \ln(10x+5)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (31x) + \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (10x+5) \right) = +\infty + \infty = \boxed{+\infty}$

**Ejercicios:**

Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+2}{x-3} \right)^x =$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+2}{x-3} \right)^x =$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+2}{3x-3} \right)^x =$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln \left(\frac{2x+2}{3x-3} \right) \right) =$

Solución: a) 0 b) $+\infty$ c) 0 d) $+\infty$

3.8. La indeterminación de la forma $\infty - \infty$

Cuando se plantea la indeterminación $\infty - \infty$, tanto cuando $x \rightarrow a$ como cuando $x \rightarrow \infty$, el procedimiento general consiste en operar la expresión inicial hasta transformarla en otra expresión no indeterminada o en otra forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Estas otras formas se resolverían por cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-3}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9} \right)$ es una forma indeterminada $\infty - \infty$. Sumamos las fracciones algebraicas y simplifiquemos todo lo posible la expresión.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-3}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(2x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2+1}{(x-3)(x+3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(2x^2+6x-3x-9)-x^2-1}{(x-3)(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2+3x-10}{(x-3)(x+3)} \right) = \frac{8}{0} = \boxed{\pm\infty} \end{aligned}$$

Este resultado se podría decir que no existe, ya que el límite por la derecha de 3 es $+\infty$ y por la izquierda es $-\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-3}{2x-3} - \frac{x^2+5x}{x+2} \right) = \infty - \infty$ (Indeterminación)

Para resolverla realizamos la resta de las fracciones:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x - 3} - \frac{x^2 + 5x}{x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2x^2 - 3)(x + 2) - (x^2 + 5x)(2x - 3)}{(2x - 3)(x + 2)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 6 - (2x^3 - 3x^2 + 10x^2 - 15x)}{(2x - 3)(x + 2)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 + 12x - 6}{2x^2 + x - 6} \right) = \frac{-\infty}{+\infty} (\text{Indeterminación}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{2} \right) = \boxed{\frac{-3}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \infty - \infty (\text{Indeterminación}) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{x^2 - x})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \boxed{1}
\end{aligned}$$

3.9. La indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$

Para resolverla suele dar resultado operar la expresión inicial hasta transformarla en otra expresión no indeterminada o en otra forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplos:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{x + 3}{2x^2 - x + 5} \right) = \infty \cdot 0 (\text{Indeterminación}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{2x^2 - x + 5} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{3}{x^2} \right) = \infty \cdot 0 (\text{Indeterminación}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \frac{3}{x^2} \right) = \infty \cdot 0 (\text{Indeterminación}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \boxed{3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \frac{3}{x} \right) = \infty \cdot 0 (\text{Indeterminación}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = \boxed{+\infty}$$

4. Continuidad de una función en un punto

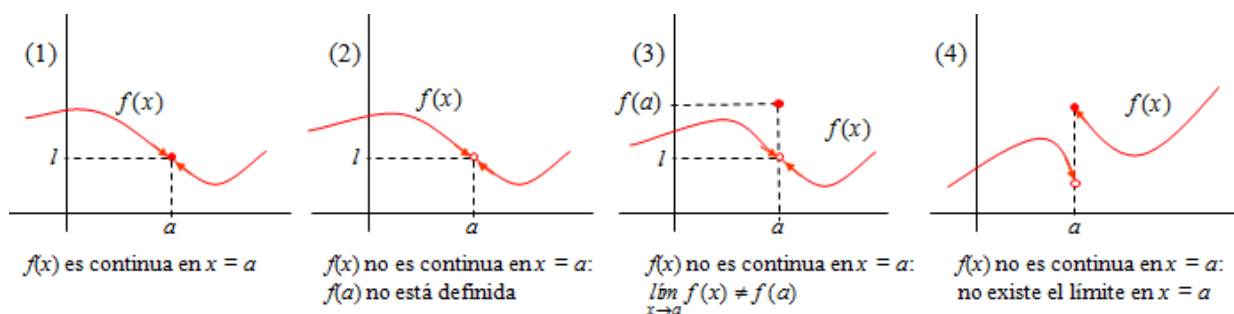
Una función es continua en un punto cuando el límite de la función en dicho punto es igual al valor de la función en él.

La definición es la siguiente: $f(x)$ es continua en el punto $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Una función es continua en $x = a$ cuando cumple las tres condiciones:

- 1) La función $f(x)$ está definida en el punto $x = a$. Esto es, se sabe cuánto vale $f(a)$.
- 2) Existe el límite en $x = a$: existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
- 3) El valor del límite coincide con $f(a)$. Esto es, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a)$.

De las cuatro funciones siguientes, sólo la primera es continua en el punto $x = a$.



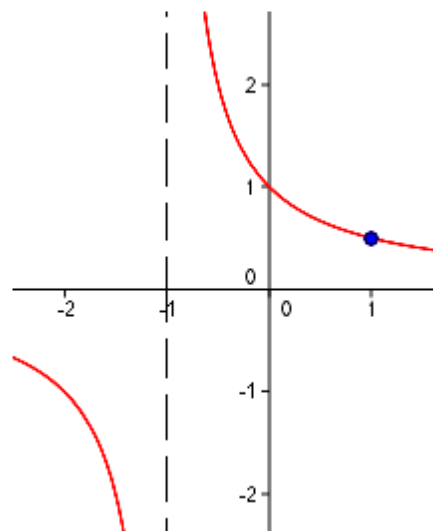
Ejemplo:

La función $f(x) = \frac{4}{x+1}$ es discontinua en $x = -1$, pues en ese punto no está definida.

Si calculamos los límites laterales en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$



4.1. Funciones continuas.

- 1) Las **funciones polinómicas** $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, son continuas para todo número real x .

Son funciones continuas:

- a) $f(x) = 2$. Las funciones constantes se representan mediante una recta horizontal.
- b) $f(x) = 2x - 1$. La función polinómica de primer grado es una recta.
- c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$. La función polinómica de segundo grado es una parábola.
- d) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 1$. Todos los polinomios, de cualquier grado son funciones continuas.

- 2) Las **funciones racionales** $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$, son continuas en todos los puntos de su dominio; esto es, siempre que no se anule el denominador.

Ejemplos:

- a) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2}$ es continua siempre, para todo número real, pues su denominador siempre es distinto de 0.
- b) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-4}$ es continua para todo número real distinto de 2, y -2. Para esos dos valores se anula el denominador.

- 3) Las **funciones con radicales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales** son continuas en todos los puntos de su dominio.

Ejemplos:

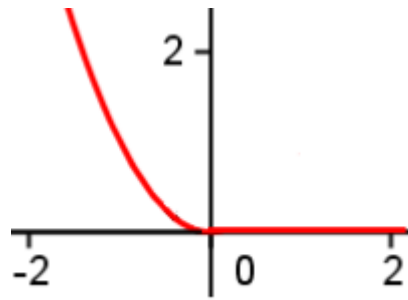
- a) La función $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ es continua para todo $x \geq 2$; y para todo $x \leq -2$. En el primer caso por la derecha; en el segundo, por la izquierda. No está definida en el intervalo $(-2, 2)$.
- b) La función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es continua sólo en el intervalo $[-2, 2]$, que es su dominio de definición.
- c) Las funciones seno y coseno son continua siempre. Si aparecen en cocientes habrá que aplicar el criterio general de denominadores no nulos.

Así, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{3x-1}{1-\cos x}$ no es continua en los puntos en los que no está definida, que son: $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ en esos valores se anula el denominador.

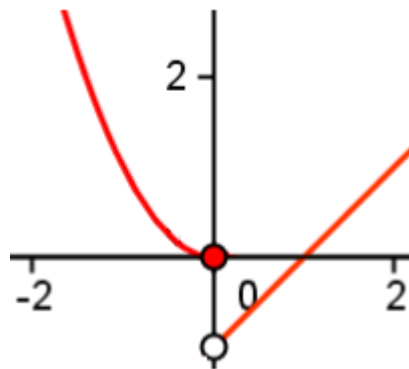
- d) La función $f(x) = \log(x^2-1)$, que está definida siempre que $x \notin [-1, 1]$, es continua para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- e) La función $f(x) = (x-3)e^{2x+1}$ es continua en todo $\mathbf{R}$. En cambio, $f(x) = (x-3)e^{\frac{2}{x-1}}$ no es continua en $x = 1$, ya que no está definida en ese punto.
- 4) Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan los límites laterales.

Ejemplos:

- a) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en todo $\mathbf{R}$.

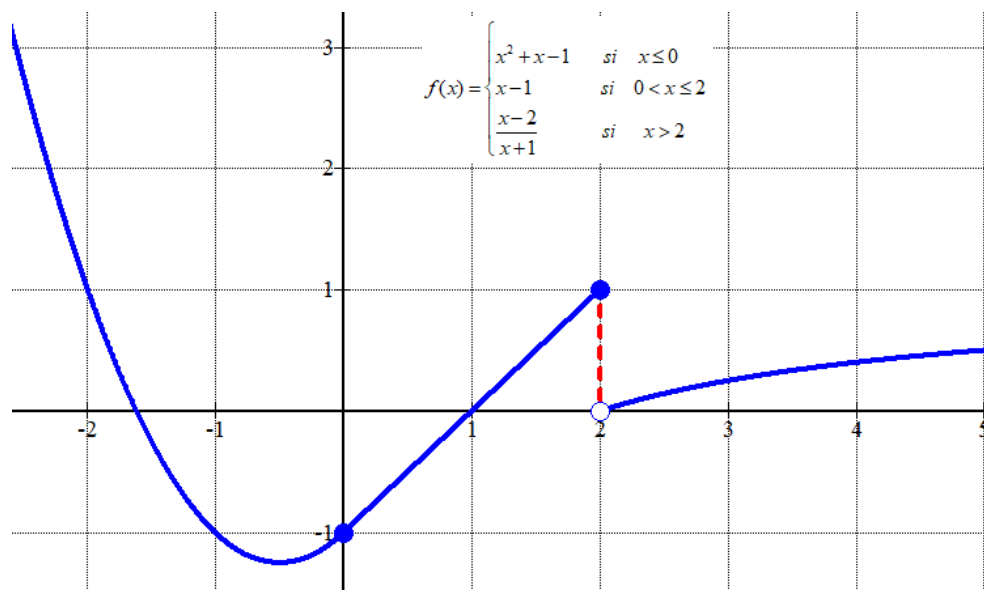


- b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es discontinua en $x = 0$. También podemos decir que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.



- c) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ es continua en $x = 0$ y discontinua en $x = 2$.

También podemos decir que es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.



5. Resumen de operaciones con expresiones infinitas

Suma	$K + (+\infty) = +\infty$ Siendo K un número real cualquiera $K + (-\infty) = -\infty$ Siendo K un número real cualquiera $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
Producto	$K \cdot (+\infty) = +\infty$ Siendo K un número real positivo $K \cdot (+\infty) = -\infty$ Siendo K un número real negativo $K \cdot (-\infty) = -\infty$ Siendo K un número real positivo $K \cdot (-\infty) = +\infty$ Siendo K un número real negativo $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
Cociente	$\frac{K}{\infty} = 0$ Siendo K un número real cualquiera $\frac{+\infty}{K} = +\infty$ Siendo K un número real positivo $\frac{+\infty}{K} = -\infty$ Siendo K un número real negativo $\frac{-\infty}{K} = -\infty$ Siendo K un número real positivo $\frac{-\infty}{K} = +\infty$ Siendo K un número real negativo $\frac{0}{K} = 0$ Siendo $K \neq 0$ $\frac{K}{0} = \infty$ (Indeterminación)
Potencia	$K^{+\infty} = +\infty$ Siendo $K > 1$ $K^{+\infty} = 0$ Siendo $0 < K < 1$ $K^{-\infty} = 0$ Siendo $K > 1$ $K^{-\infty} = +\infty$ Siendo $0 < K < 1$ $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ $(+\infty)^{-\infty} = 0$



Ejercicios



Cálculo de límites por métodos algebraicos

1. Utiliza tu sentido común para asignar valor a los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = & ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = & ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + x^2 = \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 - x^2 = \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = & ; \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = & ; \lim_{x \rightarrow -1} x^3 - x^2 = \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = & ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = & ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 - x^2} = \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^2}{x^2} = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^2}{x^3} = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^2}{x^3 - x^2} = \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + x^3}{x^2} = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^2}{x^3} = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^2}{x^3 - x^2} = \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^4 + x^3}{x^2} = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^4}{x^3} = & ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3 + x^5}{x^3 - x^2} =
 \end{array}$$

2. Utilizando la calculadora, indica el valor aproximado de los límites:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = & \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = & \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = &
 \end{array}$$

3. Resuelve los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4} \right) & \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2} \right) & \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^4 - x^3 - x^2}{x^3 - 4x^2 + 5x} \right) &
 \end{array}$$

4. Halla, en función de los valores de p , los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - px}{x^2 - 3x + 2} \right) & \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x^2 - p} \right) &
 \end{array}$$

5. Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \\ \text{b) } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} \\ \text{c) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} \end{aligned}$$

6. Calcula:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+10x}{x^3-3x+4} \right) \\ \text{b) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-4}{2x-5x^2} \\ \text{c) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2}{x^2+12x} \end{aligned}$$

7. Calcula el valor de los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}} \\ \text{b) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1} \\ \text{c) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}} \end{aligned}$$

8. Halla el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2} \right)^{ax+2} = 2$

9. Calcula:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{x^2+3x}{x+2} \right) \right] & \text{b) } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\log \left(\frac{x^2+3x}{x^2+2} \right) \right] & \text{c) } & \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln \left(\frac{x^2+3x}{x-2} \right) \right] \end{aligned}$$

10. Calcula:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{1}{(x-2)^2}} & \text{b) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{x}{x+2}} & \text{c) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^x-9}{3^{x+1}} \right) \end{aligned}$$

11. Calcula:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x^2+1} \right)^{\frac{-3x+2}{x}} & \text{b) } & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)^{\frac{-3x+2}{x-1}} & \text{c) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^{\frac{-3x+2}{x^2-1}} \end{aligned}$$

12. Halla el valor de los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{(x-2)^2} \right) & \text{b) } & \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-3}{x-3} - \frac{x^2+5x-6}{x^2-9} \right) & \text{c) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-3} - \frac{x^2+3}{x^2} \right) \end{aligned}$$

13. Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-3x})$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x+4} - x)$

14. (EBAUM) Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-6}{x+1} \right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

15. (EBAUM) Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4} \right)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$

16. (EBAUM) Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-5} - \frac{x^2}{x-2} \right)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2})$



Continuidad

17. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

- a) $f(x) = x^3 + 8$ b) $f(x) = \frac{x}{x^3+8}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2-8}$ d) $f(x) = \frac{x}{x^2+8}$
 e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ f) $f(x) = \sqrt{x+4}$ g) $f(x) = e^{x-2}$ h) $f(x) = \log(5x-6)$

18. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

- a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

19. (EBAUM) Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades

- a) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$
- b) $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$.

Soluciones

1. a) $+\infty; +\infty; -\infty$ b) $+\infty; -\infty; +\infty$ c) 4; 0; -2 d) 0; 0; 0 e) 1; 0; 0
f) $-\infty; -1; -1$ g) $-\infty; -\infty; +\infty$
2. a) 1; 0; $+\infty$
3. a) -1. b) 12. c) 0.
4. a) Si $p \neq 2$ el límite será infinito; si $p = 2$, vale 2.
d) Si $p \neq 4$ el límite valdrá 0; si $p = 4$, vale 3.
5. a) 1/2. b) 8. c) 0.
6. a) 0. b) -3/5. c) $+\infty$.
7. a) 1/2. b) 1/2. c) $+\infty$.
8. $a = 3 \ln 2$
9. a) $+\infty$. b) 0. c) $+\infty$
10. a) $+\infty$. b) 3. c) 1/3.
11. a) 1. b) No existe: 0; $+\infty$. c) 1
12. a) $-\infty$. b) 2/3. c) $+\infty$
13. a) 0. b) 5/2. c) -5/2
14. a) e^{-7} b) $+\infty$
15. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8}$
16. a) 3 b) 0
17. a) No tiene b) -2 c) $\{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$ d) No tiene e) No tiene f) $(-\infty, -4)$ g) No tiene h) $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$
18. a) No tiene b) $x=1; x=2$ c) $x \geq 2$
19. $a = 0$ y $b = -3$

Tema 8. Derivadas.

No es lo mismo...



... bajar por el tobogán de un parque infantil que tirarse desde lo más alto de una montaña rusa.

Si dibujáramos el perfil del descenso de estas tres atracciones podríamos decir que se trata de la gráfica de tres funciones decrecientes, pero es evidente que el ritmo de decrecimiento en cada una de ellas es muy diferente. Por ejemplo, hablaríamos de un decrecimiento lento en el primer caso y un decrecimiento muy rápido en el tercero. ¿Cómo describirías el de la segunda imagen?

¿Cómo podemos cuantificar la velocidad a la que crece o decrece una función? con la derivada.

La **derivada** de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** en ese punto. Pues bien, ese número es el que nos informará de si una función está creciendo en un punto o decreciendo y a qué ritmo lo está haciendo.

La derivada nos informa de cómo y a qué velocidad varía una función

En este tema definiremos formalmente conceptos como **máximo y mínimo relativo** —en la tercera imagen aparece un máximo— o **punto de inflexión**, como los que puedes visualizar en la segunda imagen. Gracias al cálculo de estos puntos podrás **dibujar** con precisión **gráficas de funciones** que hasta ahora sólo podías esbozar.

Acabaremos resolviendo problemas para que puedas apreciar la gran potencia que tiene la derivada tanto como herramienta de cálculo como en el análisis de funciones.

Un tipo de **problemas** muy interesantes son los **de optimización**. En la vida cotidiana interesa con frecuencia lograr que una cierta magnitud sea lo más grande o lo más pequeña posible. Por ejemplo: calcular el precio a que debe venderse un producto para obtener el máximo beneficio, o bien, averiguar la forma que debe tener una caja de una cierta capacidad para que el coste de producción sea mínimo.

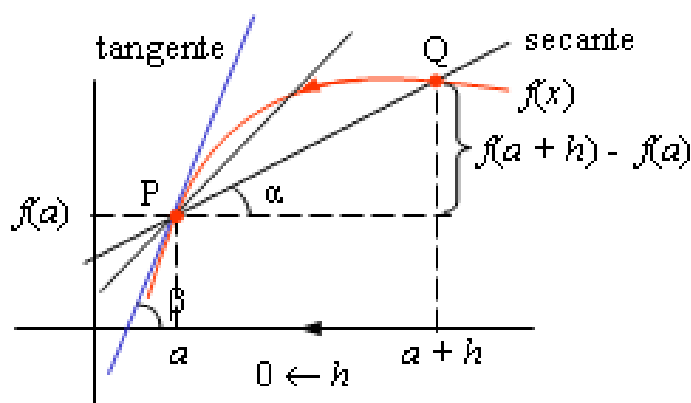
1. Derivada de una función en un punto

1.1. Definición

Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ si existe el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este límite se denota por $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.



La derivada es el límite de un cociente de dos cantidades infinitesimales. El numerador mide la variación de la variable dependiente ($f(x)$) cuando la variable independiente (x) pasa de a a $a+h$.

El cociente mide la tasa de variación media de una variable respecto a la otra. Cuando se impone que la variable independiente varíe una cantidad infinitesimal (eso indica que $h \rightarrow 0$), lo que se está calculando es la tasa de variación instantánea de la función $f(x)$ en un punto determinado. Esto es, **qué le pasa a $f(x)$ cuando varía x en los alrededores de un punto a .**



Ejemplo:

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, su derivada en el punto $x = 3$ es $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

Como $f(3+h) = -(3+h)^2 + 4(3+h) = -9 - h^2 - 6h + 12 + 4h = -h^2 - 2h + 3$ y

$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 = -9 + 12 = 3$, se tendrá:

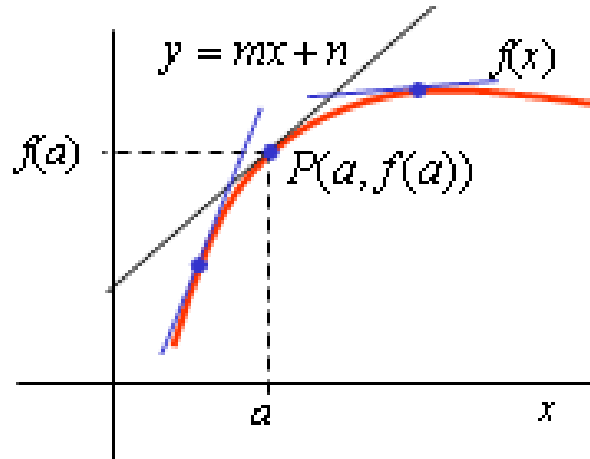
$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h-2)}{h} = -2$$

Luego $f'(3) = -2$. Este número indica que en el punto $x = 3$, la función está decreciendo en la proporción 2 a 1: la razón que expresa la relación entre ambas variables vale -2 .

1.2. Interpretación geométrica de la derivada (recta tangente a la función)

La derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$. Esto es, en la recta $y = mx + n$ se tiene que $m = f'(a)$; como además la recta pasa por $P(a, f(a))$, se obtiene que la ecuación de dicha recta tangente será:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$



Observaciones:

1. La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto concreto. La derivada indica lo que variaría la función si se comportara linealmente (como la recta tangente) en un entorno de ese punto.
2. La derivada, como la recta tangente, va cambiando según cambia el punto de referencia.
3. Redordar que la pendiente de una recta indica lo que la recta aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable x .



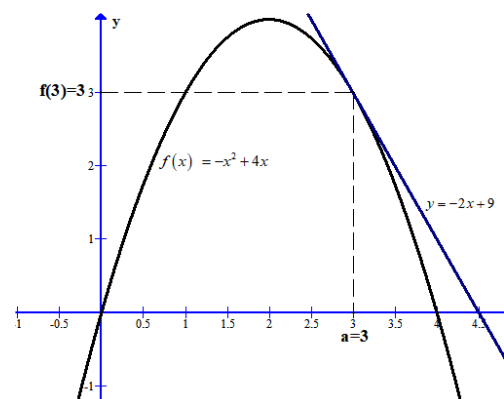
Ejemplo:

La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3).$$

Como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene:

$$y - 3 = -2(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 9}.$$



1.3. Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.

Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:

- 1) Que la función sea continua en dicho punto.
- 2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

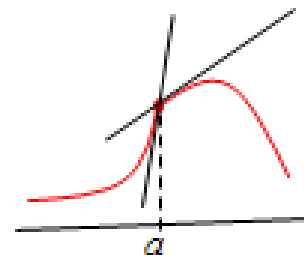
• Derivadas laterales

$$\text{Izquierda: } f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Derecha: } f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La derivada $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Geoméricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.

Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.



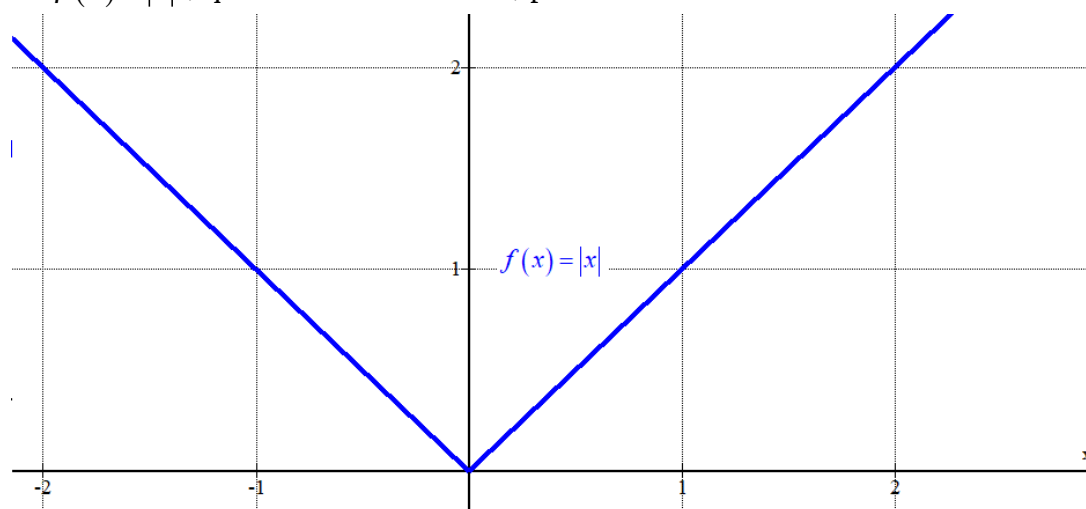
Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.

• Continuidad y derivabilidad

La relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:

- “Si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$ ”
- El recíproco no es cierto: “si $f(x)$ es continua en $x = a \Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$ ”

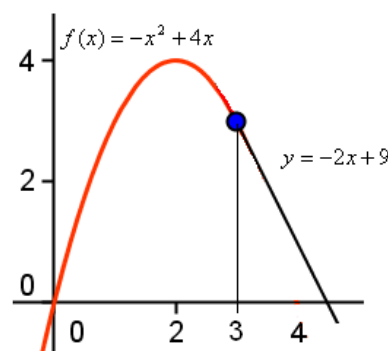
Para comprobar este resultado basta con dar un contraejemplo. El más sencillo es considerar la función $f(x) = |x|$, que es continua en $x = 0$, pero no derivable.



**Ejemplos:**

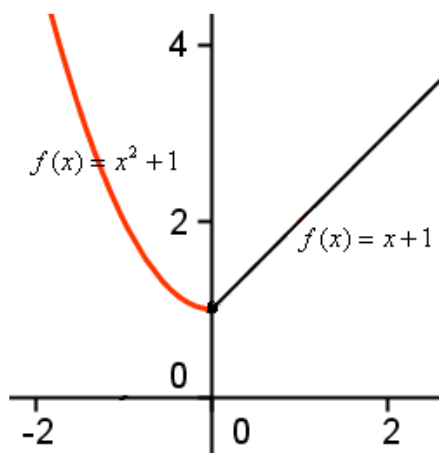
- a) La función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x < 3 \\ -2x + 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ es continua y

derivable en el punto donde se unen las funciones a trozos, en $x = 3$. Esto implica que se puede pasar de una función a otra sin cambios bruscos. (Recuerda que $y = -2x + 9$ es la recta tangente a $y = -x^2 + 4x$ en $x = 3$).



- b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$,

pero no es derivable en ese punto. (En el punto $x = 0$, la función hace un cambio brusco, tiene un pico).



2. Función derivada

La función derivada de una función $f(x)$ es una nueva función que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f'(x)$. Su definición es la siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si $y = f(x)$, se escribe $y' = f'(x)$. También es frecuente escribir $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ o $y' = \frac{dy}{dx}$.

2.1. Derivada de algunas funciones

Para obtener la función derivada de cualquier función conviene seguir el proceso siguiente:

- 1) Dada $y = f(x)$, hallar $f(x+h)$.
- 2) Hallar y simplificar la diferencia $f(x+h) - f(x)$.

3) Escribir y simplificar el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

4) Resolver el límite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. En el cálculo de este límite suele estar la dificultad mayor.

Para las funciones usuales existen una serie de fórmulas que dan su función derivada. Más adelante se dará una breve tabla con las más frecuentes.

Aquí, para que se aprecie el método a seguir (y quizás la dificultad de ello) se obtendrá la derivada de una función sencilla.



Ejemplos:

a) La función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ puede obtenerse siguiendo los pasos siguientes:

1) Se calcula $f(x+h)$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) = x^2 + h^2 + 2xh + 2x + 2h$$

2) Se halla $f(x+h) - f(x)$:

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + h^2 + 2xh + 2x + 2h - (x^2 + 2x) = h^2 + 2xh + 2h = h(h + 2x + 2)$$

3) Se forma el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(h + 2x + 2)}{h} = h + 2x + 2$$

4) Se calcula el límite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x + 2) = \boxed{2x + 2}$$

Por tanto, la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ es $f'(x) = 2x + 2$.

Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir. Por ejemplo:

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2; \quad f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4; \quad f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2$$

3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones

Se puede demostrar que la derivada de una función polinómica es la siguiente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$



Ejemplos:

a. $f(x) = -32 \Rightarrow f'(x) = 0$

b. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

c. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

d. $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

e. $f(x) = x^5 + x^3 + x - 32 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

Cuando las funciones no aparezcan en una forma tan simple o cuando intervengan más de una función se aplicarán las siguientes propiedades.

Derivada de una constante por una función:

$$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$$



Ejemplos:

a. $y = -4x^4 \Rightarrow y' = -4 \cdot 4x^3 = -16x^3$

b. $y = \frac{-1}{4}x^4 \Rightarrow y' = \frac{-1}{4} \cdot 4x^3 = -x^3$

c. $y = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1} \Rightarrow y' = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

d. $y = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3} \Rightarrow y' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$



Ejemplos:

a. $y = 3x^5 - 4x^3 \rightarrow y' = 15x^4 - 12x^2$

b. $y = -\frac{2}{5}x - 4 \rightarrow y' = \frac{-2}{5}$

Derivada de un producto de funciones:

$$f(x) = p(x) \cdot s(x) \Rightarrow f'(x) = p'(x) \cdot s(x) + p(x) \cdot s'(x)$$



Ejemplos:

a. $y = 3x^5 \cdot 5x^4 \Rightarrow y' = 15x^4 \cdot 5x^4 + 3x^5 \cdot 20x^3 = 75x^8 + 60x^8 = 135x^8$. También se puede multiplicar primero y derivar después, obteniendo el mismo resultado.
 $y = 3x^5 \cdot 5x^4 = 15x^9 \Rightarrow y' = 135x^8$.

b. $y = (2x - 3)(x^3 - 5) \Rightarrow y' = (2)(x^3 - 5) + (2x - 3)(3x^2) = 2x^3 - 10 + 6x^3 - 9x^2 = 8x^3 - 9x^2 - 10$

Derivada de un cociente de funciones:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$$

**Ejemplos:**

$$a. \ y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$b. \ y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{(2x-3)(x-1) - 1(x^2 - 3x + 1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$$

Derivada de la función compuesta (regla de la cadena):

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

**Ejemplos:**

a. $y = (3x^5)^4 \Rightarrow y' = 4(3x^5)^3 \cdot 15x^4 = 4 \cdot 27 \cdot x^{15} \cdot 15x^4 = 1620x^{19}$. Evidentemente esta derivada sirve como ejemplo, pero la forma lógica de hallarla es simplificar antes de derivar para hacerla de forma más ágil y segura.

$$y = (3x^5)^4 = 81x^{20} \Rightarrow y' = 1620x^{19}$$

b. $y = (3x^5 - 3x^3 + 5x - 12)^4 \Rightarrow y' = 4(3x^5 - 3x^3 + 5x - 12)^3 \cdot (15x^4 - 9x^2 + 5)$. Con esta derivada es más lógico utilizar la regla de la cadena.

4. Fórmula de la función derivada de las funciones usuales**4.1. Derivada de potencias y raíces**

Son dos casos particulares de funciones compuestas: $y = (f(x))^n$ e $y = \sqrt[n]{f(x)}$.

Sus derivadas son:

$$y = k \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = k \cdot x^n \Rightarrow y' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$$

Para el caso particular de la raíz cuadrada es conveniente aprenderse la fórmula rápida:

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

La derivada de las raíces también puede obtenerse convirtiendo la raíz en una potencia de exponente fraccionario y derivando como potencia:

$$y = \sqrt[n]{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot (f(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x).$$



Ejemplos:

a. $y = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x - 32 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x + \frac{1}{4}$

b. $y = \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x - 32\right)^5 \Rightarrow y' = \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x - 32\right)^4 \cdot \left(4x^3 - 4x + \frac{1}{4}\right)$

c. $y = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 10x}{2 \cdot \sqrt{x^3 - 5x^2 + 3}}$

d. $y = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 10x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 5x^2 + 3)^2}}$

4.2. Derivada de las funciones logarítmicas

Logaritmo **neperiano**: $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

Para la función compuesta: $y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Logaritmo en **base a**: $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$



Observación:

$\log_a e$ es un número, por ejemplo $\log_2 e = 1,442695..$; $\log e = 0,4342944819..$

Para la función compuesta: $y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$

**Ejemplos:**

$$a. \ y = \ln(x^2 - 4x + 11) \Rightarrow y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 11}$$

$$b. \ y = \log(x^2 - 4x + 11) \Rightarrow y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 11} \cdot \log e$$

4.3. Derivada de las funciones exponenciales

Exponencial de **base a**: $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

Para la función compuesta: $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$

Exponencial de **base e**: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

Para la función compuesta: $y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

**Ejemplos:**

$$a. \ y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \cdot \ln 10 = 2,310^x$$

$$b. \ y = 2^{x^2 - 4x} \Rightarrow y' = 2^{x^2 - 4x} \cdot (2x - 4) \ln 2$$

$$c. \ y = e^{x^2 - 4} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2 - 4}$$

4.4. Derivada de las funciones trigonométricas

Las reglas de derivación de las funciones trigonométricas se obtienen aplicando las fórmulas trigonométricas y las propiedades de la derivada de las operaciones con funciones.

$$\text{Función seno: } (\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$\text{Función coseno: } (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$\text{Función tangente: } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

**Ejemplos:**

$$a. \ y = \operatorname{sen}(x^2 - 1) \Rightarrow y' = (2x) \cos(x^2 - 1)$$

$$b. \ y = \cos(x - 2x^2) \Rightarrow y' = -(1 - 4x) \operatorname{sen}(x - 2x^2)$$

$$c. \ y = \ln(\operatorname{tg} x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cancel{\cos x}}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

4.5. Derivada de las funciones trigonométricas inversas

La fórmula de la derivada de cada una de estas funciones puede obtenerse a partir de su definición.

$$\text{Función } \arcsen x: (\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Función } \arccos x: (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Función } \operatorname{arctg} x: (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$



Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a. } y = \arcsen(x-1) &\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+1-2x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}} \\ \text{b. } y = \arccos\left(\frac{x}{4}\right) &\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{16}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}} \\ \text{c. } y = \operatorname{arctg}(x^2) &\Rightarrow y' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \boxed{\frac{2x}{1+x^4}} \end{aligned}$$

4.6. Tabla de la derivada de las funciones usuales

Resumiendo todo lo anterior puede formarse la siguiente tabla. En ella:

- **c, n, a** y **e** son números
- **x** designa la variable independiente.
- **y** representan la función de **x**.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS	
Función	Función derivada
$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$

$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ o bien $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

4.7. Derivadas sucesivas

A la función derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda; se escribe $f''(x)$. De manera análoga se puede definir la derivada tercera: $f'''(x)$, que es la derivada de la derivada segunda.

Y también la derivada de orden 4: $f^{(4)}(x)$, que es la derivada de la derivada tercera.

A la derivada de orden n se le llama derivada n -ésima; y se escribe $f^{(n)}(x)$.



Ejercicios:

1. Calcula la derivada primera, segunda y tercera de $f(x) = -x^2 + 4x$
2. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$
3. Calcula la derivada de $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 3)^5$
4. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x}$
5. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$
6. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3}{x^3}$
7. Calcula la derivada de $f(x) = 2 - 7x^3 + \frac{4}{x^5} - 5\sqrt{x}$
8. Calcula la derivada de $f(x) = 3^{4x-1}$
9. Calcula la derivada de $f(x) = e^{x^2-x}$
10. Calcula la derivada de $f(x) = \ln(x^4 + x)$
11. Calcula la derivada de $f(x) = \log(3x^2 + 2)$
12. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot e^x$
13. Calcula la derivada de $f(x) = x^2 \cdot e^x$
14. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot e^{x^2+1}$
15. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot e^{-x}$

16. Calcula la derivada de $f(x) = x \cdot \ln x$
17. Calcula la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 3 \cos 5x - \operatorname{tg} x^2$
18. Calcula la derivada de $f(x) = \ln(\cos x)$
19. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$
20. Calcula la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$
21. Calcula la derivada de $f(x) = 2^{-x^3+2x} + e^{-x/2}$

Soluciones:

- 1) $f'(x) = -2x + 4$; $f''(x) = -2$; $f'''(x) = 0$
- 2) $f'(x) = \frac{-3x^2 - 15}{(x^2 - 5)^2}$
- 3) $f'(x) = 5(x^3 - 2x^2 - 3)^4(3x^2 - 4x)$
- 4) $f'(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}$
- 5) $f'(x) = \frac{2x}{5 \cdot \sqrt[5]{(x^2+1)^4}}$
- 6) $f'(x) = \frac{-9}{x^4}$
- 7) $f'(x) = -21x^2 - \frac{20}{x^6} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$
- 8) $f'(x) = 4 \ln 3 \cdot 3^{4x-1}$
- 9) $f'(x) = (2x-1) \cdot e^{x^2-x}$
- 10) $f'(x) = \frac{4x^3+1}{x^4+x}$
- 11) $f'(x) = \frac{6x}{3x^2+2}$
- 12) $f'(x) = e^x \cdot (1+x)$
- 13) $f'(x) = e^x \cdot (x^2+2x)$
- 14) $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot (1+2x^2)$
- 15) $f'(x) = e^{-x} \cdot (1-x)$
- 16) $f'(x) = 1 + \ln x$
- 17) $f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 15 \operatorname{sen} x - \frac{2x}{\cos^2 x^2}$
- 18) $f'(x) = -\operatorname{tg} x$
- 19) $f'(x) = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$
- 20) $f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$
- 21) $f'(x) = (-3x^2 + 2) 2^{-x^3+2x} \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2}$

5. Aplicación al cálculo de límites. Regla de L'Hôpital

En el cálculo de límites pueden aparecer siete expresiones (formas) indeterminadas. Son:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^\infty \quad 0 \cdot \infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

Hasta ahora, cuando se presentaba alguna de esas indeterminaciones, se resolvían, si era posible, mediante transformaciones algebraicas. Sirva como recordatorio el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

A partir de ahora puede emplearse otro procedimiento más eficaz y que, además, permite estudiar una mayor variedad de funciones. Este procedimiento se sirve de las derivadas y recibe el nombre de regla de L'Hôpital.

5.1. Regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación $\frac{0}{0}$

En el caso de que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y de que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones derivables en un entorno de a , se cumple:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, siendo $g(x) \neq 0$ en un entorno de a , si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

entonces también existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Esto es igualmente válido para los límites laterales o en el infinito: si $x \rightarrow a^+, a^-, +\infty$ o $-\infty$).

“El límite de un cociente del tipo $\frac{0}{0}$ es igual al límite del cociente de las derivadas”



Ejemplos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \boxed{1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x^2}{2x - 3} = \frac{-2}{-1} = \boxed{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{4x} =$$

$$= \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación) Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

5.2. Regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

En el caso de que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ y de que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones derivables en un entorno de a , se cumple:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Esto es igualmente válido para los límites laterales o en el infinito: si $x \rightarrow a^+, a^-, +\infty$ o $-\infty$).

“El límite de un cociente del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ es igual al límite del cociente de las derivadas”



Observaciones:

1. La regla sólo se aplica, previa comprobación de la existencia de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$.
2. Se puede aplicar de forma reiterada.
3. No se deriva como cociente, sino que se hace la derivada del numerador dividido por la derivada del denominador.



Ejemplos:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

2. El siguiente límite se puede hacer con métodos algebraicos (más fácil), pero lo podemos hacer también con esta nueva regla:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{2x - 3} =$$

$$= \frac{-\infty}{\infty} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = \boxed{-\infty}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminación) Aplicando la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminación) Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = \boxed{0}$$

6. Aplicación de la derivada para el estudio de la variación de una función

El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la obtención de máximos y mínimos relativos.

6.1. Crecimiento y decrecimiento

- $f(x)$ es **creciente** en un punto $x = a$ si $f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- $f(x)$ es **decreciente** en un punto $x = a$ si $f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

- La función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

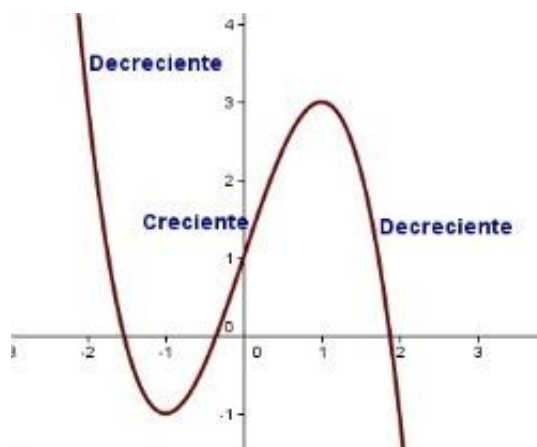
Caracterización del crecimiento o decrecimiento mediante la derivada primera (y')

Si $f'(a) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

Si $f'(a) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.

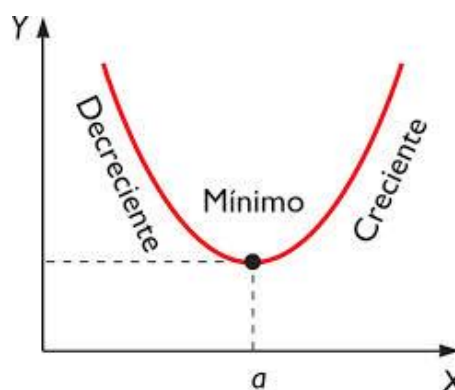
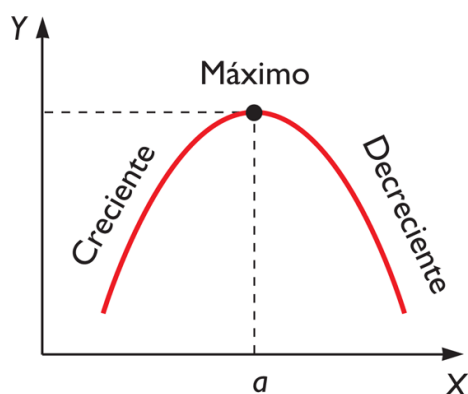


Máximos

- Una función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto $x = a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más pequeño que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es creciente ($y' > 0$) y después de este valor la función es decreciente ($y' < 0$).

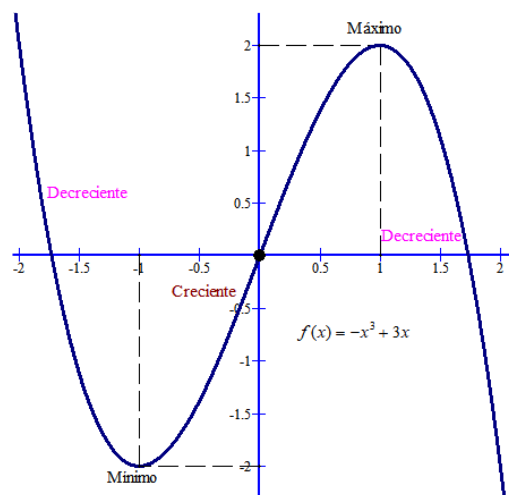
Mínimos

- Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $x = a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más grande que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es decreciente ($y' < 0$) y después de este valor la función es creciente ($y' > 0$).



Caracterización del máximo o mínimo mediante la derivada primera y segunda

- **Máximo relativo** en $x = a$ si se cumple: $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$.
- **Mínimo relativo** en $x = a$ si se cumple: $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$.

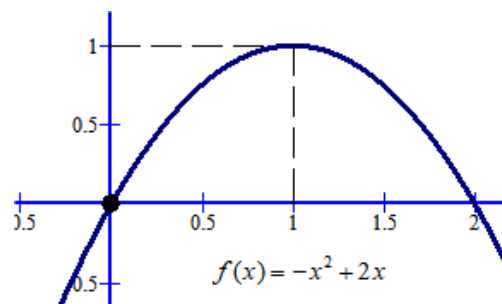


Ejemplo:

La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es creciente a la izquierda del punto $x = 1$, y decreciente a su derecha, pues $f'(x) = -2x + 2$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$.

Por tanto, $f(x) = -x^2 + 2x$ tiene un máximo en $x = 1$.

Es evidente que $f'(1) = 0$.

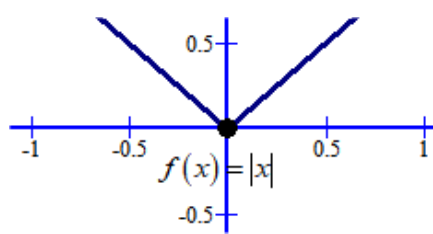
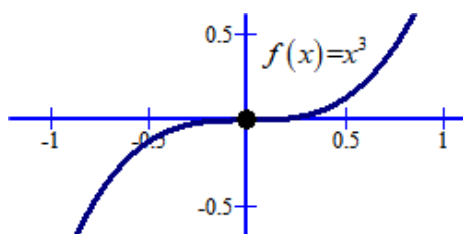


La determinación de los puntos singulares de una función (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también puntos estacionarios o críticos; y los puntos en los que la función no está definida), permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.



Observaciones:

- Puede haber mínimo sin que $f'(x) = 0$. Así, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y en ese punto no es derivable la función.
 - Puede suceder que $f'(x) = 0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$. Su derivada, $f'(x) = 3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:
 - Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.
 - Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.
- Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un **punto de inflexión**.

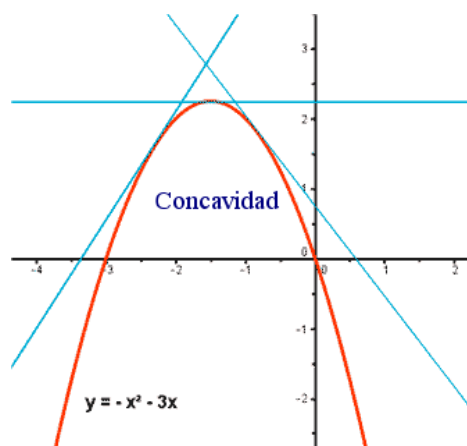


6.2. Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura: concavidad, convexidad, inflexión

La concavidad y la convexidad dependen del punto de vista del que mira. Adoptaremos la decisión de que la concavidad será así: $\cap$; y la convexidad así: $\cup$. En algunos libros se expresa al revés.

Observa lo que sucede en un intervalo de **concavidad**.

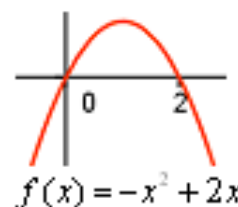
- Las tangentes a la curva están por encima de ella.
- Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez menor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes decrecen. (La pendiente viene dada por la derivada).
- Luego la derivada decrece: $f'(x)$ es decreciente.
- En consecuencia, su derivada (la de $f'(x)$) será negativa: $f''(x) < 0$.
- Los máximos se dan siempre en una concavidad.
- Por tanto, si en $x = a$ hay un máximo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) < 0$.



Ejemplos:

- a) La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es cóncava, pues su derivada segunda es siempre negativa:

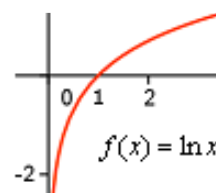
$$f'(x) = -2x + 2 \rightarrow f''(x) = -2 < 0.$$



- b) La función logaritmo, $f(x) = \ln x$ es cóncava en todo su dominio: $\mathbf{R}^+$.

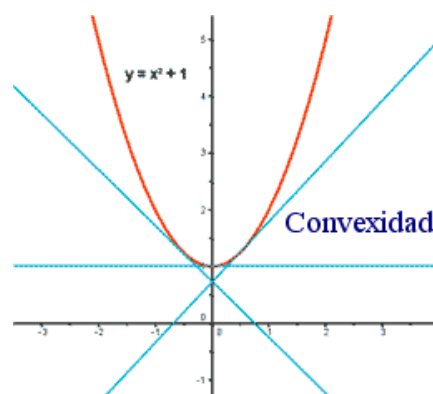
Efectivamente, derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ para todo } x.$$



Observa lo que sucede en un intervalo de **convexidad**.

- Las tangentes a la curva están por debajo de ella.
- Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez mayor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes crecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
- Luego la derivada crece: $f'(x)$ es creciente.
- En consecuencia, su derivada será positiva: $f''(x) > 0$.
- Los mínimos se dan siempre en una convexidad.



- Por tanto, si en $x = a$ hay un mínimo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) > 0$.

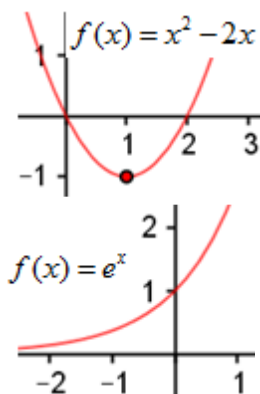
**Ejemplos:**

- a) La función $f(x) = x^2 - 2x$ es convexa, pues su derivada segunda es siempre positiva:

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f''(x) = 2 > 0.$$

- b) La función exponencial, $f(x) = e^x$ es convexa siempre, pues su derivada segunda es siempre positiva:

$$f'(x) = e^x \rightarrow f''(x) = e^x > 0 \text{ para todo } x.$$



Para estudiar la concavidad o convexidad en un intervalo:

Si $f''(x) < 0$ en el intervalo $(x_1, x_2) \rightarrow f(x)$ es cóncava en ese intervalo.

Si $f''(x) > 0$ en el intervalo $(x_1, x_2) \rightarrow f(x)$ es convexa en ese intervalo.

Para estudiar si en $x = a$ hay un **máximo** o un **mínimo**

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \rightarrow f(x)$ tiene un máximo en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0 \rightarrow f(x)$ tiene un mínimo en $x = a$.

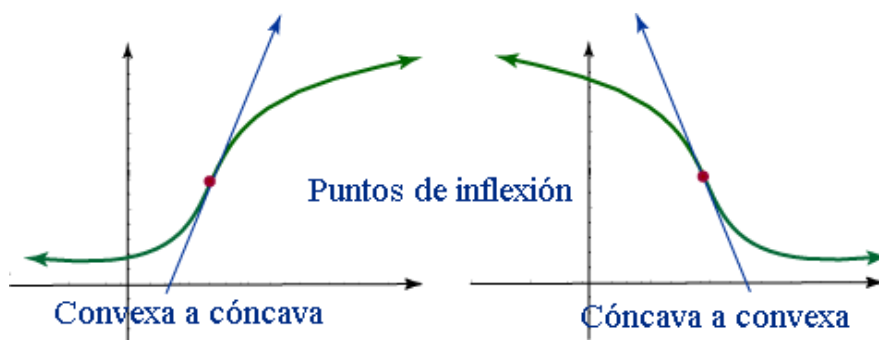
Puede observarse que los máximos se dan en concavidades; y los mínimos, en convexidades.

Puntos de inflexión

Los puntos en los que la curva cambia de cóncava a convexa, o al revés, se llaman **puntos de inflexión**; en esos puntos, la tangente corta a la curva.

Se cumple también que:

- Si $x = a$ es un punto de inflexión de $f(x) \Rightarrow f''(a) = 0$.

**Ejemplos:**

a) La función $f(x) = x^3 - 3x$ cumple:

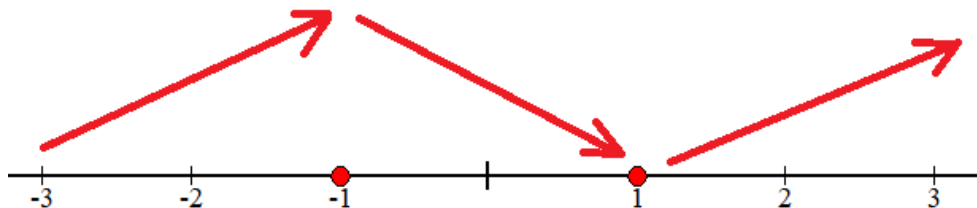
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Los puntos $x = -1$; $x = +1$, son candidatos a máximos o mínimos.

Para decidirlo estudiemos la variación de la derivada primera:

- Antes de $x = -1$, por ejemplo $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. Creciente.
- Entre $x = -1$ y $x = 1$, por ejemplo $x = 0 \rightarrow f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$. Decreciente.
- Después de $x = +1$ por ejemplo $x = 2 \rightarrow f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$. Creciente.

Obteniendo el esquema siguiente, que nos permitirá establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos.



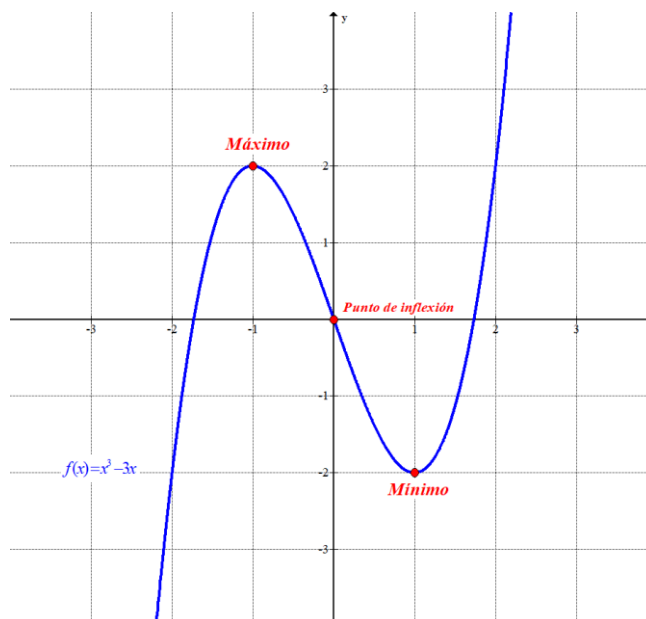
Observando esta evolución de la derivada primera, se puede afirmar:

- En los intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la función crece
- En el intervalo $(-1, +1)$ la función decrece.
- En $x = -1$ hay un máximo.
- Hay un punto de inflexión entre -1 y $+1$.
- En $x = +1$ hay un mínimo.

Obtenemos el punto de inflexión con la derivada segunda.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6x \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 6x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

La gráfica de esta función es:



7. Optimización de funciones. Problemas de optimización

La optimización es uno de los problemas económicos más interesantes de resolver. Consiste en determinar el valor que maximiza (beneficios) o minimiza (costes) una función sujeta a determinadas condiciones.

Un problema de optimización clásica es el siguiente:

Se desea construir, al lado de una carretera, una zona de descanso para automovilistas. Tendrá forma rectangular y estará vallada por los tres lados no adyacentes a la carretera. Si su superficie es de 7.200 m², ¿qué dimensiones debe tener para que el coste de la valla sea mínimo?

La situación planteada se representa en la figura adjunta, que en este, como en la mayoría de los casos, es clave para entender el problema.



7.1. Planteamiento y resolución de un problema de optimización

Un problema de optimización vendrá dado, generalmente, en términos de enunciado. Se dice que está planteado cuando se sabe exactamente qué función hay que hacer máxima o mínima; quedará resuelto cuando se halle y critique la solución. Para ello, puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

1) Saber qué objetivo hay que hacer máximo o mínimo. En el ejemplo anterior hay que hacer mínimo el coste de la valla. (Este mismo ejemplo nos servirá para ilustrar los demás pasos).

2) Expresar en forma de función el objetivo propuesto.

El coste de la valla será mínimo cuando su longitud (L) sea mínima.

Por tanto, la función que hay que hacer mínima es $L = x + 2y$.

Generalmente esta función dependerá de varias variables; aquí, de dos. Hay que determinar cuál de ellas depende de la(s) otra(s) y buscar en el enunciado la relación que liga esas variables; esta relación siempre es una igualdad. Se obtendrá así una función de una sola variable, que puede designarse por $f(x)$ o por cualquier otra letra. Aquí se ha elegido L .

En $L = x + 2y$ aparecen dos variables, x e y , que son las medidas del largo (x) y ancho (y) de la zona de descanso.

¿Qué relación existe entre x e y ? Como se dice que la superficie de la zona es de 7.200 m², y esta superficie vale $S = x \cdot y$, se tendrá que $7200 = x \cdot y$. De donde:

$$y = \frac{7200}{x} \Rightarrow L(x) = x + 2 \frac{7200}{x}.$$

(Aquí termina el planteamiento del problema. Ahora hay que resolverlo)

3) Determinar el máximo o mínimo buscado.

Los óptimos se encuentran entre los puntos críticos de la función, que son las soluciones de $f'(x) = 0$. Para que sea máximo hay que exigir que $f''(x) < 0$; y para que sea mínimo, que $f''(x) > 0$.

En este caso hay que buscar un punto que cumpla: $L'(x) = 0$ y $L''(x) > 0$.

$$L(x) = x + 2 \frac{7200}{x} = x + \frac{14400}{x} \Rightarrow \left. \begin{aligned} L'(x) &= 1 - \frac{14400}{x^2} \\ L'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{14400}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 14400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 14400 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{14400} = \pm 120$$

La solución $x = -120$ hay que descartarla por no tener sentido una longitud negativa. Sustituimos en la derivada segunda el valor $x = 120$.

$$L'(x) = 1 - \frac{14400}{x^2} \Rightarrow L''(x) = 2 \cdot \frac{14400}{x^3} \Rightarrow L''(120) = 2 \cdot \frac{14400}{120^3} > 0.$$

Por tanto, el mínimo pedido se obtiene cuando $x = 120$ metros e $y = 60$ metros.



Ejemplos:

- Descomponer el número 80 en dos sumandos cuyo producto sea máximo.

Solución:

Llamemos a estos números x e y .

- El objetivo es hacer máximo el producto de dichos números.
- La función es $P = x \cdot y$, como la suma de ambos es 80, tenemos:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ P = x \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 80 - x \\ P = x \cdot y \end{cases} \Rightarrow P(x) = x \cdot (80 - x) = 80x - x^2$$

- Para hallar el máximo de la función, calculamos su derivada e igualamos a 0.

$$P'(x) = 80 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow x = 40$$

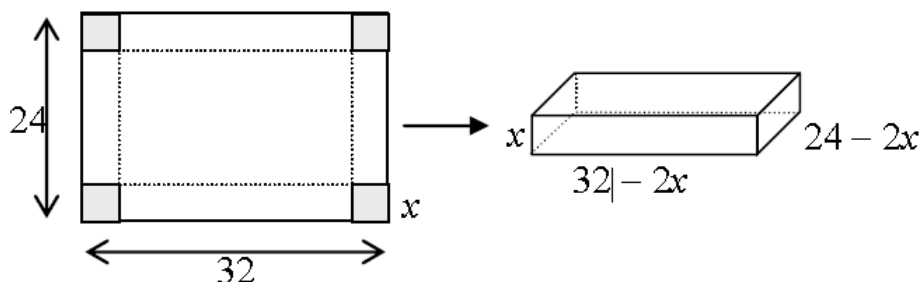
Además, tenemos que: $P''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 40$ es un máximo

Por lo tanto, los números buscados son: $x = 40$ y $y = 40$

- Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

Solución:

Dibujemos la situación planteada:



A partir del enunciado y siguiendo el proceso aplicado en el ejemplo anterior se tiene:

- 1) El objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo*.

La caja es un prisma rectangular, cuyo volumen = área de la base por la altura.

- 2) Observando el dibujo superior si se corta un cuadradito de lado x , el volumen de la caja obtenida será:

$$V(x) = (32 - 2x)(24 - 2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x.$$

- 3) Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V'(x) = 0$.

$$V(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 56x + 192 = 0 \Rightarrow x = \frac{56 \pm \sqrt{832}}{6} = \begin{cases} \frac{56 + \sqrt{832}}{6} \approx 14,14 \\ \frac{56 - \sqrt{832}}{6} \approx 4,53 \end{cases}.$$

Se obtienen $x = 4,53$ y $x = 14,14$.

- 4) Averiguamos cual de estos dos valores es el máximo usando la segunda derivada.

$$V''(x) = 24x - 224 \Rightarrow \begin{cases} V''(4,53) = 24 \cdot 4,53 - 224 < 0 \\ V''(14,14) = 24 \cdot 14,14 - 224 > 0 \end{cases}$$

El máximo se da para $x = 4,53$.

Esta es la solución buscada: **El cuadradito debe medir 4,53 cm de lado.**

También se puede tener en cuenta que el valor $x = 14,14$ no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de ese tamaño.



Ejercicios:



Tangente a una curva

1. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indica:

- $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto $x = 3$.
- $y = \frac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
- $f(x) = e^{-x+2}$ en el punto $x = 2$.

2. La curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ y la recta $y = 4x + b$ son tangentes en el punto $x = \frac{2}{3}$.

¿Cuál debe ser el valor de b ?

3. Determina los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ en los cuales la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 9x + 5$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.
4. EBAUM. Dada la función $f(x) = x \cdot \ln x - x$, se pide:
- Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcule la ecuación de dicha recta.
 - Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela al eje OX. Calcule la ecuación de dicha recta.



Cálculo de derivadas

5. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(1)$, si existe.
- $f(x) = (1 + 2x)(x - x^2)^3$
 - $f(x) = \ln \sqrt{2x^2 - 2x}$
6. Dada $f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 3)^3}$, halla los valores de $f'(1)$ y $f''(1)$.
7. Halla los puntos en los que se anulan las derivadas primera y segunda de $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.
8. Halla el valor de las derivadas primera y segunda de $g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x = -\frac{1}{2}$.
9. Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula, si es posible, su valor en el punto $x = 0$:
- $f(x) = -2xe^{x^2}$
 - $f(x) = (1 - x^2)e^x$
 - $f(x) = \ln(2x^2 + 2)$
10. Deriva, simplificando el resultado: $f(x) = \frac{x^2 - x}{(2x - 1)^2}$
11. Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.
- $f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 - 1}$
 - $f(x) = x^2 e^{2x-2}$
 - $f(x) = \sin(x+1)^2 - \cos(\pi x)$
12. Halla la función derivada de:
- $y = 2^{3x^2-x}$
 - $y = \cos^2 x$
 - $y = \cos x^2$
 - $y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$
 - $y = \operatorname{tg}(3x+2)$
 - $y = \sqrt{9-x^2}$



Cálculo de límites aplicando la regla de L'Hôpital

13. EBAUM. Calcule los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x - \operatorname{sen} x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2}$$

14. (EBAUM) Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Determine el valor de a para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

15. (EBAUM) Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

16. (EBAUM) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$

c) ¿Es continua la función $f(x) = \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en $x = 0$? Justifique la respuesta.

17. Calcula el valor de los límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x \operatorname{sen} x}{\sqrt{3 - \cos 2x}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x \cdot \ln x)$$

- g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{2}$
- h) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{e^x}{1-x} - \frac{x}{\ln x} \right)$
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{\sin^2 x}$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x}$
- k) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2}$
- l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
- m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$



Crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión

18. Dada la función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$, determina:
- Los puntos de corte con el eje OX.
 - Sus máximos y mínimos.
 - Sus puntos de inflexión.
19. Comprueba que la función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ es decreciente en todo su dominio.
20. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$
21. Demuestra que la función $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ nunca es decreciente. ¿Es posible que, a pesar de lo anterior, tenga puntos de inflexión?
22. Dada la función $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
23. Halla el valor que debe tomar **a** para que la función $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x+2}$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.
24. Comprueba que la función $f(x) = e^{p+x^2}$ tiene un mínimo local en $x = 0$ para cualquier valor de **p**. ¿Tendrá algún punto de inflexión?
25. Halla el valor de **p** para que la función $f(x) = e^{-x} + px - 1$ tenga:
- Un mínimo.

- b. Un máximo.
 - c. Un punto de inflexión.
26. Calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{4}{x}$ pase por el punto $(-1, -3)$ y admita en ese punto una tangente horizontal.
27. a) Calcule los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $(1/2, 4)$.
 a) Para esos valores de a y b estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
28. EBAUM. Considere la función $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ con $-4 < x < 4$.
 a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.
 b) Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.
29. EBAUM. Dada la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se pide:
 a) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.
30. EBAUM. Calcule los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:
 a) $f(x) = x \ln(x)$, con $x > 0$.
 b) $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$, con $x \in \mathbb{R}$
31. EBAUM. Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:
 a) $f(x)$ alcanza su máximo en el punto de abscisa $x = 100$;
 b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(49, 91)$.
32. EBAUM. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{e^{1+x^2}}$ se pide:
 a) Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.
 b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.



Problemas de optimización

33. La suma de dos números positivos es 36; encuentra aquellos cuya suma de cuadrados sea mínima.
34. Determina las medidas de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 6 y cuya área sea máxima.
35. EBAUM.

- a) Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.
 b) Calcule dicha suma máxima.
36. EBAUM. La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Sabiendo que la hipotenusa debe medir 6 metros, calcular sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

Solución:

1. a) $y = -2x + 9$ b) $y = \frac{-1}{8}x + \frac{5}{8}$ c) $y = -x + 3$
2. $b = -\frac{7}{3}$
3. $(-1, -2)$ y $(3, 2)$, $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$
4. a) $x = e$; $y = x - e$ b) $x = 1$; $y = -1$
5. a) $f'(x) = (3 + 2x - 14x^2)(x - x^2)^2$; 0 b) $f'(x) = \frac{2x-1}{2x^2-2x}$; $-\frac{3}{4}$
6. $f'(x) = \frac{-6x^2-6}{(x^2-3)^3}$; $f''(x) = \frac{24x^3+72x}{(x^2-3)^4}$; $f'(1) = \frac{3}{2}$; $f''(1) = 6$
7. $x = \pm \frac{1}{2}$; $x = 0$; $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\frac{40}{27}$; $\frac{16}{3}$
9. a) $f'(x) = -2e^x(1 + 2x^2)$; -2 b) $f'(x) = (1 - 2x - x^2)e^x$; $f'(0) = 1$ c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; 0
10. $f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$
11. a) $f'(x) = \frac{2x^4-3x^2+3}{(x^2-1)^2}$; No existe b) $f'(x) = 2x(1+x)e^{2x-2}$; 0
- c) $f'(x) = 2(1+x)\cos(1+x)^2 + \pi \cdot \sin(\pi x)$; 0
12. a) $y' = (6x-1)2^{3x^2-1}$ b) $y' = -2\cos x \cdot \sin x$ c) $y' = -2x\cos x^2$ d) $y' = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$
- e) $y' = \frac{3}{\cos^2(3x+2)}$ f) $y' = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$
13. a) 1 b) 1/2 c) 2 d) 1/2 e) 1/2
14. a) $+\infty$; 0 b) $a=0$
15. Es continua pues coinciden los límites laterales en $x=0$
16. a) 2 b) 0 c) No es continua, pues no coinciden los límites laterales.
17. a) 1/2 b) 3/2 c) $\pi/4$ d) 2 e) 1 f) 0 g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) -1/2 j) 0 k) $+\infty$ l) $+\infty$ m) $+\infty$
18. a) $x=-3$; $x=2$ b) máximo en $(-2, 256)$. Mínimo en $(2, 0)$ c) $x=-1$
20. $x = \pi/3$ max; $x = 5\pi/3$ mínimo
21. Siempre es decreciente al ser su derivada primera positiva antes de 1 y después de 1. Tiene un punto de inflexión en $x=1$
22. decrece $x < 0$; crece $x > 0$
23. $a=18$

25. a) si $p > 0$, en $x = -\ln p$ hay un mínimo b) no hay máximo c) No tiene punto de inflexión.

26. $a=4$; $b=5$ 27. a) $a=4$; $b=1$ b) máximo $(-1/2, -4)$; mínimo $(1/2, 4)$

28. a) $f'(x) = \frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}$, sus puntos críticos son $x=-3$ y $x=3$ b) $x=-3$ es mínimo y $x=3$ es máximo

29. a) 0 b) $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ y es creciente en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Presenta un mínimo relativo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo relativo en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

30. a) $x = e^{-1}$ es un punto mínimo b) $x = 0$ es mínimo y $x=2$ es máximo

31. Los valores de las variables son $a = -1$ y $b = 20$

32. a) No tiene asíntota vertical ni oblicua y la horizontal es $y=0$ b) La función es decreciente en el

intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y decreciente en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. La función presenta un

mínimo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo en $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

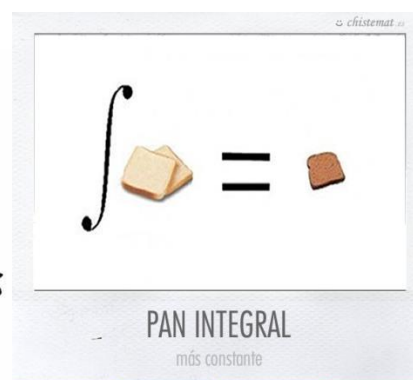
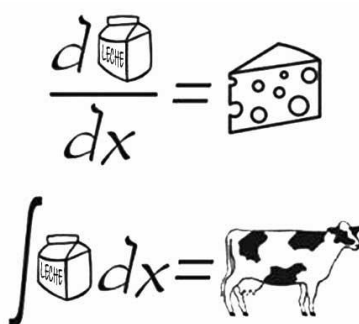
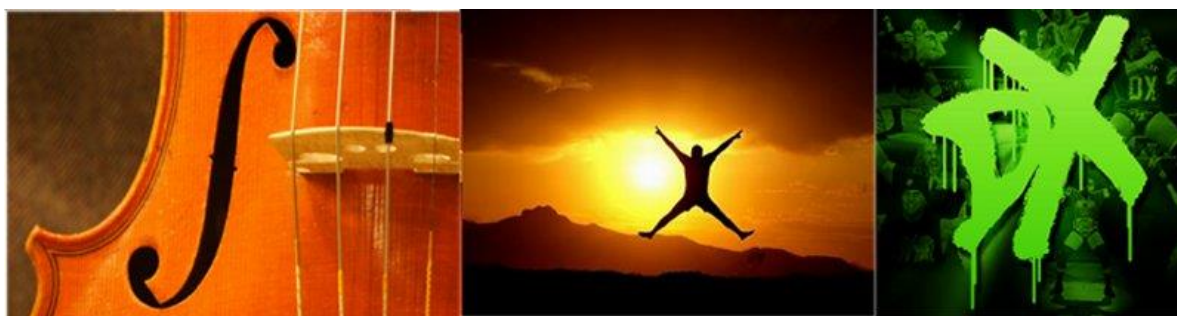
33. 18 y 18

34. $a = b = 6 - 3\sqrt{2}$; $c = 6\sqrt{2} - 6$

35. a) Los números son 1 y 9 b) La suma máxima es 9.

36. Las dimensiones de la vela con superficie máxima son de catetos $x = y = \sqrt{18} \text{ m}$.

Tema 9. Integrales



1. Concepto de integral indefinida

La derivada de una función permite conocer la tasa de variación (el cambio instantáneo) de un determinado fenómeno a partir de su función. Con la integración, el proceso es inverso: se trata de conocer la función inicial a partir de su derivada: partiendo del estudio de la variación de un fenómeno, llegar a conocer la función que lo explica.

1.1. Primitiva de una función

Si se conoce una función $F(x)$, es fácil hallar su derivada $F'(x)$ aplicando las fórmulas.

El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama integración.



A la función $F(x)$ se le llama primitiva o antiderivada de la función $f(x)$. Para ver que la primitiva de una función es correcta basta con derivar, pues:

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$



- a) Si $F(x) = x^2 + 3x$, su derivada es $F'(x) = 2x + 3$; entonces: una primitiva de $f(x) = 2x + 3$ será $F(x) = x^2 + 3x$.



Observación:

Otra primitiva de $f(x) = 2x + 3$ es, por ejemplo, $F(x) = x^2 + 3x + 14$, pues derivando:

$$F'(x) = (x^2 + 3x + 14)' = 2x + 3.$$

Todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 + 3x + K$, donde K es un número, son primitivas de $f(x) = 2x + 3$.

- b) Si $F(x) = \ln(3x+1)$, su derivada es $F'(x) = \frac{3}{3x+1}$; en consecuencia, una primitiva de

$$f(x) = \frac{3}{3x+1} \text{ será } F(x) = \ln(3x+1).$$

Todas las funciones de la forma $F(x) = \ln(3x+1) + K$ son primitivas de $f(x) = \frac{3}{3x+1}$.

- c) Para hallar una primitiva de $f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$ hay que conocer la fórmula de la “derivada

de la raíz”; esto es, que si $y = \sqrt{x^3+17} \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$. En consecuencia, una primitiva

$$\text{de } f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}} \text{ será } F(x) = \sqrt{x^3+17}.$$



Observación:

A lo largo de este tema se estudiarán los métodos básicos de integración, pero si no se conocen con soltura (y de memoria) las fórmulas de derivación el trabajo resultará inútil.

1.2. Integral indefinida

Dada una función $f(x)$, si $F(x)$ es una de sus primitivas, la integral indefinida de $f(x)$ es la función $F(x) + K$, donde K es un número que se llama constante de integración.

Se escribe así:

$$\int f(x)dx = F(x) + K, \text{ (} dx \text{ indica la variable de integración; de derivación).}$$

En consecuencia, la derivada y la integral son “operaciones” inversas; de manera análoga a como lo son la raíz cuadrada y el cuadrado o la exponencial y el logaritmo. Esto es, al aplicar sucesivamente la integral y la derivada a una función se obtiene la misma función:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{y} \quad \int f'(x)dx = f(x).$$

**Ejemplos:**

a) $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + K$. Puede comprobarse que $(x^2 + 3x + K)' = 2x + 3$.

b) $\int \frac{3}{3x+1} dx = \ln(3x+1) + K$. Puede comprobarse que $(\ln(3x+1) + K)' = \frac{3}{3x+1}$.

c) $\int 4x^3 dx = x^4 + K$. Puede comprobarse que $(x^4 + K)' = 4x^3$.

d) Halla la primitiva $F(x)$ de $f(x) = 4x^3$ que cumple $F(1) = 0$.

Una primitiva está calculada en el ejemplo anterior y es $F(x) = x^4 + K$, calculemos K para que $F(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + K = 0 \Rightarrow K = -1$

La primitiva pedida es $F(x) = x^4 - 1$

1.3. Propiedades de la integral indefinida

1) La integral de un **número por una función** es igual al número por la integral de la función:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

Esto significa que los números que multiplican a una función pueden *entrar y salir* del integrando, según convenga.

Esta propiedad facilita el cálculo de integrales mediante el sencillo procedimiento de ajustar constantes.

**Ejemplos:**

a) Para hallar $\int 8x^3 dx$ puede realizarse el procedimiento siguiente:

$$\int 8x^3 dx = \int 2 \cdot 4x^3 dx = 2 \int 4x^3 dx = 2(x^4 + K) = \boxed{2x^4 + K}$$

b) Para hallar $\int 7x^3 dx$ puede realizarse el procedimiento siguiente:

$$\int 7x^3 dx = 7 \int x^3 dx = 7 \int \frac{1}{4} \cdot 4x^3 dx = 7 \cdot \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{7}{4} \int 4x^3 dx = \frac{7}{4}(x^4 + K) = \boxed{\frac{7}{4}x^4 + K}$$

2) La integral de **una suma de funciones** es igual a la suma de las integrales de cada una de esas funciones:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**Ejemplos:**

a) $\int (2x+3)dx = \int 2x dx + \int 3 dx = \boxed{x^2 + 3x + K}$

$$b) \int (e^x + 1) dx = \int e^x dx + \int 1 dx = \boxed{e^x + x + K}$$

2. Relación de integrales inmediatas

Las integrales de las funciones usuales, que conviene saber de memoria, son las siguientes.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
$\int C dx = Cx + K$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$; siendo $n \neq -1$	
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + K$	
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K$	$\int x^{-1} dx = \ln x + K$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + K$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	
$\int e^x dx = e^x + K$	
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + K$	
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + K$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + K$	
$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + K$	
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + K$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + K$	



Ejemplos:

$$a) \int dx = x + K$$

$$b) \int -\frac{1}{2} dx = -\frac{1}{2}x + K$$

$$c) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$$

$$d) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + K$$

$$e) \int \frac{4}{x} dx = 4 \ln x + K$$

$$f) \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + K$$

3. Técnicas y métodos de integración

Cuando el integrando no coincide con alguna de las fórmulas anteriores y el cálculo de la integral no sea inmediato, se recurrirá a algún método de integración.

Estos métodos son procedimientos que permiten escribir el integrando inicial en otro equivalente cuya integral sea más sencilla de calcular.

3.1. Descomposición elemental

Consiste en transformar el integrando mediante operaciones algebraicas básicas, como: multiplicar o dividir por una constante apropiada; sumar o restar un número u otra expresión; efectuar las operaciones indicadas...

Para que esas operaciones tengan sentido hay que tener presentes las fórmulas de las integrales inmediatas; y, obviamente, las propiedades de la integral.



Ejemplos:

$$a) \int (6x^2 + 5x - 1) dx = \{\text{Se descompone en suma de integrales}\} =$$

$$= 6 \int x^2 dx + 5 \int x dx - \int dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - x = \boxed{2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + K}$$

$$b) \int (x^2 - 3)^2 dx = \{\text{Se realiza la operación indicada en el integrando}\} =$$

$$= \int (x^4 + 9 - 6x^2) dx = \int x^4 dx + \int 9 dx - 6 \int x^2 dx = \frac{x^5}{5} + 9x - 6 \cdot \frac{x^3}{3} = \boxed{\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + K}$$

$$c) \int \frac{4}{5-6x} dx = \{\text{Se ajustan las constantes en busca de la integral del logaritmo}\} =$$

$$= 4 \cdot \frac{-1}{6} \int \frac{-6}{5-6x} dx = \boxed{\frac{-2}{3} \ln(5-6x) + K}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{5x^2 + 4x - 3}{x^2} dx &= \{\text{Se hace la división indicada en el integrando}\} = \\
 &= \int \left(\frac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x^2}} - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int 5dx + 4 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx = \\
 &= 5x + 4 \ln x - 3 \int x^{-2} dx = 5x + 4 \ln x - 3 \frac{x^{-1}}{-1} = \boxed{5x + 4 \ln x + \frac{3}{x} + K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{4}{1+x^2} dx &= \{\text{Se ajustan las constantes en busca de la integral del arco tangente}\} = \\
 &= 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \boxed{4 \operatorname{arctg} x + K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \int \frac{4+x}{1+x^2} dx &= \{\text{Se separa en busca de la integral del arco tangente y logaritmo}\} = \\
 &= \int \frac{4}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \boxed{4 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K}
 \end{aligned}$$



Observación:

Para aplicar este método es necesario conocer muy bien las fórmulas de integrales inmediatas. (Además hay que tener “suerte” y paciencia, pues no siempre que se hace una transformación da el resultado apetecible. Con frecuencia hay que volver a intentarlo o recurrir a otro método).

También es imprescindible operar con soltura.

$$\begin{aligned}
 \text{g) } \int \frac{4+x-2x^3}{1+x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{El polinomio del numerador es de mayor grado que el denominador,} \\ \text{y se realiza la división de polinomios} \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} -2x^3 + x + 4 \overline{) x^2 + 1} \\ \underline{+2x^2 + 2x} \\ -2x \end{array} \right\} = \int -2x + \frac{3x+4}{1+x^2} dx = \int -2x dx + \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx = \\
 &= -2 \int x dx + \int \frac{3x}{1+x^2} dx + \int \frac{4}{1+x^2} dx = -2 \frac{x^2}{2} + 3 \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\
 &= \boxed{-x^2 + \frac{3}{2} \ln(1+x^2) + 4 \operatorname{arctg} x + K}
 \end{aligned}$$

3.2. Método de integración por partes

Este método suele ser apropiado cuando en el integrando figuran funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas multiplicadas entre ellas o por expresiones polinómicas.

El método consiste en descomponer el integrando en **dos partes**:

Una de ellas se llama u ; la otra se designa por dv que debe integrarse fácilmente. Una vez integrada dv surgirá otra integral que deberá ser más sencilla que la inicial.

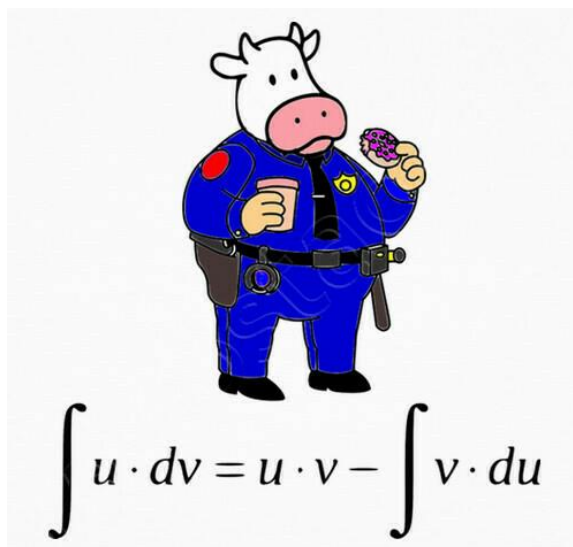
La fórmula a aplicar es la siguiente:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$



Observación:

Para la elección de las partes u y dv no hay un criterio concreto; pero, puede ser recomendable tomar dv como la parte más grande del integrando que se pueda integrar de forma sencilla. El resto del integrando será u .



“Un día vi una vaca vestida de uniforme”



Ejemplos:

a) Calculamos $\int x \cdot \text{sen} x dx$.

$$\int x \cdot \text{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mezclan funciones polinómicas y trigonométricas} \\ \text{Integración por partes} \\ \int \boxed{x} \cdot \boxed{\text{sen} x dx} \Rightarrow u = x; \quad dv = \text{sen} x dx \end{array} \right\}$$

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = \boxed{-x \cos x + \operatorname{sen} x + K}$$

b) Calculamos $\int x \cdot e^x dx$.

$$\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mezclan funciones polinómicas y exponenciales} \\ \text{Integración por partes} \\ \int \boxed{x} \cdot \boxed{e^x dx} \Rightarrow u = x; \quad dv = e^x dx \end{array} \right\}$$

$$\int x \cdot e^x dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = x \cdot e^x - \int e^x dx = \boxed{-xe^x - e^x + K}$$

c) Calculamos $\int x^2 \cdot \ln x dx$.

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mezclan funciones polinómicas y logarítmicas} \\ \text{Integración por partes} \\ \int \boxed{x^2} \cdot \boxed{\ln x dx} \Rightarrow u = x^2; \quad dv = \ln x dx \end{array} \right\}$$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \ln x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \ln x dx = ¡Difícil! \end{array} \right\} =$$

No podemos seguir con estas partes que hemos elegido y cambiamos de separación en partes a estas otras para intentar que la integral sea inmediata.

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mezclan funciones polinómicas y logarítmicas} \\ \text{Integración por partes} \\ \int \boxed{\ln x} \cdot \boxed{x^2 dx} \Rightarrow u = \ln x; \quad dv = x^2 dx \end{array} \right\}$$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int dv = \int x^2 dx = ¡Fácil! = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \boxed{\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + K}$$

d) Calculamos $\int e^x \cdot \cos x dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mezclan funciones exponenciales y trigonométricas} \\ \text{Integración por partes} \\ \int \boxed{e^x} \cdot \boxed{\cos x dx} \Rightarrow u = e^x; \quad dv = \cos x dx \end{array} \right\}$$

$$\int e^x \cdot \cos x dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \cos x dx = \text{sen} x \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = e^x \cdot \text{sen} x - \int e^x \cdot \text{sen} x dx =$$

Esta integral puede volverse a hacer por partes:

$$\int e^x \cdot \text{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mezclan funciones exponenciales y trigonométricas} \\ \text{Integración por partes} \\ \int \boxed{e^x} \cdot \boxed{\text{sen} x dx} \Rightarrow u = e^x; \quad dv = \text{sen} x dx \end{array} \right\}$$

$$\int e^x \cdot \text{sen} x dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \text{sen} x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \text{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x) dx = -\cos x \cdot e^x + \int e^x \cos x dx$$

Si sustituimos la integral del principio y los resultados obtenidos, podemos observar que vuelve a aparecer la integral inicial:

$$\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \text{sen} x - \int e^x \cdot \text{sen} x dx =$$

$$= e^x \cdot \text{sen} x - \left(-\cos x \cdot e^x + \int e^x \cos x dx \right) = e^x \cdot \text{sen} x + \cos x \cdot e^x - \int e^x \cos x dx$$

Despejando en esta igualdad:

$$\int e^x \cdot \cos x dx + \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \text{sen} x + \cos x \cdot e^x \Rightarrow 2 \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \text{sen} x + \cos x \cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x \cdot \text{sen} x + \cos x \cdot e^x}{2} \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x dx = \boxed{\frac{e^x (\text{sen} x + \cos x)}{2} + K}$$

3.3. Integración por cambio de variable

Consiste en hacer un cambio de variable ($x = g(t)$ o $t = h(x)$), según convenga) de manera que la integral inicial resulte más fácil de calcular.

El proceso es el siguiente.

Si se desea hallar la integral $\int f(x)dx$, si se hace $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$.

Con esto, puede escribirse: $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$.

Una vez resuelta la integral en la variable t hay que deshacer el cambio inicial, pues la solución debe darse en función de x .



Ejemplos:

- a) Para calcular $\int (2x-3)^5 dx$ puede hacerse un cambio de variable para que sea más fácil la integral resultante, para ello se puede valorar que la base es más sencilla si la cambiamos por t y así no tenemos que hacer ajustes de constantes.

$t = 2x - 3 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$ Sustituyendo en la integral inicial quedaría:

$$\int (2x-3)^5 dx = \int t^5 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{2} \frac{t^6}{6} = \frac{t^6}{12}$$

Deshaciendo el cambio de variable (volviendo a x)

$$\int (2x-3)^5 dx = \frac{t^6}{12} = \boxed{\frac{(2x-3)^6}{12} + K}$$

$$\text{b) } \int e^{4x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 4x \Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right\} = \int e^t \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int e^t dt = \frac{1}{4} e^t =$$

$$= \left\{ \text{Deshaciendo el cambio de } t \text{ a } 4x \right\} = \boxed{\frac{1}{4} e^{4x} + K}$$

$$\text{c) } \int \frac{4}{5-6x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 5-6x \Rightarrow dt = -6dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{6}dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{4}{t} \frac{-1}{6} dt = \frac{-4}{6} \int \frac{1}{t} dt = \frac{-2}{3} \ln t = \left\{ \text{Deshago el cambio } t \text{ a } (5-6x) \right\} = \boxed{\frac{-2}{3} \ln(5-6x) + K}$$

$$\text{d) } \int x\sqrt{1+x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{1+x} = t \Rightarrow 1+x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \end{array} \right\} =$$

$$= \int x \cdot t \cdot 2t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como debo quitar esa } x \\ \text{despejo la } x \text{ del cambio de variable} \\ \text{y la sustituyo por } x = t^2 - 1 \end{array} \right\} = \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = \int 2t^4 - 2t^2 dt =$$

$$= 2 \int t^4 dt - 2 \int t^2 dt = 2 \frac{t^5}{5} - 2 \frac{t^3}{3} = \boxed{\frac{2}{5} \sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} + K}$$

e) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ = Puede hacerse con un cambio de variable, todo el denominador lo llamamos t .

$$1 + e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x}$$

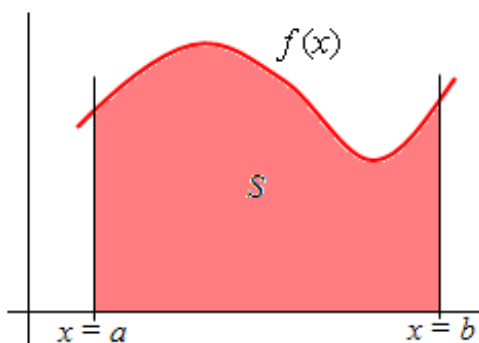
$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{\cancel{e^x}}{t} \frac{dt}{\cancel{e^x}} = \int \frac{1}{t} dt = \ln t$$

Deshaciendo el cambio de variable t por $1+e^x$:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln t = \boxed{\ln(1+e^x) + K}$$

4. Integral definida: área bajo una curva

La integral definida permite calcular el área del recinto limitado, en su **parte superior** por la gráfica de una función $f(x)$, continua y no negativa, en su **parte inferior** por el eje OX , y en los **laterales** por las rectas $x = a$ y $x = b$. Esto es, el área S del recinto coloreado en la figura adjunta.



El valor de este área se llama “**integral definida de $f(x)$ entre a y b** ” y se escribe: $\int_a^b f(x) dx$.

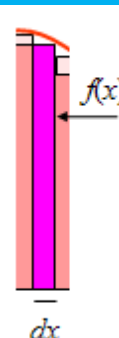
$$\int_a^b f(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \text{integrando} \\ \text{límites de integración} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \text{límite superior} \\ a = \text{límite inferior} \end{array} \right.$$

**Observación:**

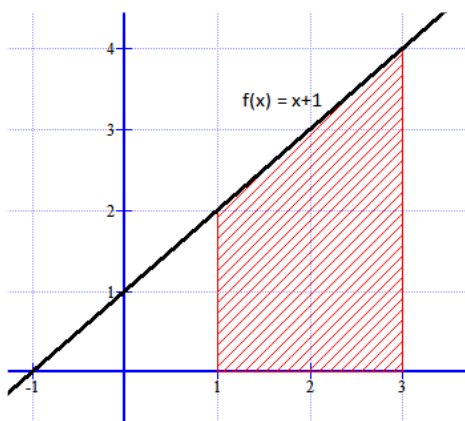
El signo $\int$ es en realidad una ese (S de suma) estirada. Los números a y b son los límites (en el sentido de bordes) de integración. La función $f(x)$ se llama integrando. Así pues, $\int_a^b f(x)dx$ indica que hay que integrar (sumar) $f(x)$ desde el punto a hasta el punto b .

El símbolo dx se lee diferencial de x , siendo x la variable independiente de la función f . La expresión $f(x) \cdot dx$ puede considerarse el área del rectángulo señalado a la derecha, cuya base es dx y su altura, $f(x)$; ambos variables, con dx pequeña.

$\int_a^b f(x)dx$ es la suma del área de esos rectángulos desde a hasta b .

**Ejemplos:**

- a) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x + 1$ entre $x = 1$ y $x = 3$:
Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:



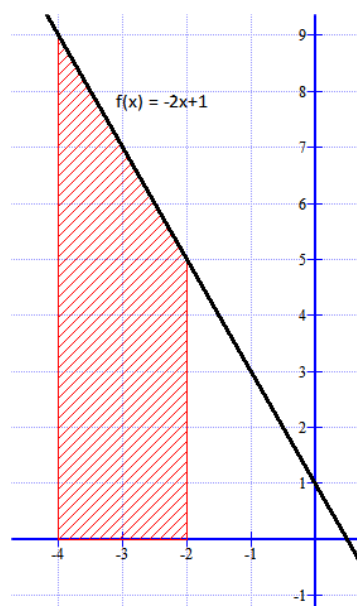
El área pedida será:

$$\text{Área} = \int_1^3 x + 1 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Contando cuadraditos=} \\ 5 \text{ cuadraditos} + 2 \text{ medios cuadraditos} \end{array} \right\} = 6 \text{ u}^2$$

O bien con métodos geométricos:

Área de la zona sombreada = Área del cuadrado de lado 2 + el área del triángulo de base y altura 2 = $2^2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4 + 2 = 6 \text{ u}^2$.

- b) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -2x + 1$ entre $x = -4$ y $x = -2$.
Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:



El área pedida será:

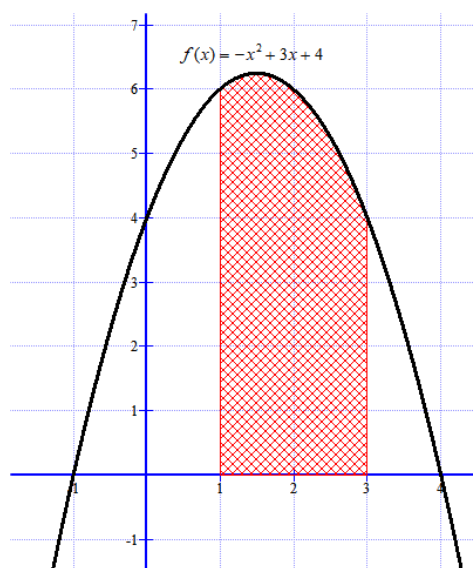
$$\text{Área} = \int_{-4}^{-2} -2x + 1 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Contando cuadraditos=} \\ 12 \text{ cuadraditos} + \\ + 4 \text{ trozos que parecen ser 2 cuadraditos} \end{array} \right\} = 14 \text{ u}^2$$

O bien con métodos geométricos:

$$\begin{aligned} \text{Área de la zona sombreada} &= \\ &= \text{Área del rectángulo de base 2 y altura 5} + \text{el área del triángulo de base 2 y altura 4} = \\ &= 2 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 4}{2} = 10 + 4 = 14 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

- c) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ entre $x=1$ y $x=3$.

Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:



El área pedida será:

$$\text{Área} = \int_1^3 -x^2 + 3x + 4dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Contando cuadraditos=} \\ 10 \text{ cuadraditos} + \\ + 3 \text{ trozos que parecen ser 1 cuadradito} \end{array} \right\} = 11 \dots u^2$$

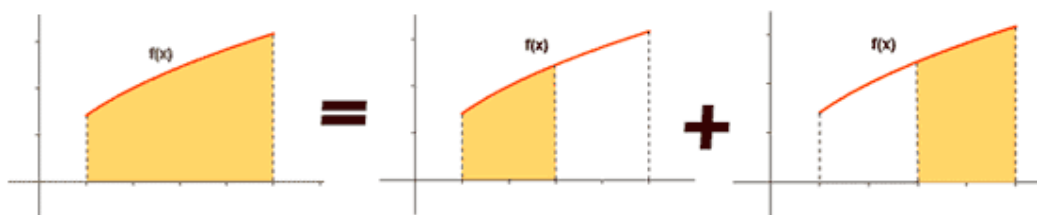


Observación:

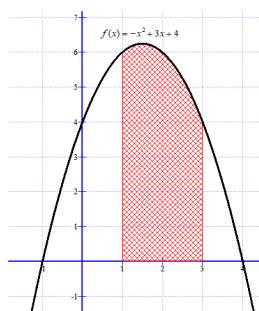
Para hallar el **área** bajo una curva el método del conteo no ha sido muy preciso. Con métodos geométricos ya no es posible el cálculo del área bajo una curva. Necesitamos otro método, aquí es donde aparece el **cálculo integral** y las integrales definidas.

4.1. Propiedades de las integrales definidas

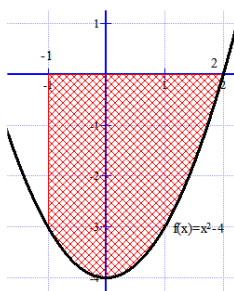
- 1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ Si los límites de integración coinciden, la integral definida vale 0.
- 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.
- 3) $\int_a^b kdx = k(b-a)$. Siendo K un número real cualquiera.
- 4) $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$. Siendo K un número real cualquiera. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.
- 5) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales.
- 6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Siendo c un punto interior del intervalo $[a, b]$, la integral definida se descompone como suma de dos integrales correspondientes a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.



- 7) Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$



8) Si $f(x) \leq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$



4.2. Regla de Barrow

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, esto es $\int f(x) dx = F(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



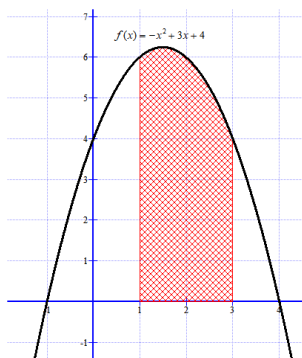
Ejemplos:

a) $\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = \boxed{2}$

b) $\int_0^1 2 - e^x dx = [2x - e^x]_0^1 = (2 \cdot 1 - e^1) - (2 \cdot 0 - e^0) = 2 - e + 1 = \boxed{3 - e}$

c) Vamos a calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ entre $x=1$ y $x=3$:

Dibujando la gráfica y la situación planteada se observa que:

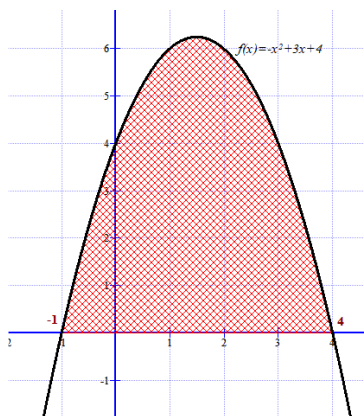


El área pedida será:

$$\int_1^3 -x^2 + 3x + 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) =$$

$$= \frac{-54 + 81 + 72}{6} - \frac{-2 + 9 + 24}{6} = \frac{68}{6} = \frac{34}{3} = 11,333... u^2$$

- d) Vamos a calcular el área encerrada entre la gráfica anterior y el eje de OX . En estos casos no se dan los extremos a y b del intervalo, sino que hay que determinarlos. Para ello, basta con resolver la ecuación $f(x) = 0$, pues a y b son los puntos de corte de la gráfica con el eje OX . Así, si se desea calcular la superficie encerrada entre la curva $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y el eje OX , los límites de integración se obtienen resolviendo la ecuación $0 = -x^2 + 3x + 4$. (En la figura anterior se observa que esos puntos son -1 y 4).



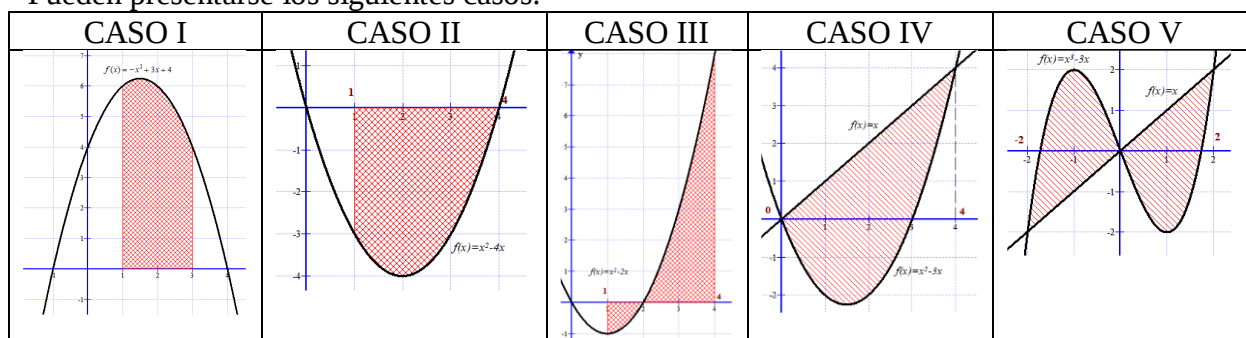
El valor del área es:

$$\int_{-1}^4 -x^2 + 3x + 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + 3\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) =$$

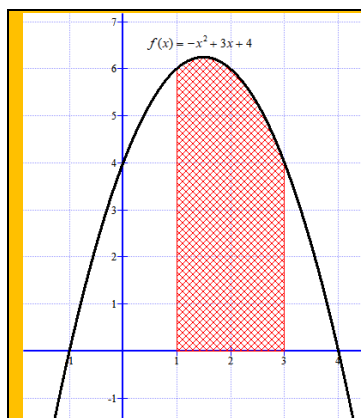
$$= \frac{-128 + 144 + 96}{6} - \frac{2 + 9 - 24}{6} = \frac{125}{6} = 20,83... u^2$$

4.3. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos

Pueden presentarse los siguientes casos:



Caso I. La función es positiva en todo el intervalo de integración.



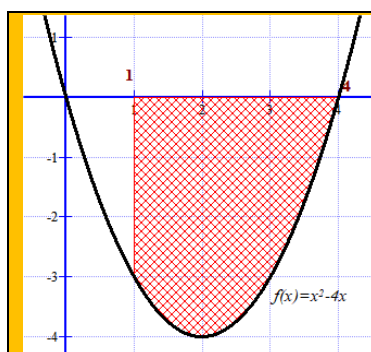
El área viene dada por: $\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$.



Ejemplo:

Este ejemplo ha sido resuelto anteriormente: $\text{Área} = \int_1^3 -x^2 + 3x + 4dx = \left[\frac{34}{3} u^2 \right]$.

Caso II. La función es negativa en todo el intervalo de integración.



El área viene dada por: $\text{Área} = -\int_a^b f(x)dx$

o bien $\text{Área} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$



Observación:

- 1) Es evidente que el recinto por debajo del eje, limitado por $f(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual al recinto superior, limitado por $-f(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$.
- 2) Es evidente que el área de un recinto plano no puede tener valor negativo.



Ejemplo:

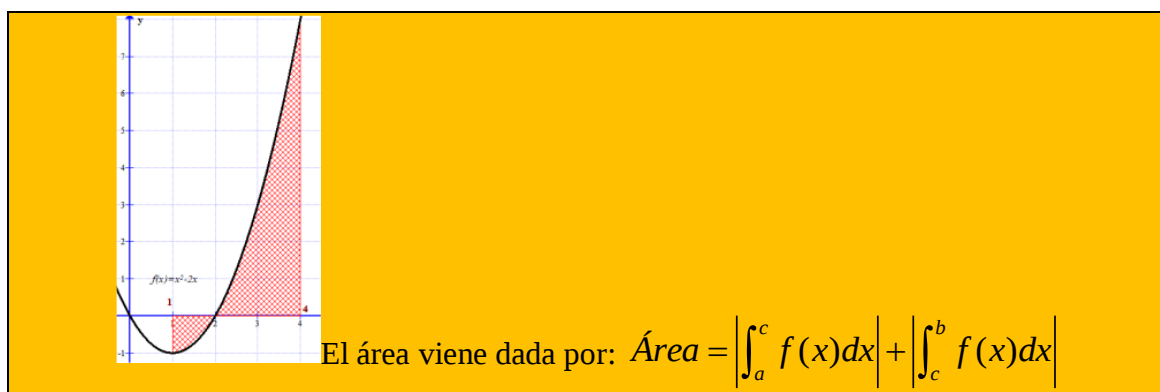
El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 4x$ y el eje OX viene dada por:

$$\int_1^4 x^2 - 4x dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_1^4 = \left(-\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 \right) = \frac{-64}{3} - 32 + \frac{1}{3} + 2 = -\frac{153}{3}$$

$$\text{Área} = -\int_1^4 x^2 - 4x dx = \boxed{\frac{153}{3} u^2}$$

Caso III. La función cambia de signo en el intervalo de integración (corta al eje OX).

El punto c , de corte, se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$



Ejemplos:

- a) El área encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje OX, en el intervalo $[1, 4]$, que aparece en la imagen superior, se obtiene realizando los siguientes pasos.

Averiguemos el punto o puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}; \text{ El único valor que está en el intervalo } [1, 4] \text{ es } x = 2.$$

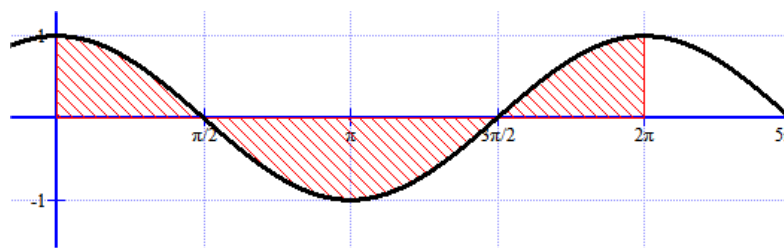
Calculemos las dos integrales definidas (de 1 a 2 y de 2 a 4) y sumando sus valores absolutos obtendremos el valor final del área.

$$\int_1^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 \right) = \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_2^4 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) = \frac{20}{3}$$

$$\text{Área} = \left| \int_1^2 x^2 - 2x dx \right| + \left| \int_2^4 x^2 - 2x dx \right| = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \boxed{\frac{22}{3} u^2}$$

- b) El área limitada por la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje OX en el intervalo $[0, 2\pi]$, viene dada por la suma:



Averigüemos el punto o puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX:

$$\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ \dots \end{cases} ; \text{ El único valor que está en el intervalo } [0, 2\pi] \text{ son } x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}.$$

Aunque podríamos utilizar la simetría de la función para hallar el área de la zona rayada, vamos a calcular las tres integrales definidas (de 0 a $\pi/2$, de $\pi/2$ a $3\pi/2$ y de $3\pi/2$ a 2π) y sumando sus valores absolutos obtendremos el valor final del área.

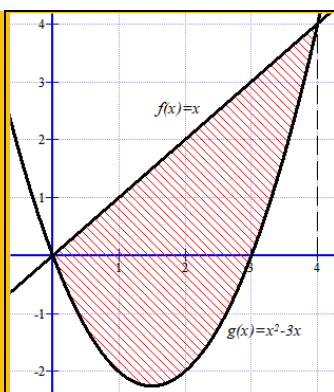
$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = (\operatorname{sen} \pi/2) - (\operatorname{sen} 0) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_{\pi/2}^{3\pi/2} = (\operatorname{sen} 3\pi/2) - (\operatorname{sen} \pi/2) = -1 - 1 = -2$$

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_{3\pi/2}^{2\pi} = (\operatorname{sen} 2\pi) - (\operatorname{sen} 3\pi/2) = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx \right| + \left| \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx \right| = 1 + 2 + 1 = \boxed{4 \text{ u}^2}$$

Caso IV. Si el recinto viene limitado por dos curvas, con $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo de integración.



El área encerrada entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$, siendo $f(x) \geq g(x)$; $x = a$ y $x = b$ sus puntos de corte, viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

**Ejemplos:**

- a) El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - 3x$, que aparece en la imagen superior, tiene un paso previo que es comprobar si se cortan sus gráficas y averiguar cuál es mayor.

$$x = x^2 - 3x \Rightarrow 0 = x^2 - 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Y con un valor de x comprendido entre 0 y 4 (por ejemplo, $x = 2$) vemos cual es mayor:

$$f(2) = 2 \text{ y } g(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \Rightarrow f(x) \geq g(x) \text{ en el intervalo } [0, 4]$$

El área se obtendrá con la expresión:

$$\text{Área} = \int_0^4 f(x) - g(x) dx = \int_0^4 x - (x^2 - 3x) dx = \int_0^4 -x^2 + 4x dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = \left(\frac{-4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{-0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right) = \boxed{\frac{32}{3} u^2}$$

- b) El cálculo del área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

$f(x) = -x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x + 4$ tiene un paso previo que es comprobar si se cortan sus gráficas y averiguar cuál de ellas es mayor.

$$-x^2 + 3x + 1 = -x + 4 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Y con un valor de x comprendido entre 1 y 3 (por ejemplo, $x = 2$) vemos cual es mayor:

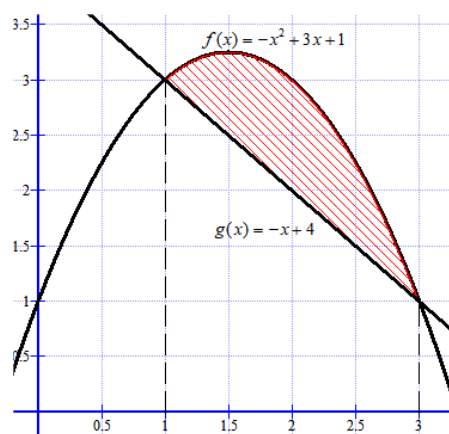
$$f(2) = -4 + 6 + 1 = 3 \text{ y } g(2) = -2 + 4 = 2$$

$$\Rightarrow f(x) \geq g(x) \text{ en el intervalo } [1, 3]$$

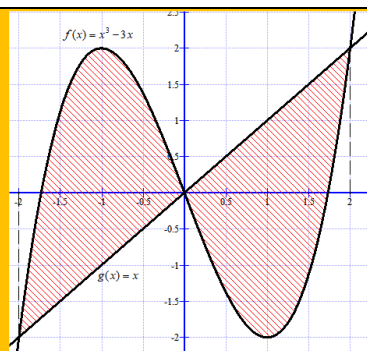
El área se obtendrá con la expresión:

$$\text{Área} = \int_1^3 f(x) - g(x) dx = \int_1^3 -x^2 + 3x + 1 - (-x + 4) dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3 dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \left(\frac{-3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{-1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) = \boxed{\frac{4}{3} u^2}$$



Caso V. Si el recinto viene limitado por dos curvas que se cortan en el intervalo de integración.



El área encerrada entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$, siendo $x = a$, $x = c$ y $x = b$ sus puntos de corte, viene dada por:

$$\text{Área} = \left| \int_a^c f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) - g(x) dx \right|$$



Ejemplos:

- a) Determinar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = x^3 - 3x^2$.

Primero averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$x^2 - 3x = x^3 - 3x^2 \Rightarrow 0 = x^3 - 4x^2 + 3x \Rightarrow 0 = x(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow x = 0; x = 1; x = 3$$

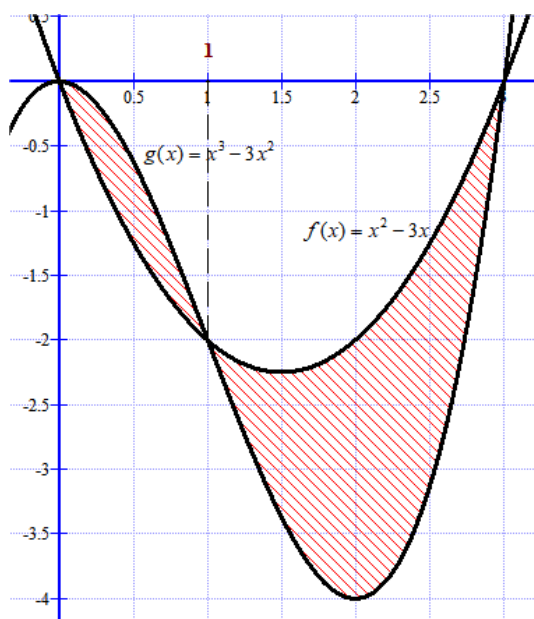
$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^3 - 3x^2 - (x^2 - 3x) dx \right| + \left| \int_1^3 x^3 - 3x^2 - (x^2 - 3x) dx \right| =$$

$$\int x^3 - 3x^2 - (x^2 - 3x) dx = \int x^3 - 4x^2 + 3x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$$

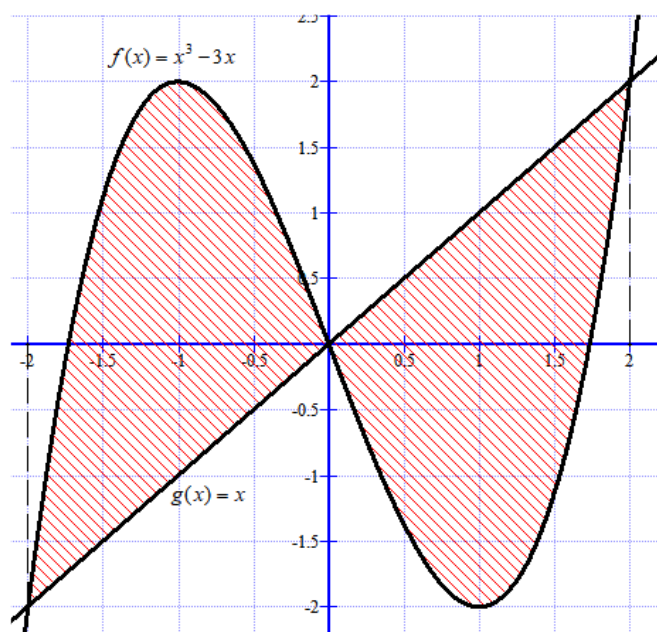
El área quedaría:

$$\text{Área} = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_1^3 \right| =$$

$$= \left| \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - 0 \right) \right| + \left| \left(\left(\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) \right) \right| = \left| \frac{5}{12} \right| + \left| \frac{-32}{12} \right| = \left| \frac{37}{12} \right| u^2$$



- b) El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$ es el área del recinto sombreado de la imagen inferior.



Vemos que las dos gráficas se cortan en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. Calculamos el área usando el cálculo integral.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^0 x^3 - 3x - (x) dx + \int_0^2 x - (x^3 - 3x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = (0 + 4) + (4 - 0) = \boxed{8u^2} \end{aligned}$$

**Ejercicios:****Integrales indefinidas**

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (3x^2 + x - 2\sqrt{x}) dx$

b) $\int x(4 - 4x^2) dx$

c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx$

d) $\int \frac{5x}{3 + 3x^2} dx$

e) $\int \cos(4x + 3) dx$

f) $\int \frac{1}{x^2} dx$

g) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos 5x \right) dx$

h) $\int x \cos(3x^2) dx$

i) $\int \cos 2x - 3e^{2x-3} dx$

j) $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$

k) $\int 5x(1 - 2x^2)^2 dx$

l) $\int (2 - 3x)^2 dx$

m) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$

n) $\int \frac{3}{1 + x^2} dx$

o) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3 - x^3}} dx$

p) $\int \frac{5x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

q) $\int \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

r) $\int 2xe^{3x^2} dx$

s) $\int (1 - x)^3 dx$

t) $\int x(1 - x)^3 dx$

u) $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1 - 2x)^2 dx$

b) $\int (3x^2 - 2x)^2 dx$

c) $\int \frac{x}{1 + 3x^2} dx$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{1 + 3x^2}} dx$

e) $\int \sqrt{x}(7x^2 + 3) dx$

f) $\int \frac{5x + \sqrt{3x}}{x^2} dx$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int e^{4x} dx$

b) $\int e^{\frac{x}{3}} dx$

c) $\int xe^{1-x^2} dx$

d) $\int 4^x dx$

e) $\int 4 \cdot 3^x dx$

f) $\int (e^{2x} + e^{-x}) dx$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$

c) $\int \frac{x^3 - 1}{x + 3} dx$

d) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x} dx$

e) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x + 1} dx$

f) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x^2 + 1} dx$

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x \cos x dx$

b) $\int xe^{2x} dx$

c) $\int x \ln x dx$

d) $\int x^3 \cos x dx$

e) $\int \frac{x}{e^x} dx$

f) $\int \ln x dx$

6. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int \sin^3 x dx$

c) $\int \frac{dx}{x(4-\ln x)}$

d) $\int x^3\sqrt{4+x^2} dx$

7. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.

8. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+1} dx$

b) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} dx$

9. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2}{1+x^2} dx$

b) $\int \frac{2}{(1+x)^2} dx$

c) $\int \frac{2x}{(1+x)^2} dx$

d) $\int 2 \ln x dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

f) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$

g) $\int \tan x dx$

10. Determina la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

11. La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = (x-1)^3(x-3)$. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$.



Integrales definidas y áreas

12. Halla el valor de:

a) $\int_{-2}^3 (x^2 + 2) dx$

b) $\int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}} dx$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$

d) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1} dx$

13. Calcula la integral $\int_1^e \ln(x^2) dx$.

14. Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ calcula $\int_e^{e^2} \frac{3}{x(4+\ln x)} dx$.

15. Calcula razonadamente las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^\pi e^{2x} \cos x dx$

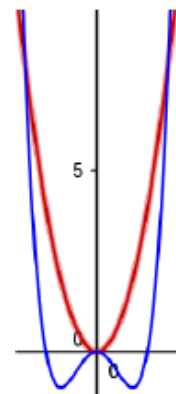
b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx$

16. Calcula el área de la región limitada por $y = \frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas $x=1$, $x=4$.

17. Halla la superficie del recinto plano encerrado entre la curva dada por la función $f(x) = xe^x$ y el eje OX, en el intervalo $[-2, 0]$.

18. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$ y el eje OX, en el intervalo $[0, 2]$.

19. Calcula el área determinada por las curvas de ecuaciones $y = 2x^2$ e $y = x^4 - 2x^2$, representadas en el dibujo adjunto.



20. Halla el área de la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

21. Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y = x^2$ y la hipérbola $y = \frac{8}{x}$. Calcula su área.

22. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int \operatorname{sen} x e^{\cos x} dx$. Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x e^{\cos x}$.

23. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x dx$. Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

24. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$. Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

25. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int x e^x dx$. Determine la primitiva de la función $f(x) = x e^x$ que pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

26. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$. Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, y la gráfica de la función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

27. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$. Determine el valor de $a > 0$

para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$

28. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$. Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
29. EBAUM. Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 e^x dx$. Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 e^x$ que cumpla la condición $F(0) = 1$.

Soluciones:

1. a) $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{3/2} + K$ b) $2x^2 - x^4 + K$ c) $-\frac{1}{10}e^{-2x} + K$ d) $\frac{5}{6}\ln(3+3x^2) + K$
 e) $\frac{1}{4}\sin(4x+3) + K$ f) $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{15}\sin 5x + K$ g) $6\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x + K$
 h) $\frac{1}{6}\sin 3x^2 + K$ i) $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{3}{2}e^{2x-3} + K$ j) $\frac{1}{3}\sin^3 x + K$ k) $-\frac{5}{12}(1-2x^2)^3 + K$
 l) $4x - 6x^2 + 3x^3 + K$ m) $\frac{1}{3}\ln(x^3+2) + K$ n) $3\arctg x + K$ o) $-\frac{8}{3}\sqrt{3-x^3} + K$
 p) $-5\sqrt{1-x^2} + K$ q) $5\arcsen x + K$ r) $\frac{1}{3}e^{3x^2} + K$ s) $x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 + K$
 t) $\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + K$ u) $\ln x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + K$
2. a) $\frac{5}{2}x^2 - \frac{20}{3}x^3 + 5x^4 + K$ b) $\frac{9}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 + K$ c) $\frac{1}{6}\ln(1+3x^2) + K$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1} + K$
 e) $2x^{7/2} + 2x^{3/2} + K$ f) $5\ln x - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + K$
3. a) $\frac{1}{4}e^{4x} + K$ b) $3e^{x/3} + K$ c) $-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + K$ d) $4^x \cdot \frac{1}{\ln 4} + K$ e) $\frac{4}{\ln 3} \cdot 3^x + K$ f) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x}$
4. a) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3\ln x + K$ b) $\frac{4}{3}x^{3/4} - \frac{12}{7}x^{7/12} + K$ c) $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 28\ln(x+3) + K$
 d) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 5\ln x + K$ e) $x^3 - 2x^2 + 8x - 13\ln(x+1) + K$
 f) $\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\arctg x + K$
5. a) $x\sen x + \cos x + K$ b) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + K$ c) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}e^{2x} + K$
 d) $x^3\sen x + 3x^2\cos x - 6x\sen x - 6\cos x + K$ e) $-xe^{-x} - e^{-x} + K$ f) $x\ln x - x + K$
6. a) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + K$ b) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + K$ c) $-\ln(4-\ln x) + K$ d) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4+x^2)^4} + K$
7. $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + K$

8. a) $\frac{1}{\ln 2} \operatorname{arctg} 2^x + C$ b) $\frac{-1}{1+e^x} + K$ c) $\ln \frac{e^x + 1}{e^x + 2} + K$

9. a) $2 \operatorname{arctg} x + K$ b) $\frac{-2}{1+x} + K$ c) $2 \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} + K$ d) $2(x \ln x - x) + K$

e) $e^x - \ln(1+e^x) + K$ f) $\frac{1}{3 \cos^3 x} + K$ g) $-\ln(\cos x) + C$

10. $f(x) = \frac{2e^{5x}}{5} \left(x - \frac{1}{5} \right) + \frac{52}{25}$

11. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

12. a) $65/3$ b) 8 c) $7/3$ d) $-\frac{1}{6}(e^{-2} - e)$

13. 2

14. $3 \ln \frac{6}{5}$

15. a) $\frac{1}{5}(-2 - 2e^{2\pi})$ b) $\frac{1}{2} \ln 2$

16. $4 \ln 4$

17. $1 - 3e^{-2}$

18. $4 \ln 2 - 2$

19. $128/15 u^2$

20. $2\sqrt{2} u^2$

21. $8 \ln 2 - \frac{7}{3} u^2$

22. $F(x) = -e^{\cos x} + K$ Área = $e - 1$

23. $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$ $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

24. $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 1} + C$. Área = $1 u^2$

25. $F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$ $F(x) = x \cdot e^x - e^x + 2$

26. $F(x) = -\frac{2x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C$ Área = $\frac{4}{\pi^2} u^2$

27. $F(x) = \frac{-1}{1+e^x} + C$ $a = \ln 3$

28. $F(x) = \frac{-1}{x^2 + x + 1} - \frac{6}{7} u^2$

29. $F(x) = x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x + C$ $F(x) = x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x - 1$

Ejercicios de Análisis en pruebas EBAU y PAU de Murcia

Extraordinaria 2025

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

b) [0,5] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5}$

c) [1] $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

Solución: a) 0. b) 0. c) 1.

2B) Considere la función $f(x) = \operatorname{tg}^3(x)$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) [0,75] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

c) [0,25] Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

Solución: a) $\int f(x) dx = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C$. b) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ unidades. c)

www.ebaumatematicas.com.

Ordinaria 2025

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) [0,5] Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{98 - x^2}$$

b) [2] Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) El triángulo rectángulo cumpliendo las condiciones con área máxima tiene ambos catetos iguales y de longitud 7 cm. Este valor máximo del área es 24.5 centímetros cuadrados.

2B) Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) [1] Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 1$ y $x = 2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

Solución: a) $\int f(x) dx = (x+1)\ln(x+1) - x \ln x + C$. b) www.ebaumatematicas.com

Extraordinaria 2024

3: Considere la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3}$, definida para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

a) [0,5] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) [1,5] Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) [0,5] Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ b) La función crece en $(0, 3)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(3, 3)$. c) Tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$ y un máximo absoluto en $(3, 3)$.

4: Considere la función $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x > 0$.

a) [0,5] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$.

c) [0,5] Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x) dx = 4$.

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ b) $\int f(x) dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$ c) $a = e^2$.

Ordinaria 2024

3: Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2}$

b) [0,75] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+9} - \sqrt{x-9}$

c) [0,75] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Solución: a) -2.5 b) 0 c) 0

4: a) [1,5] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \sin x dx$.

b) [1] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \sin x$.

Solución: a) $\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C$ b) El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.28 unidades cuadradas

Extraordinaria 2023

3: Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) [0,75 p.] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) [0,75 p.] Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) [1 p.] Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

Solución: a) 0. b) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$. c) $\int f(x) dx = -xe^{-x} - e^{-x} + K$

4: Considere la función $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde

$$\cos^2 x = (\cos x)^2.$$

a) [1 p.] Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

b) [0,75 p.] Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$.

c) [0,75 p.] Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(\pi, 1)$

Solución: a) $\int f(x) dx = -\arctg(\cos x) + K$ b) $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \frac{\pi}{4}$

c) $F(x) = -\arctg(\cos x) + 1 - \frac{\pi}{4}$

Ordinaria 2023

3: Calcule los siguientes límites:

a) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x \sin(x)}$

b) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x}$

Solución: a) -2 b) 1/9

4: Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) [0,5 p.] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) [0,5 p.] Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) [1 p.] Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

d) [0,5 p.] Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución: a) 1 b) $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

c) $F(x) = x - \arctg(x) + \frac{\pi}{4}$

Extraordinaria 2022

3: Considere la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) [0,5 p.] Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

b) [1 p.] Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

- c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de a , la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x = 1$.

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ b) $a = 1$ c) La función es derivable en $x = 1$ y su valor es $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

- 4: Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

- a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
 b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.
 c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

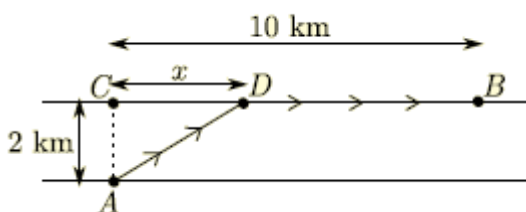
Solución: a) $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

b) $\int f(x) dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + K$ c) $F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 3$

Ordinaria 2022

- 3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



- a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{10 - x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

- b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución: a) en web b) El punto D está situado aproximadamente a 707 metros del punto C. Y tardaría 1 hora y 18 minutos aproximadamente.

- 4: Considere la función $f(x) = x \ln(x)$, definida para $x > 0$.

- a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
 b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.
 c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

Solución: a) $f'(x) = \ln(x) + 1$. La función decrece en $(0, 1/e)$ y crece en $(1/e, +\infty)$

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$ c) $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

Extraordinaria 2021

3: Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solución: a) La función crece en $(0, 2)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Tiene un mínimo

relativo en $P(0, 0)$ y un máximo relativo en $Q\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

4: a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int x \operatorname{sen}(x^2) dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x \operatorname{sen}(x^2) dx = 1$

Solución: a) $\int x \operatorname{sen}(x^2) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + K$ b) $a = \sqrt{\pi}$

Ordinaria 2021

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2 .

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es $90\pi \text{ cm}^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) El cilindro de $90\pi \text{ cm}^3$ con dimensiones que minimizan el coste es el que tiene como radio 3 cm y como altura 10 cm

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2 \ln(x) dx$. Determine la primitiva de la función $f(x) = x^2 \ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

Solución: a) 0 b) $\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + K$. $F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$

Extraordinaria 2020

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$

b) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$

Solución: a) $1/3$ b) 0

4: a) [2 p.] Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2) dx$.

b) [0,5 p.] Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

Solución: a) $\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctg(x) + K$ b) $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2$

Ordinaria 2020

3: [2,5 p.] De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución: Un triángulo rectángulo con área máxima tiene catetos iguales a $\sqrt{8}$ e hipotenusa 4. El área máxima tiene un valor de $4 u^2$.

4: a) [2 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ y la recta vertical } x=1.$$

Solución: a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = x - 2\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x})^2 + C$ b) Área $= -1 + \ln 4 = 0,38 u^2$

Septiembre 2019

A.2:

a) [1,5 p.] Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \frac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) [1 p.] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Solución: a) La función tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = +\sqrt{2}$. La función decrece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (+\sqrt{2}, +\infty)$ y crece en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. b) $1/2$

B.2:

a) [1 p.] Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

b) [0,5 p.] Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1,2).

c) [1 p.] Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

Solución: a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ b) $F(x) = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}$ c) 0

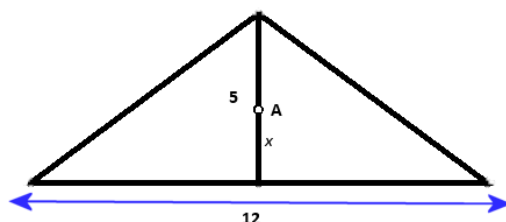
Junio 2019**A.2:**

a) [1,5 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x dx$.

b) [1 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución: a) $\int x^2 \cos x dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2\operatorname{sen} x + K$ b) $\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) [0,5 p.] Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$

b) [1,5 p.] Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) [0,5 p.] Calcule dicha cantidad mínima.

Solución: b) $x = \sqrt{12}$ c) $f(\sqrt{12}) = 5 + 6\sqrt{3}$

Septiembre 2018

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

a) [1 p.] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})$.

b) [1 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x}$.

Solución: a) 0 b) 1

CUESTIÓN A.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \operatorname{sen} x e^{\cos x} dx$

b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x e^{\cos x}$.

Solución: a) $F(x) = -e^{\cos x} + K$ b) Área = $e - 1$

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ con $-4 < x < 4$.

a) [1 p.] Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) [1 p.] Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

Solución: a) $f'(x) = \frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}$, sus puntos críticos son $x=-3$ y $x=3$

b) $x=-3$ es mínimo y $x=3$ es máximo

CUESTIÓN B.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$

b) [0,5 p.] Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

Solución: a) $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$ b) $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

Junio 2018

CUESTIÓN A.2:

a) [1,5 p.] Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

b) [0,5 p.] Calcule dicha suma máxima.

Solución: a) Los números son 2 y 8 b) La suma máxima es 9,386.

CUESTIÓN A.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$

b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Solución: a) $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+1} + C$ b) Área = 1 u².

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x < 0 \\ a + b \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros **a** y **b** para los cuales la función **f(x)** es continua y derivable en $x = 0$.

Solución: $a=b=1$

CUESTIÓN B.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x e^x dx$

b) [0,5 p.] Determine la primitiva de la función $f(x) = x e^x$ que pasa por el punto de coordenadas (0, 1).

Solución: a) $F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$ b) $F(x) = x \cdot e^x - e^x + 2$

Septiembre 2017

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^x$.

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Solución: a) e^{-4} b) $\frac{1}{2}$

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$.

b) [0'5 puntos] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$ que cumpla la condición $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Solución: a) $F(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$ b) $F(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + \frac{\pi}{4}$

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se pide:

a) [0,5 puntos] Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) [1,5 puntos] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

Solución: a) 0 b) $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ y es creciente en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Presenta un mínimo relativo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo relativo en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

Solución: $F(x) = \frac{-\ln(1+x^2)}{x} + 2\operatorname{arctg} x + C$

Junio 2017

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4} \right)$.

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$.

Solución: a) $\frac{1}{4}$ b) 2

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$.

b) [0'5 puntos] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Solución: a) $F(x) = -\frac{2x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C$ b) $\text{Área} = \frac{4}{\pi^2} u^2$

CUESTIÓN B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+ K?

Solución: Se minimiza el coste con K = 2 millones de euros y L = 1 millón de euros.

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{x^2 + x - 6} dx$.

Solución: $F(x) = \frac{2}{5} \ln|x-2| + \frac{3}{5} \ln|x+3| + C$

Septiembre 2016

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{e^{1+x^2}}$$

se pide:

a) [1 punto] Estudie las asíntotas de la gráfica de f(x).

b) [1,5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

Solución: a) No tiene asíntota vertical ni oblicua y la horizontal es $y=0$ b) La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y decreciente en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. La función presenta un mínimo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo en $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

b) [1 punto] Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$

Solución: a) $F(x) = \frac{-1}{1+e^x} + C$ b) $a = \ln 3$

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) [1 punto] Determine el valor de a para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución: a) $+\infty$; 0 b) $a=0$

CUESTIÓN B.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx$

b) [1 punto] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$ que cumpla la condición $F(0) = 2$.

Solución: a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctan x + C$

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctan x + 2$

Junio 2016

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$.

b) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x}$.

Solución: a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{2}$

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.

b) [1 punto] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

Solución: a) $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$ b) $\frac{6}{7} u^2$

CUESTIÓN B.3: El número de personas, medido en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por la función $f(x) = \frac{90x}{x^2 + 2x + 9}$, donde x es el tiempo transcurrido, medido en días, desde que se inició el contagio.

- a) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es el número de personas enfermas el cuarto día?
 b) **[1,5 puntos]** ¿Qué día se alcanza el máximo número de personas enfermas? ¿Cuál es ese número máximo?
 c) **[0,5 puntos]** ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá erradicando con el paso del tiempo? Razone la respuesta. (Indicación: calcule el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y observe qué ocurre.)

Solución: a) 10909 personas aproximadamente b) El día 3, con 11250 personas c) Si, el límite es 0.

CUESTIÓN B.4:

- a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 e^x dx$.
 b) **[1 punto]** Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 e^x$ que cumpla la condición $F(0) = 1$.

Solución: a) $F(x) = x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x + C$ b) $F(x) = x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x - 1$

Septiembre 2015

CUESTIÓN A.3: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los siguientes límites:

- a) **[1,25 puntos]** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-6}{x+1} \right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}$
 b) **[1,25 puntos]** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

Solución: a) e^{-7} b) $+\infty$

CUESTIÓN A.4:

- a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\int \operatorname{tg}^2(x) dx$
 b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función $f(x) = \operatorname{tg}^2(x)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(\pi/4, 1)$.

Solución: a) $F(x) = \operatorname{tg} x - x + C$ b) $F(x) = \operatorname{tg} x - x + \frac{\pi}{4}$

CUESTIÓN B.3: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

- a) **[1 punto]** $f(x) = x \ln(x)$, con $x > 0$.
 b) **[1,5 puntos]** $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$, con $x \in \mathbb{R}$

Solución: a) $x = e^{-1}$ es un punto mínimo b) $x = 0$ es mínimo y $x=2$ es máximo

CUESTIÓN B.4:

- a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2) dx$

b) [0,5 puntos] De todas las primitivas de la función $f(x) = \ln(1+x^2)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, -2)$

Solución: a) $F(x) = x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2\arctg x + C$ b) $F(x) = x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2\arctg x - 2$

Junio 2015

CUESTIÓN A.3:

a) [1 punto] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{2/x}}$.

b) [1,25 puntos] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{2/x}}$

c) [0,25 puntos] ¿Es continua la función $f(x) = \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{2/x}}$ en $x = 0$? Justifique la respuesta.

Solución: a) 2 b) 0 c) No es continua

CUESTIÓN A.4:

a) [2 puntos] Calcule la integral indefinida $\int 2x \arctg x \, dx$.

b) [0,5 puntos] De todas las primitivas de la función $f(x) = 2x \arctg x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, -2)$.

Solución: a) $F(x) = x^2 \cdot \arctg x - x + \arctg x + K$ b) $F(x) = x^2 \cdot \arctg x - x + \arctg x - 2$

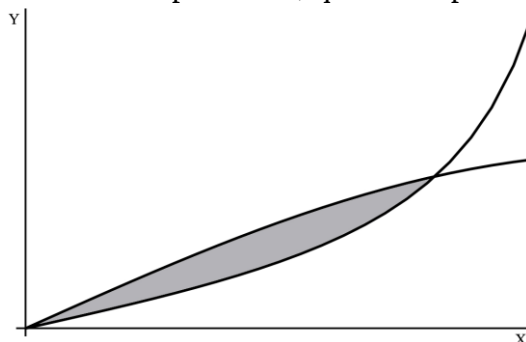
CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x^2) + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución: $a = 0$ y $b = -2$

CUESTIÓN B.4: Considere el recinto limitado por la gráfica de las funciones $f(x) = 2\operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{tg} x$ en el primer cuadrante del plano XY, que está representado en la figura adjunta.



a) [0,75 puntos] Determine los puntos de corte de dichas gráficas.

b) [1,75 puntos] Calcule el área de dicho recinto.

Solución: a) Los puntos de corte del dibujo son $(0,0)$ y $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ b) $\text{Área} = 1 - \ln 2$ u²

Septiembre 2014

CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos] Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

- a) $f(x)$ alcanza su máximo en el punto de abscisa $x = 100$;
- b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(49,91)$.

Solución: Los valores de las variables son $a = -1$ y $b = 20$

CUESTIÓN A.4:

- a) [2 puntos] Calcule la integral indefinida $\int \arctg x \, dx$, donde $\arctg x$ denota la función arco-tangente de x .
- b) [0,5 puntos] De todas las primitivas de la función $f(x) = \arctg x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0,3)$.

Solución: a) $F(x) = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + K$ b) $F(x) = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + 3$

CUESTIÓN B.3: Calcule los siguientes límites:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-5} - \frac{x^2}{x-2} \right)$

b) [1,5 puntos] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2}$

Solución: a) 3 b) $\frac{1}{2}$

CUESTIÓN B.4:

a) [1,5 puntos] Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) [1 punto] Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$

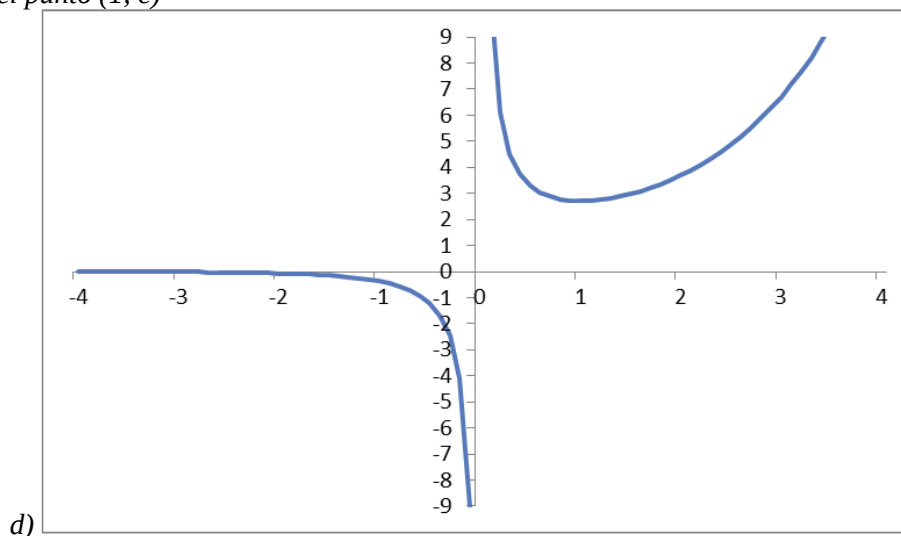
Solución: a) $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$ b) 1 u²

Junio 2014

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, se pide:

- a) [0,5 puntos] Dominio de definición y cortes con los ejes.
- b) [0,75 puntos] Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- c) [0,75 puntos] Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).
- d) [0,5 puntos] Representación gráfica aproximada.

Solución: a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. No hay puntos de corte con los ejes. b) $x=0$; $y=0$ c) La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, +\infty)$. Tiene un mínimo en el punto $(1, e)$



CUESTIÓN A.4:

a) [2 puntos] Calcule la integral indefinida $\int \text{tg}x \, dx$

b) [0,5 puntos] De todas las primitivas de la función $f(x) = \text{tg}x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, 2)$.

Solución: a) $F(x) = -\ln|\cos x| + C$ b) $F(x) = -\ln|\cos x| + 2$

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = x \cdot \ln x - x$, se pide:

a) [1,25 puntos] Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcule la ecuación de dicha recta.

b) [1,25 puntos] Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela al eje OX. Calcule la ecuación de dicha recta.

Solución: a) $x = e$; $y = x - e$ b) $x = 1$; $y = -1$

CUESTIÓN B.4:

a) [1,5 puntos] Encuentre una primitiva de la función $f(x) = x \cos x$.

b) [1 punto] Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cos x$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución: a) $F(x) = x \sin x + \cos x + K$ b) π

Septiembre 2013

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2 + 2}$

b) [1,5 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos x}$

Solución: a) e^2 b) 2

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \frac{6}{x^2 + 2x - 8}$

b) [1 punto] Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = -2$ y $x = 0$

Solución: a) $F(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+4} \right| + K$ b) Área = $\left| \ln 0'25 \right|$

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Descomponga el número 48 como suma de dos números positivos de tal manera que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea el mayor valor posible.

Solución: 12 y 36

CUESTIÓN B.4:

a) [2 puntos] Encuentre una primitiva de la función $f(x) = x^2 e^x$.

b) [0,5 puntos] Calcule la siguiente integral definida $\int_0^1 x^2 e^x dx$

Solución: a) $F(x) = e^x (x^2 - 2x + 2)$ b) $e - 2$

Junio 2013

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

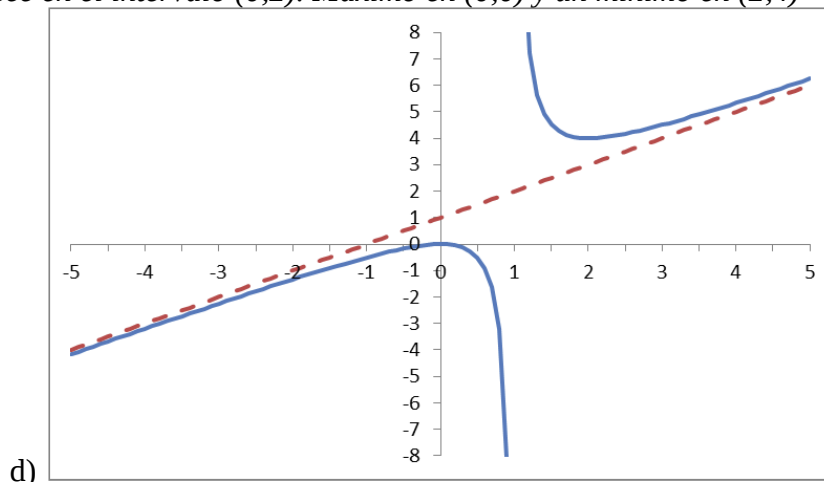
a) [0,25 puntos] Dominio de definición y puntos de corte con los ejes.

b) [1 punto] Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

c) [0,75 puntos] Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

d) [0,5 puntos] Representación gráfica aproximada.

Solución: a) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$ b) $x = 1$; $y = x + 1$ c) Crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2)$. Máximo en $(0, 0)$ y un mínimo en $(2, 4)$



CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{10}{x^2 - x - 6} dx$

Solución: $F(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 + C$

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) **[1 punto]** Demuestre que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.
 b) **[1,5 puntos]** Determine si la función es derivable en $x = 0$ y, en caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

Solución: a) Es continua b) Es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{2}$

CUESTIÓN B.4:

- a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \arctg x$.
 b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución: a) $F(x) = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ b) Área = $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ unidades²

Septiembre 2012

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right)$, se pide:

- a) **[0,75 puntos]** Dominio de definición.
 b) **[0,5 puntos]** Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ¿Es posible calcular también $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$? Justifique la respuesta.
 c) **[1,25 puntos]** Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Solución: a) Dominio = $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ b) $+\infty$; No existe c) 1

CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos] De todas las primitivas de la función $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas (0,1).

Solución: $F(x) = e^x - \ln|1+e^x| + \ln 2$

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + a & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + bx + b + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales f(x) es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución: $a = -2$ y $b = -3$

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos] Calcule el área comprendida entre la curva $y = \frac{3}{6+2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

Solución: $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ unidades cuadradas

Junio 2012

CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que f(x) cumple las siguientes propiedades

- a) f(x) es continua en todo $\mathbb{R}$;
- b) f(x) tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 0.

Solución: a=0 y b= -3

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 9.

Solución: a) $F(x) = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + K$ b) $6 - 2\ln 4$ unidades cuadradas

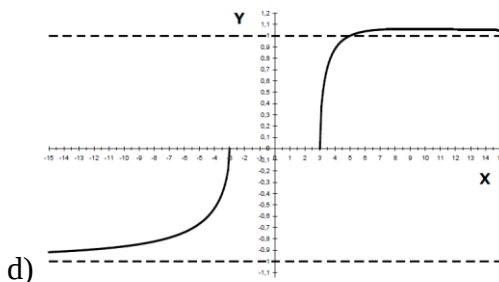
CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Dominio de definición y cortes con los ejes.
- b) **[0,75 puntos]** Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- c) **[0,75 puntos]** Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).
- d) **[0,5 puntos]** Representación gráfica aproximada.

Solución: a) El dominio de la función es $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ y corta el eje X en los puntos A(-

3, 0) y B(3, 0) b) Las asíntotas son y = 1; y = -1 c) Decrecimiento en $(-\infty, -3) \cup (3, 9)$

y Crecimiento en $(9, +\infty)$. El máximo relativo está situado en el punto $\left(9, \frac{\sqrt{72}}{8}\right)$



CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución: a) $F(x) = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + K$

b) $6 - 2\ln 4$ unidades cuadradas

Septiembre 2011

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, se pide:

a) Determine los puntos de la gráfica de f para los cuales la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. **[1.5 puntos]**

b) Determine si, para alguno de dichos puntos, la recta tangente a la gráfica coincide con la bisectriz del segundo cuadrante. **[1 punto]**

Solución: a) $P(3, -3)$ y $Q(1, 3)$

b) Para el punto $P(3, -3)$ su tangente es $y = -x$

CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$ **[1.5 puntos]**

b) Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$ **[1 punto]**

Solución: a) $F(x) = -\arctan(\cos(x)) + K$ b) $\frac{\pi}{4}$

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = x - x^3$, se pide:

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0)$. **[1.25 puntos]**

b) Calcule los puntos de corte de dicha recta con la gráfica de f . **[1.25 puntos]**

Solución: a) $y = -2x + 2$ b) Los puntos de corte son $(1, 0)$ y $(-2, 6)$

CUESTIÓN B.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int x^2 e^x dx$. **[1.5 puntos]**

b) Evalúe la integral definida $\int_0^1 x^2 e^x dx$. **[1 punto]**

Solución: a) $F(x) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + K$ b) $e - 2$

Junio 2011

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, se pide:

a) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales en caso de que las haya. **[1.25 puntos]**

b) Estudiar si existen asíntotas horizontales y calcularlas en caso de que las haya. **[1.25 puntos]**

Solución: a) $x=0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ b) $y=1$; $y=-1$

CUESTIÓN A.4:

- a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución). **[1 punto]**
- b) Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$, donde **ln** denota la función logaritmo neperiano, utilizando el método de integración por partes. **[1.5 puntos]**

Solución: a) $F(x) = x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + 1) + C$ b) $\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2$

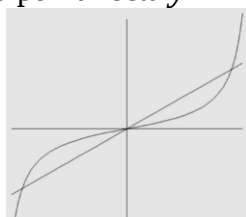
CUESTIÓN B.3: Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

- a) Demuestre que el área de dicho triángulo viene dada por la función $A(x) = 12\sin(x)$, donde x denota el ángulo formado por las manecillas del reloj. **[1.25 puntos]**
- b) Determine el ángulo que deben formar las manecillas del reloj para que el área de dicho triángulo sea máxima ¿Cuál es el valor de dicha área máxima? **Se puede utilizar el apartado a) aunque no se haya demostrado. [1.25 puntos]**

Solución: a) $\text{Área} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sin x}{2} = 12 \sin x$ b) Para $\frac{\pi}{2}$; $\text{Área} = 12 u^2$

CUESTIÓN B.4:

- a) Dada la función $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ definida para los valores $-1 < x < 1$, determine los puntos de corte de la recta $y = 4x$ con la gráfica de f . **[0.75 puntos]**
- b) Calcule el área del recinto limitado por la recta $y = 4x$ y la gráfica de f . **[1.75 puntos]**



Solución: a) Los puntos de corte son: $x = 0$, $x = \pm \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right) u^2$

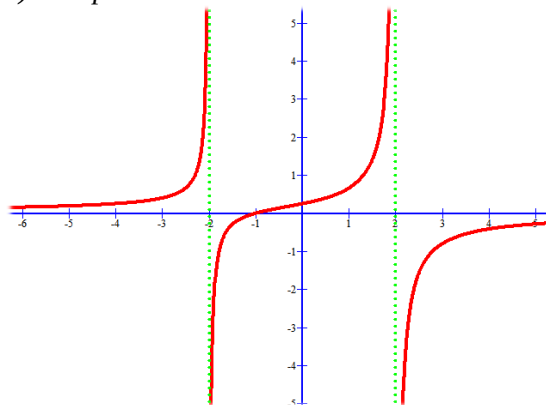
Septiembre 2010

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{4-x^2}$, se pide:

- i) Dominio y cortes con los ejes. **[0.5 puntos]**
- ii) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales. **[0.5 puntos]**
- iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas y calcularlas. **[0.5 puntos]**

- iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos. **[0.5 puntos]**
 v) Representación gráfica aproximada. **[0.5 puntos]**

Solución: i) El Dominio es $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$; $P(0, 0.25)$ y $Q(-1, 0)$ ii) $x=2$; $x=-2$
 iii) $y=0$ iv) Siempre es creciente. No tiene extremos v)



CUESTIÓN A.4: Enunciar el teorema fundamental del cálculo integral y calcular la integral siguiente:

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx \text{ [2.5 puntos]}$$

Solución: $F(x) = x + \frac{9}{6} \ln|x-3| - \frac{9}{6} \ln|x+3| + C$

CUESTIÓN B.3: Definición de derivada de una función en un punto. Demostrar que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. **[2.5 puntos]**

Solución: Este tipo de ejercicios teóricos no aprendemos a hacerlos.

CUESTIÓN B.4: Calcular el área de la región delimitada por el eje x y la función $f(x) = x - \sqrt{x}$. **[2.5 puntos]**

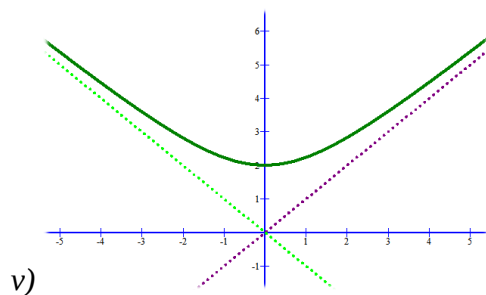
Solución: $\frac{1}{6} u^2$

Junio 2010

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, se pide:

- i) Dominio y cortes con los ejes. **[0.5 puntos]**
 ii) Estudio de simetrías y de regiones para el signo de $f(x)$. **[0.5 puntos]**
 iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas. **[0.5 puntos]**
 iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos. **[0.5 puntos]**
 v) Representación gráfica aproximada. **[0.5 puntos]**

Solución: i) Dominio= $\mathbb{R}$; punto de corte es $P(0,2)$ ii) Es par. Siempre positiva iii) $y=x$; $y=-x$
 iv) La función presenta un mínimo en $x=0$. Decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$



CUESTIÓN A.4: Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 4x^2 + 1$. [2.5 puntos]

Solución: Área = $\frac{1}{2} u^2$

CUESTIÓN B.3: La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Sabiendo que la hipotenusa debe medir 6 metros, calcular sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima. [2.5 puntos]

Solución: Las dimensiones de la vela con superficie máxima son de catetos $x = y = \sqrt{18} \text{ m}$.

CUESTIÓN B.4: Calcular la integral siguiente: $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx$. [2.5 puntos]

Solución: $1 - \frac{5 \ln 2}{3}$